Олег Мушкаров, Софија

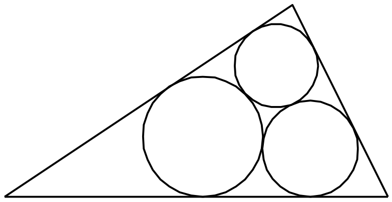
ПРОБЛЕМ НА МАЛФАТИ

1. ВОВЕД

Во 1803 година, италијанскиот математичар Ѓовани Малфати го поставил следниот проблем: *во внатрешноста на дадена триаголна призма да се сместат три непресекувачки цилиндри така што збирот на нивните волумени да е максимален.*

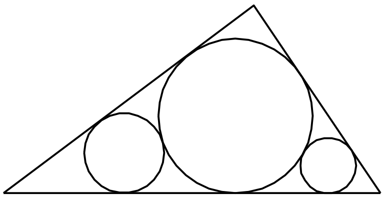
Очигледно е дека овој проблем е еквивалентен на следниот геометриски екстремален проблем: *во даден триаголник, да се сместат три кружници кои не се сечат, така што збирот на нивните плоштини да е максимален.*

Малфати и многу други математичари мислеле дека решението на овој проблем е дадено со три кружници од кои што секоја кружница однадвор ги допира останатите две кружници и секоја од кружниците е тангентна кон две страни на триаголникот (црт. 1).

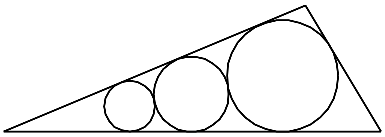


Црт. 1

Малфати ги пресметал радиусите на секоја од тие кружници кои се познати како Малфатиеви кружници. Подоцна станало јасно дека претпоставките на Малфати и неговото решение не се точни. Освен тоа американскиот математичар Голдберг во 1969 година докажува дека Малфатиевите кружници не даваат решение на Малфатиевиот проблем. Со други зборови, за било кој триаголник постојат три кружници кои не се сечат и се во внатрешноста на триаголникот и збирот на нивните плоштини е поголем од збирот на плоштините на Малфатиевите кружници.



Црт. 2



Црт. 3

И покрај сознанијата на Голдберг, Малфатиевиот проблем не бил решен, иако изгледала разумна претпоставката дека решението е дадено со следната конструкција: прво ќе впишеме кружница во дадениот триаголник, потоа ќе впишеме кружници во помалиот агол од триаголникот која е тангентна кон веќе впишаната кружница. Третата кружница е впишана или во истиот агол (црт. 2) или во средниот агол по големина од триаголникот (црт. 3), во зависност од тоа која од нив има поголема плоштина.

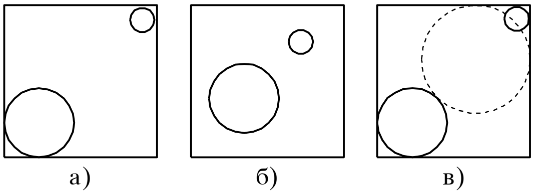
Во оваа статија ќе го разгледаме Малфатиевиот проблем за две кружници во триаголник или квадрат. Главна цел е решавање на Малфатиевиот проблем за рамностран триаголник.

2. ПРОБЛЕМ НА МАЛФАТИ ЗА ДВЕ КРУЖНИЦИ

Разгледувањата ќе ги започнеме со проблемот на Малфати за две кружници во внатрешноста на квадрат или триаголник.

Проблем 1. Во внатрешноста на квадрат, да се најдат две кружници кои не се сечат, така што збирот на нивните плоштини е максимален.

