Милан Шариќ
Бели Манастир, СРЈ

МЕТОД НА ПОМОШНИ ФИГУРИ

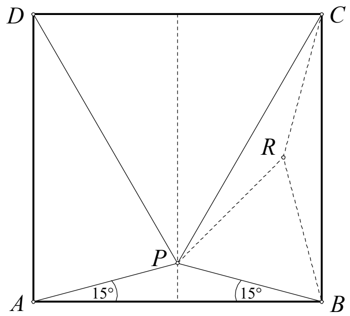
При решавање на геометриски задачи често пати е потребно да се дополни цртежот. Но како да се направи тоа? Која права да се повлече. До која фигура да се дополни цртежот? Која идеја да се користи?

Тоа се прашања кои себе си ги поставувате при решавање на некоја задача. Не е лесно да се одговори на ова прашање, но ако на еден единствен пример можеме да воочиме десетина различни патишта за негово решавање, тогаш истиот го заслужува нашето внимание. Ваков бисер е и следната задача која е дадена на сојузниот натпревар во СРЈугославија.

Задача. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ земена е точка P таква што

$$\angle PAB = \angle ABP = 15^\circ .$$

Докажете дека ΔPCD е рамностран.



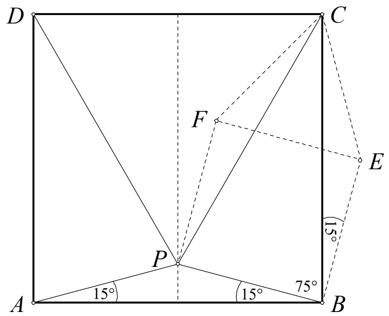
Црт. 1

I. **Дополнување со рамностран триаголник.** Во внатрешноста на ΔPBC наоѓаме точка R така што ΔPBR е рамностран. Тогаш $\Delta ABP \cong \Delta BCP$, според CAC, па затоа $\overline{BR} = \overline{RC}$. Понатаму, $\Delta CRB \cong \Delta CRP$, повторно според CAC, па затоа $\overline{PC} = \overline{BC}$.

Сега, од $\overline{PC} = \overline{BC} = \overline{DC}$ и

$$\angle DCP = 90^\circ - \angle PCB = 90^\circ - (\angle PCR + \angle RCB)$$
$$= 90^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 60^\circ$$

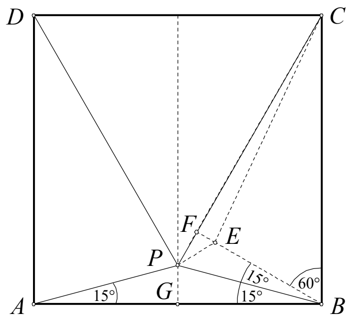
следува дека ΔPCD е рамностран.



Црт. 2

II. **Доплонување до полн квадрат.** Над отсечката PB конструираме квадрат $PBEF$. Од складноста на триаголниците ABP и BEC следува дека $\angle BEC = 150^\circ$, па затоа $\angle FEC = 60^\circ$. Сега ΔFEC е рамнокрак со $\overline{FE} = \overline{EC}$, па затоа тој е рамностран. Бидејќи $\angle CFP = 150^\circ$, добиваме дека $\Delta BEC \cong \Delta PFC$ и бидејќи, $\angle PCB = 75^\circ$ добиваме $\angle BCP = 30^\circ$.

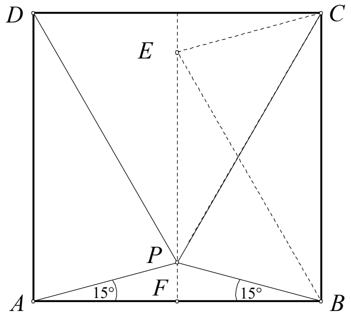
Според тоа, за ΔDPC важи $\overline{DC} = \overline{BC} = \overline{PC}$ и $\angle DCP = 90^\circ - \angle PCB = 60^\circ$, т.е. тој е рамностран.



Црт. 3

III. **Дополнување до половина рамностран триаголник.** Повлекуваме отсечка BE таква што $\angle PBE = 15^\circ$, цртеж 3, и нека $CF \perp BE$. ΔFBC е половина од рамностран триаголник, па затоа $2\overline{FB} = \overline{BC}$. Бидејќи $\overline{BC} = 2\overline{BG}$, добиваме дека $\Delta PGB \cong \Delta FPB$, па затоа $\angle BFP = 90^\circ$. Значи, точките P, E и C се колинеарни, од што следува $E \equiv F$. Значи, $\angle BCE = 30^\circ$, ΔPBC е рамнокрак и $\overline{PC} = \overline{BC}$, од што следува дека ΔPCD е рамностран.

