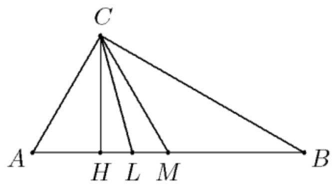
БМО 1988

1. Нека CH, CL и CM се соодветно висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C во $\triangle ABC$ (точките H, L и M се на правата AB). Односите на плоштините на $\triangle HMC$ и $\triangle LMC$ спрема плоштината на $\triangle ABC$ се $\frac{1}{4}$ и $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, соодветно. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle BAC \geq \measuredangle ABC$. Тогаш точките A, H, L, M и B на AB се распоредени според овој редослед (цртеж десно). Од $4P_{HMC} = P_{ABC}$ следува $4\overline{HM} = \overline{AB}$, т.е. H е средина на AM и $\overline{AC} = \overline{CM}$. Од $P_{LMC} = (1-\frac{\sqrt{3}}{2})P_{ABC}$ следува дека $\frac{\overline{LM}}{2\overline{AM}} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, па затоа $\frac{\overline{AM}-\overline{LM}}{\overline{AM}+\overline{LM}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$, т.е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Го изразуваме $\overline{CH}^2$ на два начина, преку Питагоровата теорема за $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ и добиваме $\overline{AC}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} = 3\overline{AC}^2 - \frac{9\overline{AB}^2}{4}$, од каде добиваме $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Тогаш $\overline{AB} = 2\overline{CM}$, што значи дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$. Оттука и од $\overline{BC} = \sqrt{3}\overline{AC}$ заклучуваме дека $\measuredangle BAC = 60^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$.



Кога $\measuredangle BAC \leq \measuredangle ABC$, аналогно се добива дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle BAC = 30^\circ$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$.

2. Определи ги сите полиноми со две променливи $P(x,y)$ за кои равенството $P(a,b)P(c,d) = P(ac+bd, ad+bc)$ е исполнето за секои реални броеви a,b,c,d.

Решение. ***Лема* 1.** Ако $f(x,y)$ е полином од две променливи и $f(x,x)=0$ за секој реален број x, тогаш $f(x,y)=(x-y)g(x,y)$, каде $g(x,y)$ е полинокм од две променливи.

Доказ. Да го запишеме $f(x,y)$ по степени на x, т.е.

$$f(x,y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(y)x + a_n(y),$$

каде $a_i(y), i=0,1,\ldots,n$ се полиноми од y. Го бараме $g(x,y)$ во облик

$$g(x,y) = b_0(y)x^{n-1} + b_1(y)x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}(y)x + b_{n-1}(y)$$

каде $b_i(y), i=0,1,\ldots,n-1$ се полиноми од y.

Равенството $f(x,y)=(x-y)g(x,y)$ е еквивалентно со

$$b_0(y) = a_0(y),$$
$$b_1(y) = yb_0(y) + a_1(y),$$

$$\begin{aligned}&\text{..................................,}\\&b_{n-1}(y)=yb_{n-2}(y)+a_{n-1}(y),\\&-yb_{n-1}(y)=a_n(y).\end{aligned}$$

Првите n равенства еднозначно ги определуваат $b_i(y), i=0,1,...,n-1$ и останува да докажеме дека и последното равенство е точно. Ако првото равенство го помножиме со y^n, второто со y^{n-1} итн. $n-$тото со y и ги собереме добиените равенства добиваме

$$yb_{n-1}(y)=a_0(y)y^n+a_1(y)y^{n-1}+...+a_{n-1}(y)y=f(y,y)-a_n(y)=-a_n(y),$$

со што доказот е завршен. ■

Аналогно се докажува дека ако $f(x,y)$ е полином од две променливи таков што $f(x,-x)=0$ за секој реален број x, тогаш $f(x,y)=(x+y)g(x,y)$, каде $g(x,y)$ е полином од две променливи.

***Лема* 2.** Ако $f(x)$ е полином од една променлива и $f(x)f(y)=f(xy)$ за секои реални броеви x и y, тогаш $f(x)=0$ или $f(x)=x^m$ за некој ненегативен цел број m.

Доказ. Од условот следува $f(x)f(0)=f(0)$ за секој реален број x. Нека полиномот $f(x)$ не е идентично еднаков на 0. Ако $f(0)\neq 0$ добиваме $f(x)=1$ за секој реален број x. Ако $f(0)=0$ имаме $f(x)=x^m g(x)$, каде m е природен број и $g(x)$ е полином за кој $g(0)\neq 0$. Тогаш од условот следува дека $g(x)g(y)=g(xy)$ за секои реални броеви x и y и како погоре заклучувамне дека $g(x)=1$. Според тоа, $f(x)=x^m, m\geq 0$, со што доказот е завршен. ■

Да го разгледаме полиномот $Q(x)=P(x,0)$. Од условот на задачата следува $P(x,0)P(y,0)=P(xy,0)$, т.е. дека $Q(x)Q(y)=Q(xy)$ за секои реални броеви x и y. Согласно со лема 2 можни се следниве случаи:

1) Нека $Q(x)=0$ за секој x. Тогаш $0=Q(t)P(x,y)=P(t,0)P(x,y)=P(tx,ty)$ за секои t,x,y, па затоа за $t=1$ добиваме $P(x,y)=0$ за секои реални броеви x и y.