Решение. Разгледуваме две произволни кружници во внатрешноста на квадрат со единечна површина. Не е тешко да се покаже дека постојат две кружници со исти радиуси кои се впишани во спротивни агли од квадратот и кои немаат заеднички внатрешни точки. Бидејќи ние го разгледуваме збирот на нивните површини можеме да претпоставиме дека двете кружници се тангентни една на друга (црт. 4, в)). Да ги означиме нивните радиуси со r_1 и r_2. Тогаш, лесно е да се провери дека



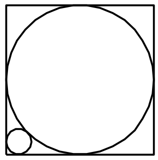
Црт. 4

$$r_1+r_2=2-\sqrt{2} \qquad (1)$$

Бидејќи кружниците припаѓаат на внатрешноста на квадратот, јасно е дека

$$0\le r_1, r_2 \le \tfrac{1}{2} \qquad (2)$$

Според тоа нашиот проблем е редуциран на следното: да се најде максимум на $r_1^2+r_2^2$ при условите (1) и (2). Нека претпоставиме дека $r_1\le r_2$ и ставаме $r_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}-x$ и $r_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+x$, каде што $x\ge 0$. Од (2) добиваме дека $x\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Според тоа максимумот $r_1^2+r_2^2=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+2x^2$ се достигнува за $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Во тој случај $r_1=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$, $r_2=\frac{1}{2}$, па решението на проблемот е дадено со кружниците од цртеж 5.

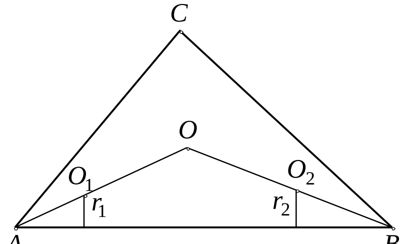

Црт. 5

Во наредниот дел ќе го решаваме проблемот на Малфати за две кружници во произволен триаголник.

Проблем 2. Во внатрешноста на триаголник да се најдат две кружници кои не се сечат, така што збирот на нивните плоштини да биде максимален.

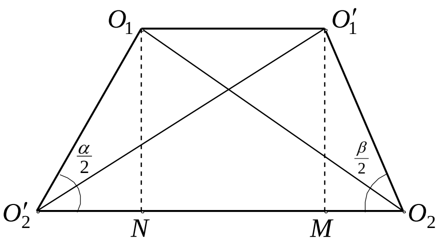
Решение. Ќе покажеме дека решението е дадено со впишаната кружница во триаголникот и кружницата која е впишана во најмалиот агол од триаголникот и ја допира впишаната кружница.

Нека $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ се две кружници во внатрешноста на триаголникот кои не се сечат. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека секоја од нив е тангентна до намалку две страни од триаголникот. Според цртеж 6, претпоставуваме дека k_1 е тангентна кон страните AB и AC, а кружницата k_2 е тангентна кон AB и BC.



Црт. 6

Тогаш нивните центри O_1 и O_2 лежат на симетралите на $\angle A$ и $\angle B$ соодветно. Нека претпоставиме дека ниту една од кружниците k_1 и k_2 не е впишаната кружница k во триаголникот. Ќе докажеме дека во овој случај постои кружница k' која нема заедничка точка со k и таква што збирот на површините на k и k' е поголем од збирот на плоштините на k_1 и k_2. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha = \angle CAB \le \angle CBA = \beta$ и $r_1 \le r_2$. Навистина, ако $r_1 > r_2$, ја означуваме со k_1' кружницата со радиус $r_1' = r_2$ која е впишана во $\angle CBA$, а за k_2' кружница со радиус $r_2' = r_1$ која е впишана во $\angle CAB$. Тогаш $r_1' < r_2'$ и збирот на површините на k_1' и k_2' е ист како оној на k_1 и k_2. Да забележиме, (црт. 7), дека $|O_2'M| \ge |O_2 N|$, бидејќи $\alpha \le \beta$.

