Ристо Малчески
Алекса Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С5
(збирка задачи за III година, прв дел)

Скопје, 2019

Рецензенти
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент С5 : (збирка задачи за III година, прв дел) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2019. - 326 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Даниел Велинов, Самоил Малчески, Сања Костадинова. - Библиографија: стр. 322-326

ISBN 978-608-4904-99-1
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Велинов, Даниел [автор] 4. Малчески, Самоил [автор] 5. Костадинова, Сања [автор]
а) Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111695114

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С5 е продолжение на книгите Математички талент С1 – С4 и истата е наменета за талентираните ученици по математика од трета година од средното образование. Книгата, всушност, е првиот дел од збирката задачи за трета година и во овој дел се содржани 613 решени задачи и во три одделни дела се обработени Експоненцијални и логаритамски функции, равенки и неравенки, елчементи од теоријата на броеви и елементи оид рамнинска тригонометрија. Вториот дел всушност е продсолжение на соодветните делови од книгите Математички талент С1 и С2 и во него се обработени Ојлеровата функција, теоремата на Охлер, теоремата на Вилсон и се разгледани дополнителни задачи од деливост, конфжгруенции, малата теорема на Ферма и диофантовите равенки.

Како и во книгите *Математички талент* С1 – С4 и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите повторно не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од тригонометријата се поделени во седум одделни целини, при што посебно внимание е посветено на примената на тригонометријата во решавање на триаголник, четириаголник, многуаголник и кружница и круг.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Зоран Мисајлески и д-р Томи Димовски, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторите

ноември, 2019 г.

II ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ ФУНКЦИИ, РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Позитивните реални броеви a и b го исполнуваат равенството
$$\log(1+a^2)-\log a-2\log 2=1-\log(100+b^2)+\log b .$$
Пресметај го збирот $a+b$.

Решение. Имаме:
$$\log(1+a^2)+\log(100+b^2)=\log a+\log 4+\log 10+\log b$$
$$\log[(1+a^2)(100+b^2)]=\log 40ab$$
Бидејќи $y=\log x$ е монотона функција, од последното равенство следува равенството
$$(1+a^2)(100+b^2)=40ab . \qquad (*)$$
Бидејќи $a,b\in\mathbb{R}^+$, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува имаме $1+a^2\geq 2a$ и $100+b^2\geq 20b$, при што и во двата случаја равенство важи ако и само ако $a=1$ и $b=10$. Значи, ако $a\neq 1$ или $b\neq 10$, тогаш
$$(1+a^2)(100+b^2)>40ab ,$$
што противречи на (*).

Сега, $a=1, b=10$ и $a+b=1+10=11$.

2. Во децималниот запис на бројот 2^{2017} има m цифри, а на бројот 5^{2017} има n цифри. Определи го збирот $m+n$.

Решение. Ако во децималниот запис на бројот x има m цифри, тогаш точни се неравенствата
$$m-1<\log x<m .$$
Значи,
$$m-1<\log 2^{2017}<m \text{ и } n-1<\log 5^{2017}<n .$$
Со собирање на овие неравенства, добиваме
$$m+n-2<\log 2^{2017}+\log 5^{2017}<m+n \text{, т.е. } m+n-2<2017<m+n ,$$
од каде заклучуваме дека $2017=m+n-1$, односно $m+n=2018$.

3. Најди природен број n, за кој n^{11} има 22 цифри, а n^{12} има 23 цифри.

Решение. Најмалиот природен број со 22 цифри е бројот 10^{21}; затоа имаме
$$10^{21}\leq n^{11}<10^{22} \qquad \text{и} \qquad 10^{22}\leq n^{12}<10^{23}.$$
Значи,
$$10^{21/11}\leq n<10^{2} \qquad \text{и} \qquad 10^{22/11}\leq n<10^{23/12} ,$$
т.е.

$$x_1 = 10^{21/11} \le n < 10^{23/12} = x_2.$$

Со логаритмирање со основа 10, од

$$\lg x_1 = \frac{21}{11} = 1,(90) > 190849 = \lg 81,$$

следува $x_1 > 81$, т.е. $n \ge 82$, а од

$$\lg x_2 = \frac{23}{12} = 1,91(6) < 1,91908 = \lg 83,$$

следува $x_2 < 83$, т.е. $n \le 82$. Според тоа, $n = 82$.