2) Нека $Q(x)=x^m$ за некој цел ненегативен број m. Имаме

$$\begin{aligned}P(x,y)P(1,1)&=P(x+y,x+y)=P(x+y,0)P(1,1)\\&=Q(x+y)P(1,1)=(x+y)^m P(1,1)\end{aligned}$$

и аналогно $P(x,y)P(1,-1)=(x-y)^m P(1,-1)$.

Одделно ќе ги разгледаме четирите можности за анулирање на $P(1,1)$ и $P(1,-1)$. Имаме:

2.1. Ако $P(1,1) \neq 0$ и $P(1,-1) \neq 0$, добиваме $P(x,y) = (x+y)^m = (x-y)^m$, што е можно само за $m = 0$. Според тоа, $P(x,y) = 1$ за секои реални броеви x и y.

2.2. Ако $P(1,1) \neq 0$ и $P(1,-1) = 0$, добиваме $P(x,y) = (x+y)^m$, за секои реални броеви x и y.

2.3. Ако $P(1,1) = 0$ и $P(1,-1) \neq 0$, добиваме $P(x,y) = (x-y)^m$, за секои реални броеви x и y.

2.4. Ако $P(1,1) = 0$ и $P(1,-1) = 0$, добиваме

$$0 = P(1,1)P(x,y) = P(x+y, x+y),$$

т.е. $P(x,x) = 0$ за секој x. Аналогно $P(x,-x) = 0$ за секој x. Сега од лема 1 следува дека

$$P(x,y) = (x-y)^k (x+y)^n R(x,y),$$

каде $R(x,y)$ е полином од две променливи за кој важи $R(1,1) \neq 0$ и $R(1,-1) \neq 0$. Но, од условот на задачата следува дека

$$R(a,b)R(c,d) = R(ac+bd)R(ad+bc),$$

за секои реални броеви a,b,c,d. Оттука и од претходните разгледувања следува дека $R(x,y) = 1$, т.е.

$$P(x,y) = (x-y)^k (x+y)^n \text{, за секои } x,y \in \mathbb{R}.$$

3. Докажи, дека секој тетраедар $A_1A_2A_3A_4$ може да биде поставен меѓу две паралелни рамнини, кои се на растојание d и бројот d го задоволува неравенството $d \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$, каде

$$p = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + \overline{A_3A_4}^2.$$

Решение. Ќе го користиме трдењето: *Квадратот на растојанието меѓу средините на два спротивни раба на тетраедарот е четири пати помал од збирот на квадратите на должините на рабовите кои не ги содржат тие средини, намален за збирот на квадратите на должините на рабовите кои ги содржат тие средини*. Ова тврдење може да се докаже ако неколку пати ги искористиме формулата за тежишната линија на триаголникот.

Нека a,b и c се трите растојанија меѓу средините на рабовите на даден тетраедар. Тогаш лесно се добива дека $4(a^2+b^2+c^2) = p$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a = \min\{a,b,c\}$ и дека a е растојанието меѓу средините на A_1A_2 и A_3A_4. Тогаш $p \geq 12a^2$, т.е. $a \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

Нека α е рамнината која го содржи работ A_1A_2 и е паралелна на работ A_3A_4 и β е рамнината која го содржи работ A_3A_4 и е паралелна на работ A_1A_2. Јасно, $\alpha \parallel \beta$ и тетраедарот се наоѓа меѓу овие две рамнини. Освен тоа растојанието меѓу α и β не е поголемо од $a \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

4. Определи ги сите парови (a_n, a_{n+1}) од последователни чкенови на низата $a_n = 2^n + 49,\ \ n = 1,2,...$ за кои $a_n = pq, a_{n+1} = rs$, каде p,q,r,s се прости броеви такви што $p < q, r < s$ и $q - p = s - r$.

Решение. Да означиме $q - p = s - r = x > 0$.Тогаш

$$a_n = p(p+x) \text{ и } a_{n+1} = r(r+x)$$

и од $a_{n+1} > a_n$ следува дека $r > p$. Од друга страна $a_{n+1} - 2a_n = -49$, т.е. $a_{n+1} < 2a_n$, што значи $r(r+x) < 2p(p+x)$. Според тоа,

$$2p(p+x) > r(r+x) > r(p+x),$$

па затоа $2p > r$.

Бидејќи $a_n = 2^n + 49$ е делив со 3 ако и само ако n е непарен број, од $\min\{p,q,r,s\} = p$ следува дека $p = 3$. Оттука и од $2p > r$ следува дека $r = 5$. Тогаш од $a_{n+1} = 2a_n - 49$ наоѓаме $x = 56$ и конечно $a_7 = 3 \cdot 59 = 2^7 + 49$ и $a_8 = 5 \cdot 61 = 2^8 + 49$. Според тоа, единствено решение е подредениот пар (a_7, a_8).