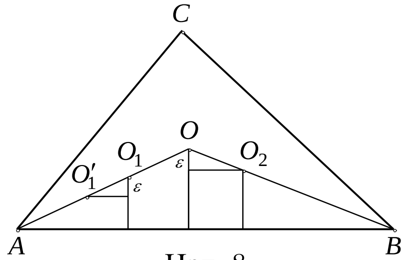


Црт. 7

Оттука

$$|O_1'O_2'| \ge |O_1 O_2| \ge r_1' + r_2' = r_1 + r_2,$$

т.е. кружниците k_1' и k_2' немаат заедничка внатрешна точка. Да претпоставиме дека $\alpha \le \beta$ и $r_1 \le r_2$. Земаме $\varepsilon = r - r_2 > 0$, каде r е радиус на впишаната кружница во триаголникот ABC. Ако $r_1 < \varepsilon$, тогаш $r_1 + r_2 < r$. Затоа $r_1^2 + r_2^2 < r^2$. Според тоа плоштината на впишаната кружница е поголема од збирот на плоштините на кружниците k_1 и k_2. Заради тоа, нека $r_1 > \varepsilon$ и k' е кружница со радиус $r' = r_1 - \varepsilon$ која е впишана во $\angle CAB$ (црт. 8).



Црт. 8

Тогаш

$$\pi(r^2 + r'^2) = \pi((r_1 - \varepsilon)^2 + (r_1 + \varepsilon)^2) = \pi(r_1^2 + r_2^2 + 2\varepsilon(r_2 - r_1) + 2\varepsilon^2) > \pi(r_1^2 + r_2^2).$$

Останува да се докаже дека кружниците k и k' немаат заедничка внатрешна точка. Да забележиме дека

$$\overline{OO_2} = \frac{\varepsilon}{\sin\frac{\beta}{2}} \le \frac{\varepsilon}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \overline{O_1 O_1'} .$$

Според тоа

$$|\overline{OO_1'} = \overline{OO_1} + \overline{O_1O_1'} \ge \overline{OO_1} + \overline{O_2O} \ge \overline{O_1O_2} .$$

Значи, $\overline{OO_1'} \ge \overline{O_1O_2} \ge r_1 + r_2 = r + r'$, и заради тоа k и k' немаат заедничка внатрешна точка.

Претходните разгледувања покажуваат дека максимумот се достигнува кога една од кружниците е впишаната кружница во триаголникот, а другата е кружница впишана во најмалиот агол од триаголникот и е тангентна кон впишаната кружница.

3. ДУАЛЕН МАЛФАТИЕВ ПРОБЛЕМ

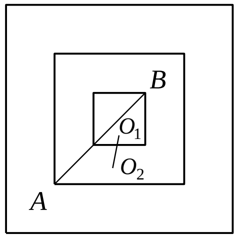
Во овој дел ќе разгледаме некои проблеми кои во некој смисол се дуални на Малфатиевиот проблем за две кружници во квадрат или во рамностран триаголник.

Проблем 3. За дадени два позитивни броеви a и b, да се најде најмалиот квадрат што содржи две кружници кои не се сечат со радиуси a и b соодветно.

Решение. Ќе претпоставиме дека $a \geq b$. Разгледуваме квадрат со страна x, таков што ги содржи двете кружници $k_1(O_1, a)$ и $k_2(O_2, b)$. Тогаш центарот O_1 (соодветно O_2) на кружницата k_1 (соодветно k_2) припаѓаат на квадрат чии страни се на растојание a (соодветно b) од страните на дадениот квадрат (црт. 9).

Тогаш $\overline{O_1O_2} \leq \overline{AB} = \sqrt{2}(x-a-b)$. Од друга страна $\overline{O_1O_2} \geq a+b$ (кружниците k_1 и k_2 не се сечат) па според тоа $\sqrt{2}(x-a-b) \geq a+b$ кое е еквивалентно со

$$x \geq (a+b)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{3}$$



Црт. 9

Исто така јасно е дека

$$x \geq 2a \tag{4}$$

бидејќи кружницата k_1 припаѓа во внатрешноста на квадратот со страна x. Сега лесно се покажува дека страната d на најмалиот квадрат кој ги содржи кружниците k_1 и k_2 со радиуси a и b соодветно, и кои не се сечат е дадена со:

$$d = \begin{cases} (a+b)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & , \quad b(3+2\sqrt{2}) \geq a \geq b \\ 2a & , \quad a \geq b(3+2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Употребувајќи аналогни разгледувања лесно може да се реши следниот проблем.