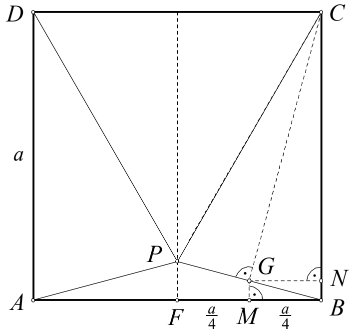
***IV.* Дополнување до рамнокрак трапез.** Повлекуваме права BE таква што $\angle PBE = 45^\circ$, цртеж 4. ΔEBF е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{BE} = 2\overline{BF}$. Бидејќи $\overline{BC} = 2\overline{BF}$ добиваме дека ΔPBC е рамнокрак со агли 75°, 75°, 30°. Понатаму, четириаголникот $PBCE$ е рамнокрак трапез со агли $75^\circ, 75^\circ$, 105°, 105°, (зошто?), па затоа $\overline{PC} = \overline{BE}$. Според тоа, $\overline{PC} = \overline{BC}$, па сега доказот е како и во претходните разгледувања.



Црт. 4

***V.* Дополнување до правоаголен триаголник.** Нека $CG \perp PB$, $GN \perp BC$ и $GM \perp AB$, цртеж 5. Сега ΔBGC е правоаголен со еден агол 75°, па затоа $\overline{BC} = 4\overline{GN}$, (докажете!).

Бидејќи $\overline{GN} = \overline{BM} = \frac{a}{4}$ добиваме дека GM е средна линија за ΔPFB. Значи, точката G е средина за отсечката PB, што значи $\Delta PGC \cong \Delta BGC$, т.е. $\overline{PC} = \overline{BC}$, па сега доказот е како и во претходните случаи.



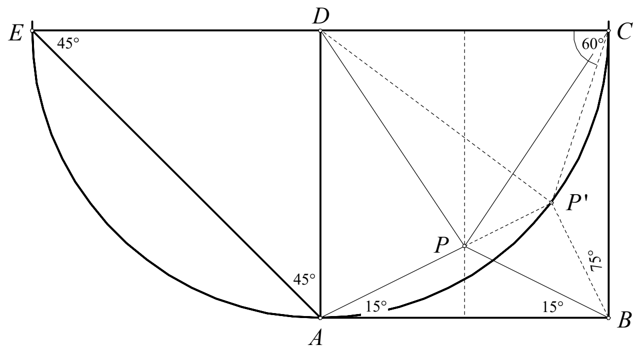
Црт. 5

***IV.* Дополнување до тетивен четириаголник.** Да земеме точка D на правата CD таква што D е средина на отсечката CE. Нека D е центар на кружницата опишана околу ΔEAC. Ако P лежи на кружницата, тогаш задачата е решена, т.е. ΔPCD е рамностран, (зошто?).

Претпоставуваме дека точката P лежи во внатрешноста на кружницата (цртеж 6). Нека правата AP по вторпат ја сече кружницата во точка P'. Четириаголникот $EAP'C$ е тетивен, па

$$\angle EAP + \angle P'CE = 180^\circ,$$

односно, $\angle P'CE = 60^\circ$.

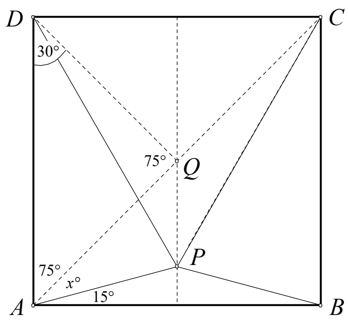


Црт. 6

Бидејќи $\Delta P'CD$ е рамностран, ($\overline{DC} = \overline{P'D}$ и $\angle DCP' = 60^\circ$), добиваме дека $\Delta P'BC$ е рамнокрак со агли $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$. Понатаму, $\angle ABC = \angle ABP + \angle PBP' + \angle P'BC = 90^\circ$ од што следува $\angle PBP' = 0^\circ$, т.е. $P \equiv P'$, што значи точката P лежи на кружницата. Противречност.