4. Реалните броеви a,b,c и x се такви што $\log_a x = p$, $\log_b x = q$ и $\log_{abc} x = r$. Пресметај ја вредноста $\log_c x$.

Решение. Бидејќи $\log_s m = n$ аско и само ако $s^n = m$, од дадените равенства следува $x = a^p$, $x = b^q$, $x = (abc)^r$. Од последните три равенства имаме $a = x^{\frac{1}{p}}$, $b = x^{\frac{1}{q}}$ и $abc = x^{\frac{1}{r}}$. Според тоа, $x^{\frac{1}{p}} x^{\frac{1}{q}} c = x^{\frac{1}{r}}$, т.е.

$c = x^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = x^{\frac{pq-r(p+q)}{pqr}}$.

Последното равенство го логаритмираме со основа c и последователно добиваме

$$\log_c c = \log_c x^{\frac{pq-r(p+q)}{pqr}},$$

$$1 = \frac{pq-r(p+q)}{pqr} \log_c x,$$

$$\log_c x = \frac{pqr}{pq-r(p+q)}.$$

5. Определи ги $\log_a b, \log_{ab} b, \log_{ab^2} b$ и $\log_{ab^3} b$, ако

$$\log_a b - \log_{ab} b = \log_{ab^2} b - \log_{ab^3} b.$$

Решение. За $b = 1$, равенството е точно за било кое a, затоа што сите логаритми се еднакви на нула. За $b > 0, b \ne 1$, дадениот услов може да го запишеме во обликот $\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{\log_b a+1} = \frac{1}{\log_b a+2} - \frac{1}{\log_b a+3}$. Нека $\log_b a = x$. Тогаш од последното равенство следува $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$, од каде наоѓаме $x = -\frac{3}{2}$. Значи, бараните вредности се

$$\log_a b = -\frac{2}{3}, \log_{ab} b = -2, \log_{ab^2} b = 2, \log_{ab^3} b = \frac{2}{3}.$$

6. Нека $x,a,b,c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ и $b^2 = ac$. Докажи, дека $\frac{\log_a x}{\log_c x} = \frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x}$.

Решение. Користејќи ги својствата на логаритмите, изразот на десната страна го трансформираме на следниот начин:

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\frac{1}{\log_x a} - \frac{1}{\log_x b}}{\frac{1}{\log_x b} - \frac{1}{\log_x c}} = \frac{\frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x a \cdot \log_x b}}{\frac{\log_x c - \log_x b}{\log_x c \cdot \log_x b}} = \frac{\log_x c}{\log_x a} \frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x c - \log_x b} = \frac{\log_a x}{\log_c x} \frac{\log_x \frac{b}{a}}{\log_x \frac{c}{b}}.$$

Од условот $b^2 = ac$, забележуваме дека $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, па и $\log_x \frac{b}{a} = \log_x \frac{c}{b}$. Конечно, по кратењето добиваме

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

7. Докажи дека

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

Решение. Користејќи ги својствата на логаритамската функција имаме

$$\begin{aligned}\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N &= \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} c} \\ &= \frac{\log_{abc}^2 N \cdot (\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c)}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} = \frac{\log_{abc}^2 N \cdot 1}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} \\ &= \frac{\log_{abc}^2 N}{\frac{\log_{abc} N}{\log_a N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_b N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_c N}} = \frac{\log_a N \cdot \log_a N \cdot \log_a N}{\log_{abc} N}.\end{aligned}$$

8. Определи ги сите цели броеви x, за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е исто така цел број.

