III и IV година 2013 година

Тестот се работи за време од 1h и 15 min.

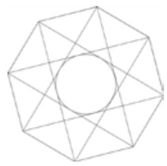
За неточен одговор на прашање се одзема една четвртина од бројот на поени со кое тоа прашање се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, така што вкупниот можен број на освоени поени е 150. Калкулатори не се дозволени.

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

1. Кој од следниве броеви е најголем?

$(A)\ 2013$ $(B)\ 2^{0+13}$ $(C)\ 20^{13}$ $(D)\ 201^{3}$ $(E)\ 20\cdot 13$

2. Правилниот осумаголник на сликата има страна еднаква на 10. Колку е радиусот на кружницата впишана во најмалиот осумаголник формиран од дијагоналите на почетниот осумаголник?



(A) 10 (B) 7,5 (C) 5 (D) 2,5 (E) 2

3. Една призма има вкупно 2013 ѕидови. Колку рабови има призмата?

(A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033

4. Трети корен од 3^{3^3} е еднаков на

$(A)\ 3^{3}$ $(B)\ 3^{3^3-1}$ $(C)\ 3^{2^3}$ $(D)\ 3^{3^2}$ $(E)\ \left(\sqrt{3}\right)^{3}$

5. 2013 година ја има особината: цифрите со кои е запишана годината се последователни броеви. Колку години поминале од последниот пат кога годината била запишана со број со истата особина?

(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

6. Нека f е линеарна функција за која што важи $f(2013)-f(2001)=100$. Колку е $f(2031)-f(2013)$?

(A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

7. При претпоставка дека $2<x<3$, колку од следниве тврдења се точни:

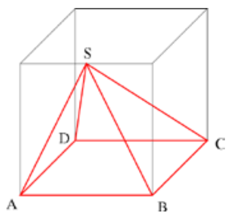
$4<x^2<9;\quad 4<2x<9;\quad 6<3x<9;\quad 0<x^2-2x<3.$

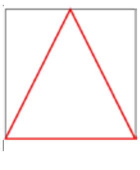
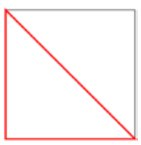
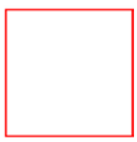
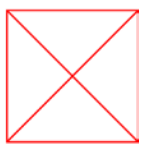
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Шест суперхерои заробиле 20 криминалци. Првиот суперхерој заробил 1 криминалец, вториот заробил 2 криминалци, а третиот заробил 3 криминалци. Четвртиот суперхерој заробил повеќе криминалци отколку било кој од останатите пет суперхерои. Кој е најмалиот број на криминалци кои ги фатил четвртиот суперхерој?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

9. Во коцката претставена на цртежот е сместена непроѕирна пирамида $ABCDS$ со основа $ABCD$, чијшто врв S лежи точно во средината на еден раб од коцката (види цртеж). Ја гледаме пирамидата од горе, од долу, од назад, од напред, од десно и од лево. Кој од овие погледи недостасува?



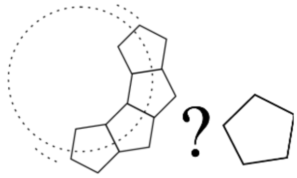
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Кога одредена тврда супстанција ќе се стопи, нејзиниот волумен се зголемува за $\frac{1}{12}$. За колку нејзиниот волумен ќе се намали кога таа ќе се стврдне повторно?

$(A)\ \frac{1}{10}$ $(B)\ \frac{1}{11}$ $(C)\ \frac{1}{12}$ $(D)\ \frac{1}{13}$ $(E)\ \frac{1}{14}$

<u>Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени</u>

11. Раде има идентични пластични делови во форма на правилен петаголник. Тој ги лепи раб со раб за да формира круг - како што е прикажано на цртежот. Колку парчиња употребил Раде за да го формира кругот?

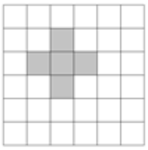
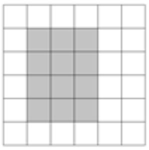
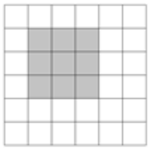
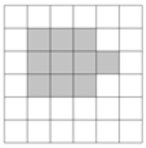
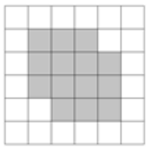


(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

12. Колку природни броеви n се такви што и бројот $\frac{n}{3}$ и бројот $3n$ се трицифрени броеви?

(A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

13. На под со квадратни плочки е ставен тепих во форма на круг. Сите плочки кои имаат повеќе од една заедничка точка со тепихот се обоени во сиво. Кој од следните обоени цртежи е невозможен?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. За функцијата f дефинирана на множеството цели броеви ја разгледуваме следната особина: „За било кој парен број x, $f(x)$ е парен број." Како би гласела негацијата на оваа особина?

(A) За било кој парен број x, $f(x)$ е непарен број.

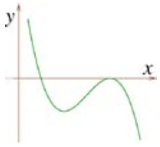
(B) За било кој непарен број x, $f(x)$ е парен број.

(C) За било кој непарен број x, $f(x)$ е непарен број.

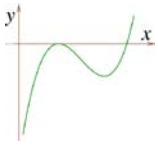
(D) Постои парен број x таков што $f(x)$ е непарен број.

(E) Постои непарен број x таков што $f(x)$ е непарен број.