Ако точката P' лежи надвор од кружницата, заклучуваме на ист начин.

***VII.* Метод на лажна претпоставка.** Нека претпоставиме дека ΔDQC е рамностран (црт. 7). Тогаш ΔQDA е рамнокрак со агли $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$. Бидејќи $\angle DAB = 75^\circ + x + 15^\circ = 90^\circ$, добиваме $x = 0^\circ$. Значи, $P \equiv Q$ и ΔPCD е рамностран.

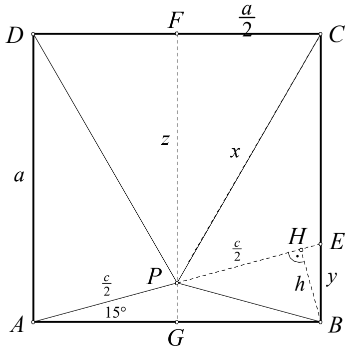


Црт. 7

***VIII.* Метод на плоштини.**
Нека $AD \cap BC = \{E\}$, H е подножјето на висината спуштена од B во ΔABE и нека FG е оската на симетрија на квадратот. Да ги воведеме ознаките $\overline{AB} = a$, $\overline{AE} = c$, $\overline{BE} = y$, $\overline{BH} = h$, $\overline{PF} = z$, $\overline{PC} = x$, (цртеж 8). Да забележиме дека $c = 4h$ (зошто?). Плоштината на ΔABE е $P = \frac{ay}{2}$, но и $P = \frac{ch}{2}$, па значи $ay = ch$, т.е. $ay = 4h^2$. Од друга страна $a^2 + y^2 = c^2 = 16h^2$. Оттука $y^2 - 4ay + a^2 = 0$, па е $y = a(2 - \sqrt{3})$. Сега лесно се добива дека

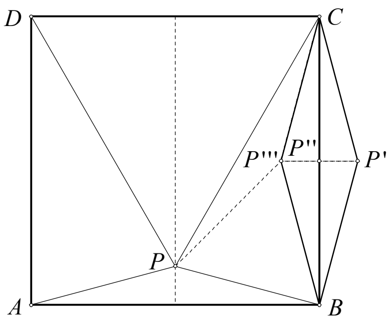
$$z = a - \frac{y}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

па е $x = a$. Значи, ΔPCD е рамностран.



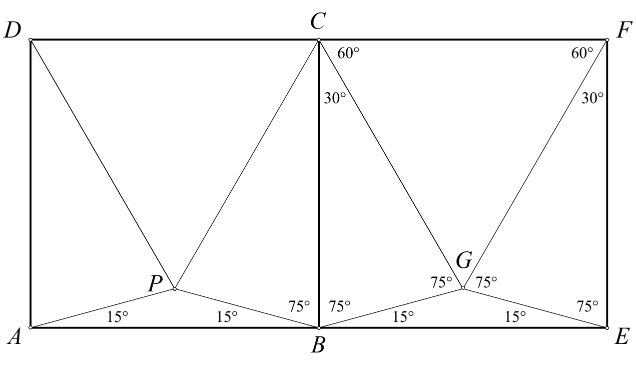
Црт. 8

***IX.* Примена на ротација.** Нека $\Delta BCP'$ е добиен со ротација на ΔABP околу точката B за 90° и нека е $\Delta BCP'''$ осносиметричната слика на $\Delta BCP'$ во однос на правата BC. Понатаму $BC \cap P'P''' = \{P''\}$. Бидејќи $\angle PBP''' = 60^\circ$, доби-ваме дека $\Delta BPP'''$ е рамностран. Понатаму $\angle P'''PC' = 15^\circ$, што значи $\Delta BCP''' \cong \Delta PCP'''$, од што следува $\overline{PC} = \overline{BC}$, т.е. ΔPCD е рамностран.



Црт. 9

***X.* Сведување на поедноставна задача.** Конструираме квадрат $BEFC$ над страната BC, а потоа конструираме рамностран ΔCFG така што точката G е во внатрешноста на квадратот $BEFG$. Триаголниците BEG, GEF и BCG се рамнокраки, а соодветните агли се означени на цртеж 10. Затоа $\Delta ABE \cong \Delta BEG$, како и $\Delta PBC \cong \Delta GEF$. Од ова следува дека $\overline{PC} = \overline{BC}$, т.е. ΔPCD е рамностран.



Црт. 10