Решение. Целите броеви x за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е определен се

$$x \in (-\infty, 2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}, +\infty) \cap \mathbb{Z}.$$

Нека n е цел број за кој постои $x \in \mathbb{Z}$ таков што

$$\log_2(x^2 - 4x - 1) = n.$$

Тогаш

$$x^2 - 4x - (1 + 2^n) = 0, \tag{1}$$

од каде добиваме $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5 + 2^n}$, односно

$$x = 2 + \sqrt{5 + 2^n} \quad \text{или} \quad x = 2 - \sqrt{5 + 2^n}.$$

Бидејќи $x \in \mathbb{Z}$, постои $k \in \mathbb{Z}$ така што $5 + 2^n = k^2$. Значи, доволно е да ги определиме сите n за кои $5 + 2^n$ е точен квадрат. Ќе разгледаме неколку случаи.

а) Ако $n < 0$, тогаш $2^n = k^2 - 5$, односно $1 = 2^{-n}(k^2 - 5)$. Но, $2^{-n}(k^2 - 5)$ е парен број, па според тоа последното равенство не е можно.

б) Ако $n = 0$, тогаш $k^2 = 6$, т.е. $5 + 2^n$ не е точен квадрат. Значи и овој случај не е можен.

в) Ако $n > 0$, тогаш $5 + 2^n$ е непарен, па затоа $k = 2m - 1$ за некој $m \in \mathbb{Z}$. Сега лесно се добива дека

$$m(m - 1) = 2^{n-2} + 1. \tag{2}$$

Ако $n = 1$, тогаш $2^{n-2} + 1$ е рационален број и равенството (2) не е можно за ниту еден $m \in \mathbb{Z}$.

Ако $n > 2$, тогаш $2^{n-2} + 1$ е непарен број а $m(m - 1)$ е парен, па равенство меѓу нив не е можно.

Ако $n=2$, тогаш $5+2^2=9=3^2$. Со замена во (2) ја добиваме квадратната равенка

$$x^2-4x+5=0$$

чии решенија се $x=-1$ и $x=5$. Не е тешко да се провери дека за најдените вредности за x, $\log_2(x^2-4x-1)$ е цел број и во двата случаи и тој е еднаков на 2.

9. Докажи дека за позитивните броеви a,b и c такви што $a^2+b^2=c^2$, $c-b\neq 1$ и $c+b\neq 1$ важи $\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=2\log_{b+c}a\cdot\log_{c-b}a$.

Решение. Заради $c^2=a^2+b^2>b^2$ и позитивноста на броевите a,b и c добиваме $c>b$. Значи $c-b>0$, $c-b\neq 1$ и $c+b\neq 1$, па постојат $\log_{c-b}a$ и $\log_{c+b}a$. Со логаритмирање со основа a на равенството $a^2=c^2-b^2$ добиваме

$$\log_a a^2=\log_a(c^2-b^2),$$

односно

$$2=\log_a(c-b)+\log_a(c+b) \qquad (1)$$

Тогаш

$$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=\frac{1}{\log_a(b+c)}+\frac{1}{\log_a(c-b)}=\frac{\log_a(c+b)+\log_a(c-b)}{\log_a(b+c)\cdot\log_a(c-b)}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{2}{\log_a(b+c)\cdot\log_a(c-b)}=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a.$$

.

11. Пресметај ја вредноста на изразот: $-\log_3\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{....\sqrt[3]{3}}}}_{n-\text{пати }\sqrt[3]{\ }}$.

Решение. Изразот $\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{....\sqrt[3]{3}}}}_{n-\text{пати }\sqrt[3]{\ }}$ ќе го запишеме во видот

$$\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{....\sqrt[3]{3}}}}_{n-\text{пати }\sqrt[3]{\ }}=\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{....\sqrt[3]{3^{\frac{1}{3}}}}}}_{(n-1)-\text{пати }\sqrt[3]{\ }}=\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{....\sqrt[3]{3^{\frac{1}{3^2}}}}}}_{(n-2)-\text{пати }\sqrt[3]{\ }}=...=\sqrt[3]{3^{\frac{1}{3^{n-1}}}}=3^{\frac{1}{3^n}}=3^{3^{-n}}.$$