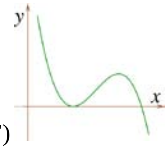
15. Дадена е функцијата $W(x)=(a-x)(b-x)^2$, каде што $a<b$. Нејзиниот график е прикажан со еден од следните цртежи. Со кој?



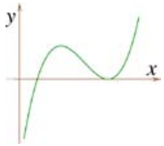
(A)



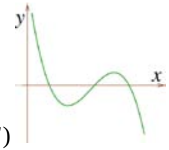
(B)



(C)



(D)

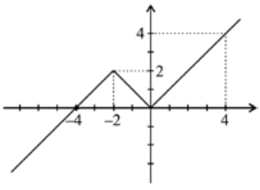


(E)

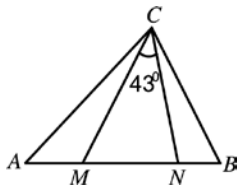
16. Да разгледаме правоаголник со една страна со должина 5. Правоаголникот може да се исече на квадрат и друг правоаголник, од кои едниот има плоштина 4. Колку такви правоаголници постојат?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

17. Владе нацртал график на функцијата $f:R\to R$, составен од две полуправи и една отсечка (види цртеж). Колку решенија има равенката $f(f(f(x)))=0$?



(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0



18. Во триаголникот ABC точките M и N кои лежат на страната AB се такви што $AN = AC$ и $BM = BC$. Ако $\measuredangle MCN = 43^\circ$, најди го $\measuredangle ACB$.

(A) 86° (B) 89° (C) 90° (D) 92° (E) 94°

19. Колку парови (x, y) од природни броеви ја задоволуваат равенката $x^2 y^3 = 6^{12}$?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) Друг број.

20. Во кутија има 900 карти нумерирани од 100 до 999. Било кои две карти се нумерирани со различни броеви. Бојан избира неколку карти и, на секоја од картите, ги собира цифрите кои се напишани на картата. Колку најмалку карти треба да избере, со цел да биде сигурен дека ќе има три карти со истата сума?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

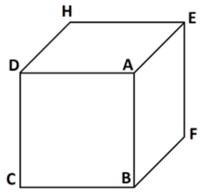
Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени

21. Колку е бројот на парови од цели броеви (x, y), за кои $x \le y$ и нивниот производ е еднаков на пет нивни збира?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

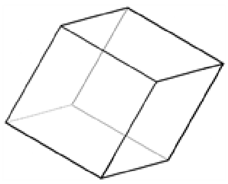
22. Нека $f : R \to R$ е функција со следниве особини: f е периодична со период 5 и рестрикцијата на f на $[-2,3)$ е $f(x) = x^2$. Колку е $f(2013)$?

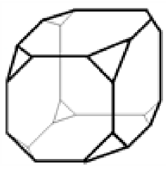
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9



23. Цврста коцка е пресечена со рамнина која што минува низ трите соседни темиња D, E и B. A Слично, коцката е пресечена со рамнини, такви да секоја рамнина минува низ три соседни темиња на сите седум останати темиња. Како ќе изгледа делот што го содржи центарот на коцката?


(A)


(B)


(C)


(D)

(E) Центарот на коцката припаѓа на неколку делови.

24. Колку решенија (x, y) има равенката $x^2 + y^2 = |x| + |y|$, каде што x и y се реални броеви?

(A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) Бесконечно многу

25. Нека $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ е функцијата дефинирана со $f(n) = \frac{n}{2}$, ако n е парен, и $f(n) = \frac{n-1}{2}$, ако n е непарен. За k природен број со $f^k(x)$ го означуваме бројот претставен со изразот $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, каде што симболот f се појавува k пати. Бројот на решенија на равенката $f^{2013}(n) = 1$ е

(A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} (D) 2^{2013} (E) бесконечно.

26. Во рамнина се повлечени прави. Правата a се сече со точно три други прави, а правата b се сече со точно четири други прави. Правата c се сече со точно n други прави и притоа $n \ne 3$ и $n \ne 4$ Одреди го бројот на прави нацртани во рамнината.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) Друг број.

27. Збирот на првите n природни броеви е трицифрен број на кој сите цифри му се исти. Кој е збирот на цифрите на n ?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

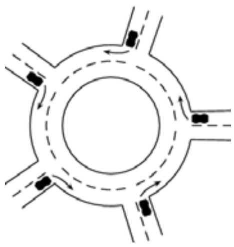
28. На островите на Витезите и Рицарите живееле само два типа на луѓе: Витези (кои секогаш ја зборуваат вистината) и Рицари (кои секогаш лажат). Сретнав двајца луѓе кои живеат таму и го прашав повисокиот човек дали се и двајцата Витези? Тој ми одговори, но не можев да откријам што се, па го прашав пониският човек дали повисокиот е Витез? Откако тој ми одговори, јас знаев што се. Што биле луѓето Витези или Рицари?

(A) Двајцата биле Витези
(B) Двајцата биле Рицари
(C) Повисокиот бил Витез, а пониският Рицар
(D) Повисокиот бил Рицар, а пониският Витез
(E) Не се дадени доволен број на информации

29. Јулија напишала алгоритам со цел да конструира низа од броеви $a_1 = 1,\ a_{m+n} = a_m + a_n + mn,$ каде што m и n се природни броеви. Најди ја вредноста на a_{100} .

(A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050

30. Во кружниот тек прикажан на цртежот влегуваат пет автомобили истовремено и секој влегува од различнен правец. Секој автомобил вози помалку од еден круг и секој автомобил го напушта кружниот тек од различен излез. Колку вакви различни комбинации постојат за автомобилите што излегуваат од кружниот тек?



(A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120