Проблем 4. Нека a и b ($a \geq b$) се позитивни броеви и нека d е страната на најмалиот рамностран триаголник кој содржи во својата внатрешност две кружници со радиуси a и b и кои немаат заедничка внатрешна точка. Да се докаже дека

$$d = \begin{cases} \sqrt{3}(a+b) + 2\sqrt{ab} & , \quad b \leq a \leq 3b \\ 2\sqrt{3}a & , \quad a \geq 3b \end{cases}$$

4. МАЛФАТИЕВ ПРОБЛЕМ ЗА РАМНОСТРАН ТРИАГОЛНИК

Сега сме спремни да го решиме Малфатиевиот проблем за рамностран триаголник. Поточно ќе го докажеме следното:

Теорема 1. Решението на Малфатиевиот проблем за рамностран триаголник е дадено со впишаната кружница и две кружници кои се тангентни на впишаната кружница и кон две страни од триаголникот.

Доказ. Ќе земеме дека страната на рамностраниот триаголник е 1. Ќе претпоставиме дека тој во својата внатрешност содржи три кружници со радиуси a, b и c кои не се сечат. Ќе го покажеме неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{11}{108}. \tag{5}$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b \geq c$. Ќе разгледаме два случаи:

СЛУЧАЈ 1. Нека $a \geq 3b$. Бидејќи $a \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ добиваме дека

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + 2b^2 \leq a^2 + \frac{2}{9}a^2 \leq \frac{11}{108}.$$

Да забележиме дека равенство е исполнето ако и само ако

$$a=\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad b=c=\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

СЛУЧАЈ 2. Нека $b \le a \le 3b$. Од проблем 4 следува дека

$$\sqrt{3}(a+b)+2\sqrt{ab} \le 1.$$

Земаме $a=3x^2b$ каде x е позитивен број. Тогаш следните две неравенства се еквивалентни

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le 1 \quad \text{и} \quad b \le \frac{1}{\sqrt{3}(3x^2+2x+1)}.$$

Според тоа

$$a^2+b^2+c^2 \le a^2+2b^2=(9x^4+2)b^2 \le \frac{9x^4+2}{3(3x^2+2x+1)^2} \qquad (6)$$

Доволно е да докажеме дека

$$\frac{9x^4+2}{(3x^2+2x+1)^2} \le \frac{11}{36} \quad \text{ако} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le 1.$$

Ова неравенство е еквивалентно со

$$(225x^3+93x^2-17x-61)(x-1) \le 0,$$

кое е исполнето бидејќи $x-1 \le 0$ и

$$225x^3+93x^2-17x-61=51x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+174x^3+93x^2-61 \ge \frac{174}{3\sqrt{3}}+\frac{93}{3}-61=\frac{174-90\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}>0$$

Да забележиме дека равенство е исполнето само ако $x=1$, $b=c=\frac{1}{\sqrt{3}(3x^2+2x+1)}$ и повторно добиваме дека

$$a=\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad b=c=\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

Природно е да се запрашаме што е решение на малфатиевиот проблем за квадрат и три кружници. Досега не е познато решение на овој проблем.

5. ЗАДАЧИ

Проблем 5. Да се најдат две кружници со радиуси a и b кои не се сечат и се во внатрешноста на рамностран триаголник така што

а) ab б) a^3+b^3

е максимално.

Проблем 6. Во внатрешноста на квадрат да се најдат две кружници со радиуси a и b кои не се сечат така што

а) ab б) a^3+b^3

Проблем 7. Да се најде најмал квадрат кој содржи три кружници што не се сечат со радиуси 1, $\sqrt{2}$ и 2.

Проблем 8. Да се најде најмал квадрат кој содржи пет кружници со радиус еден кои не се сечат.

Проблем 9. Да се реши Малфатиевиот проблем за коцка и две топки.

Проблем 10. Да се најде најмала коцка кој содржи девет топки со радиус еден кои не се сечат.