Сега, од својствата на логаритмите добиваме

$$-\log_3\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{....\sqrt[3]{3}}}}_{n-\text{пати }\sqrt[3]{\ }}=-\log_3\log_3 3^{3^{-n}}=-\log(3^{-n}\log_3 3)=-\log 3^{-n}=-(-n)=n.$$

12. За кој природен број n е исполнето равенството

$$\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[n]{17\sqrt{5}-38}=\sqrt{20}.$$

Решение. Бидејќи

$$\frac{1}{17\sqrt{5}+38}=\frac{1}{17\sqrt{5}+38}\cdot\frac{17\sqrt{5}-38}{17\sqrt{5}-38}=\frac{17\sqrt{5}-38}{1445-1444}=17\sqrt{5}-38,$$

па со смената $x=\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}$ добиваме $x+\frac{1}{x}=\sqrt{20}$, т.е. $x^2-\sqrt{20}x+1=0$, а оттука $x_{1,2}=\sqrt{5}\pm 2$. Понатаму, од $17\sqrt{5}+38>1$ следува $x=\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}>1$, па затоа $x=\sqrt{5}+2$, т.е. $x\neq\sqrt{5}-2$.

За $x=\sqrt{5}+2$, имаме:

$$(\sqrt{5}+2)^3=5\sqrt{5}+3\cdot 5\cdot 2+3\cdot\sqrt{5}\cdot 4+8=17\sqrt{5}+38$$

па од $(\sqrt{5}+2)^3=(\sqrt{5}+2)^n$ следува $n=3$.

13. За реалниот број $a>0$ определи ја вредноста на збирот

$$S\equiv\log_2 a\cdot\log_4 a+\log_4 a\cdot\log_8 a+\log_{2^3} a\cdot\log_{2^4} a+\ldots+\log_{2^{n-1}} a\cdot\log_{2^n} a,$$

каде $n\in\mathbb{N}$.

Решение. За секој $k=1,2,\ldots,n$, од својствата на логаритмите имаме

$$\log_{2^k} a=\frac{\log_a a}{\log_a 2^k}=\frac{1}{k\log_a 2}=\frac{1}{k}\log_2 a.$$

Според тоа,

$$\log_{2^{k-1}} a\log_{2^k} a=\frac{1}{k-1}\frac{1}{k}\log_2 a\log_2 a=\frac{1}{(k-1)k}\log_2^2 a,\ k=2,3,\ldots,n,$$

од каде добиваме

$$S\equiv\frac{1}{1\cdot 2}\log_2^2 a+\frac{1}{2\cdot 3}\log_2^2 a+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\log_2^2 a$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}\right)\log_2^2 a.$$

Заради равенствата

$$\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\ k=2,3,4,\ldots,n,$$

имаме

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

$$=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

Ако замениме во последниот израз за S, добиваме $S\equiv\frac{n-1}{n}\log_2^2 a$.

14. Докажи дека

$$\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=\frac{n-1}{2}(\log_x a)^2.$$

Решение. Од $\log_x a^k=k\log_x a$ следува

$$\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=$$

$$=\frac{1}{\log_x a\cdot 2\log_x a}+\frac{1}{2\log_x a\cdot 3\log_x a}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\log_x a\cdot n\log_x a}$$

$$=\frac{1}{(\log_x a)^2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$$

$$=(\log_x a)^2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{2}(\log_x a)^2,$$

што и требаше да докажеме.

15. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$ важи равенството

$$[\log_2 n]+[\log_3 n]+...+[\log_n n]=[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+...+[\sqrt[n]{n}].$$

Решение. Прво да забележиме дека

$$[\log_m n]=k \iff k \leq \log_m n < k+1 \iff \tfrac{1}{k+1} < \log_n m \leq \tfrac{1}{k} \iff n^{\frac{1}{k+1}} < m \leq n^{\frac{1}{k}}.$$

За $m \in \{2,3,...,n\}$ изразот $[\log_m n]$ прима вредности од 1 до $[\log_2 n]$. Според тоа,

$$\sum_{m=2}^{n}[\log_m n]=\sum_{k=1}^{[\log_2 n]} k([n^{\frac{1}{k}}]-[n^{\frac{1}{k+1}}]).$$

Меѓутоа, бидејќи за $k > \log_2 n$, важи $[n^{\frac{1}{k}}]=[n^{\frac{1}{k+1}}]=1$ добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{n}[\log_m n]&=\sum_{k=1}^{[\log_2 n]} k([n^{\frac{1}{k}}]-[n^{\frac{1}{k+1}}])\\ &=\sum_{k=2}^{n}[n^{\frac{1}{k}}]+[n^{1}]-n[n^{\frac{1}{n+1}}]\\ &=\sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}].\end{aligned}$$

16. Определи го збирот

$$\frac{2}{\log n}\sum_{d\in A}\log d$$

каде $n>1$ и $A=\{d \mid d \in \mathbb{N}, d \mid n\}$.

Решение. Нека $d_o, d_1, d_2, ..., d_m$ се сите различни делители на бројот n, при што

$$1=d_0<d_1<d_2<...<d_m=n$$

Ако бројот $m=2l$, т.е. бројот на делители на бројот n е непарен број, тогаш исполнети се равенствата

$$d_0d_{2l}=d_1d_{2l-1}=d_2d_{2l-2}=....=d_l^2=n$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\log n}\sum_{d\in A}\log d&=\frac{2}{\log n}\sum_{k=0}^{2l}\log d_k=\frac{2}{\log n}(\log d_0+\log d_1+...+\log d_{2l-2}+\log d_{2l-1}+\log d_l)\\ &=\frac{2}{\log n}(\log d_0+\log d_{2l}+\log d_1+\log d_{2l-1}+...+\log d_{l-1}+\log d_{l+1}+\log d_l)\\ &=\frac{2}{\log n}(\log d_0d_{2l}+\log d_1d_{2l-1}+...+\log d_{l-1}d_{l+1}+\log d_l)\\ &=\frac{2}{\log n}(\underbrace{\log n+\log n+...+\log n}_{l}+\log d_l)=\frac{2l\log n}{\log n}+\frac{2\log d_l}{\log n}=2l+1\end{aligned}$$

Ако $m=2l+1$, т.е. бројот на делители на бројот n е парен број тогаш исполнети се равенствата

$$d_0d_{2l}=d_1d_{2l-1}=d_2d_{2l-2}=....=d_ld_{l+3}=d_{l+1}d_{l+2}=n.$$

Според тоа

$$\frac{2}{\log n}\sum_{k=0}^{2l+1}\log d_k = \frac{2}{\log n}(\log d_0 + \log d_{2l+1} + \log d_1 + \log d_{2l} + ... + \log d_{l+1} + \log d_{l+2})$$

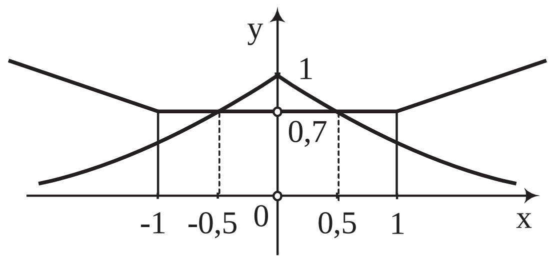
$$= \frac{2}{\log n}(\log d_0 d_{2l+1} + \log d_1 d_{2l} + ... + \log d_l d_{l+3} + \log d_{l+1} d_{l+2})$$

$$= \frac{2}{\log n}(\log n + \log n + ... + \log n) = 2(l+2).$$

2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ И СИСТЕМИ РАВЕНКИ

1. Во множеството реални броеви да се реши равенката

$$2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|).$$



Решение. Ќе ги разгледаме графиците на функциите

$y = 2^{-x}$ и $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|)$.

Бидејќи

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

и

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases},$$

добиваме

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{2}}, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in [-1, 1] \\ \frac{x}{\sqrt{2}}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Од друга страна

$$y = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 2^{-x}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Случај 1. Ако $x < -1$, тогаш $2^{-|x|} < 2^{-1} < \frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{x}{\sqrt{2}}$. Според тоа, за $x < -1$ равенката нема решение.

Случај 2. Ако $x > 1$, тогаш $2^{-|x|} = 2^{-x} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{x}{\sqrt{2}}$. Според тоа, и за $x > 1$ равенката нема решение.

Случај 3. Ако $x \in [-1, 1]$ равенката го добива обликот $2^{-|x|} = 2^{-\frac{1}{2}}$, чии решенија се $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

2. Да се реши равенката $(x^2+x+2)^{x^2+x+1}=9$.

Решение. Бидејќи $x^2+x+2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>1$ за секој реален број x, добиваме дека дефиниционата област на дадената равенка е множеството реални броеви.

Нека $f(x)=x^{x-1}$, $g(x)=x^2+x+2$ и $h(x)=3$. Тогаш дадената равенка можеме да ја запишеме во облик

$$f(g(x))=f(h(x)) \tag{1}$$

Понатаму нека $1<x_1<x_2$ тогаш имаме

$$f(x_1)=x_1^{x_1-1}<x_1^{x_2-1}<x_2^{x_2-1}=f(x_2),$$

па следува дека функцијата f е растечка на множеството вредности што ги примаат функциите $g(x)$ и $h(x)$. Според ова и (1) мора да важи $g(x)=h(x)$ од каде добиваме $x^2+x+2=3$ т.е. $x^2+x-1=0$ односно ги имаме решенијата $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

3. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$$

Решение. Нека $2^x=a$ и $3^x=b$. Равенката се трансформира во

$$1+a^2+b^2-a-b-ab=0,$$

која е еквивалентна со равенката

$$(1-a)^2+(a-b)^2+(b-1)^2=0.$$

Од последната равенка следува $a=b=1$, од каде добиваме $x=0$.

4. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$4^x+9^x=2\cdot 6^x.$$

Решение. Имаме $4^x+9^x=2\cdot 6^x \quad\Leftrightarrow\quad 2^{2x}+3^{2x}=2\cdot 2^x\cdot 3^x$. Последната равенка ќе ја поделиме со $2^x\cdot 3^x$ и добиваме $(\frac{2}{3})^x+(\frac{3}{2})^x=2$. Сега воведуваме смена $(\frac{2}{3})^x=t$ и добиваме $t+\frac{1}{t}=2$, каде $t\neq 0$. Понатаму добиваме $t^2-2t+1=0$, односно $(t-1)^2=0$. Значи, $t=1$, од каде за x добиваме $(\frac{2}{3})^x=1=(\frac{2}{3})^0$, односно $x=0$.

5. Реши ја равенката $9^x-6^x=4^{x+\frac{1}{2}}$.
Решение. Имаме:

$$9^x-6^x=4^{x+\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad 9^x-6^x=2\cdot 4^x \quad\Leftrightarrow\quad (\tfrac{3}{2})^x-1=2\cdot(\tfrac{2}{3})^x$$
$$\Leftrightarrow\quad (\tfrac{3}{2})^{2x}-(\tfrac{3}{2})^x-2=0.$$

Со смената $t=(\frac{3}{2})^x$, ја добиваме квадратната равенка $t^2-t-2=0$, чии што решенија се $t_1=-1$ и $t_2=2$. Бидејќи $t>0$, добиваме $t=2$, од каде $x=\log_{3/2}2$.

6. Реши ја равенката

$$(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}})^x+(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}})^x=2^{\frac{x+4}{4}}$$

Решение. Нека

$$A=(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}})^{\frac{x}{2}} \text{ и } B=(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}})^{\frac{x}{2}}.$$

Тогаш $\frac{A+B}{2}=2^{\frac{x}{4}}$ и $AB=2^{\frac{x}{2}}$. Освен тоа $A>0$, $B>0$, така од $\frac{A+B}{2}=\sqrt{AB}$ следува $A=B$. Но ова е еквивалентно со $x=0$ или $\sqrt{x^2-5x+6}=0$, па затоа решенијата се 0, 2 и 3.

7. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+\frac{1}{(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x}-6=0$$

Решение. Воведуваме смена $y=(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x$ и равенката го добива обликот

$$y+\frac{1}{y}-6=0 \text{, т.е. } y^2-6y+1=0.$$

Решенија на последната квадратна равенка се $y_1=3+\sqrt{8}$ и $y_2=3-\sqrt{8}$. Не е тешко да се провери дека $y_1=\frac{1}{y_2}$. Според тоа, важи

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=3+\sqrt{8} \text{, т.е. } x=2.$$

Од друга страна,

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=3-\sqrt{8}=\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=(3+\sqrt{8})^{-1} \text{, т.е. } x=-2.$$

Не е тешко да се провери дека $x_1=2$ и $x_2=-2$ се решенија на почетната равенка.

8. Во множеството реални броеви реши ја равенката:

$$3^{3+x}+3^{3-x}+3^{4+\frac{x}{3}}+3^{4-\frac{x}{3}}=1000.$$

Решение. Дадената равенка ќе ја трансформираме во облик

$$27(3^x+\frac{1}{3^x})+81(3^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3^{\frac{x}{3}}})=1000,$$

а потоа со смената $3^x=y^3$, во обликот

$$27(y^3+\frac{1}{y^3})+81(y+\frac{1}{y})=1000.$$

Сега воведуваме нови смени, $y+\frac{1}{y}=z$; бидејќи

$$y^3+\frac{1}{y^3}=(y+\frac{1}{y})^3-3(y+\frac{1}{y})=z^3-3z,$$

равенката ја трансформираме во обликот

$$27(z^3-3z)+81z=1000,$$

од каде што наоѓаме $z=\frac{10}{3}$. Враќајќи се на старите смени добиваме дека решенијата на почетната равенка се $x_1=3$ и $x_2=-3$.

9. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^3}.$$

Решение. Ако $x<0$, десната страна на равенката е помала од 3, а левата поголема од 256^4, па затоа равенката нема решение $x_0<0$.

Нека $x\geq 0$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, применето два пати, добиваме

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=2^{x^5}+2^{2x^4}+2^{32}\geq 3\cdot 2^{\frac{x^5+2x^4+32}{3}}$$

$$\geq 3\cdot 2^{\sqrt[3]{x^5\cdot 2x^4\cdot 32}}=3\cdot 2^{4x^3}=3\cdot 16^{x^3}.$$

Во последните неравенства знак за равенство важи ако и само ако $x^5=2x^4=32$, т.е ако и само ако $x=2$. Значи, $x=2$ е единствено решение на дадената равенка.

10. Да се реши равенката $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}=2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

Решение. Ќе воведеме смена $x=t^{12}$, $t\geq 0$, при што $\sqrt[12]{x}=t$, $\sqrt[4]{x}=t^3$, $\sqrt[6]{x}=t^2$. Притоа добиваме:

$$2^t+2^{t^3}=2\cdot 2^{t^2}.$$

Бидејќи 2^t и 2^{t^3}, и t и t^3 се ненегативни реални броеви, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$2^t+2^{t^3}\geq 2\sqrt{2^t\cdot 2^{t^3}}=2\cdot 2^{\frac{t+t^3}{2}}\geq 2\cdot 2^{t^2}.$$

Равенство е исполнето ако и само ако $2^t=2^{t^3}$ и $t=t^3$. Во двата случаи добиваме решенија се $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=-1$. Јасно е дека t_3 не може да биде решение.

Сега, решенија на почетната равенка се $x_1=0$ и $x_2=1$.

11. Реши ја равенката

$$20^{x^2}\cdot 10^x=2.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$2^{x^2-1}\cdot 10^{x^2+x}=1$$

$$(2^{x-1}\cdot 10^x)^{x+1}=1.$$

Имаме две можности $x+1=0$ или $2^{x-1}\cdot 10^x=1$. Во првиот случај го добиваме решението $x_1=-1$, а во вториот случај добиваме $20^x=2$, од каде го добиваме решението $x_2=\log_{20}2$.

12. Реши ја равенката $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=5$.

Решение. Ако равенката ја квадрираме, добиваме

$$(x^{\log_{x^2}(x^2-1)})^2=5^2,$$

т.е. $x^{2\log_{x^2}(x^2-1)}=25$. Од равенството $(x^2)^{\log_{x^2}(x^2-1)}=25$ и бидејќи $a^{\log_a b}=b$, добиваме $x^2-1=25$. Решенија на квадратната равенка се $x_1=\sqrt{26}$ и $x_2=-\sqrt{26}$. Очигледно е дека единствено решение е $x=\sqrt{26}$.

13. Реши ја равенката

$$2^{3^{4^x}}=4^{3^{2^x}}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна последователно со равенките

$$2^{3^{4^x}}=(2^2)^{3^{2^x}}; \qquad 3^{4^x}=2\cdot 3^{2^x}; \qquad 3^{4^x-2^x}=2 \qquad \text{и} \qquad 4^x-2^x=\log_3 2.$$

Воведуваме смена $2^x=y$, $y>0$ и означуваме $\log_2 3=a$, $a>0$, со што ја добиваме равенката $y^2-y-a=0$, чии решенија се $y_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$. Бидејќи $y>0$, задоволува само решението $y=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Од $2^x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, добиваме

$$x=\log_2\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\ a=\log_2 3.$$

14. Определи ги позитивни решенија на равенката

$$x^x+x^{1-x}=x+1.$$

Решение. Бидејќи $x>0$, дадената равека последователно можеме да ја запишеме во облик

$$x^{2x}+x=x^{x+1}+x^x,$$
$$x^{2x}-x^x-(x^{x+1}-x)=0,$$
$$x^x(x^x-1)-x(x^x-1)=0$$
$$(x^x-1)(x^x-x)=0,$$
$$x(x^x-1)(x^{x-1}-1)=0.$$

Бидејќи $x>0$, решение на последната равенка е унија од решенијата на равенките

$$x^x-1=0 \tag{1}$$

и

$$x^{x-1}-1=0. \tag{2}$$

Решение на (1) очигледно е $x=1$. Ако $x>1$, тогаш $x^x>1^x=1$, а ако $x<1$, тогаш $x^x<1^x=1$. Значи, единствено решение на равенката (1) е $x=1$.

Равенката (2) ќе ја запишеме во облик $x^{x-1}=1$. Бидејќи $x>0$, ако логаритмираме ќе добиеме $\log x^{x-1}=\log 1$, т.е. $(x-1)\log x=0$, од каде добиваме $x=1$.

Според тоа, единствено решение на почетната равенка е $x=1$.

15. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$25^x-(a+1)5^x-6a^2+3a=0$$

има единствено решение.

Решение. Воведуваме смена $t=5^x>0$ и равенката ја запишуваме во обликот $t^2-(a+1)t-6a^2+3a=0$. Решенијата на последната равенка се $t_1=3a$ и $t_2=1-2a$. Почетната равенка има единствено решение ако е исполнет еден од условите $t_1\le 0<t_2$, $t_2\le 0<t_1$ или $t_1=t_2>0$. Од првиот услов добиваме $a\le 0$, од вториот добиваме $a\ge\frac{1}{2}$ и од третиот услов добиваме $a=\frac{1}{5}$. Според тоа, бараните вредности се $a\in(-\infty,0]\cup\{\frac{1}{5}\}\cup[\frac{1}{2},+\infty)$.

16. Определи ги сите сите вредности на реалниот параметер p така што равенката

$$(p-1)4^x-4\cdot 2^x+(p+2)=0$$

има барем едно решение.

Решение. Равенката $2^x=a$ има решение ако и само ако е $a>0$. Ако вовееме смена $2^x=t$, тогаш дадената равенка се сведува на квадратна равенка

$$(p-1)t^2-4t+(p+2)=0\,.$$

Сега, почетната равенка има решение ако и само ако квадратната равенка има позитивно решение.

Ако $p=1$, квадратната равенка се сведува на линеарна равенка и нејзино решение е $t=\frac{3}{4}>0$. Ако $p\ne 1$ оваа равенка е квадратна и нејзината дискриминанта е $16-4(p-1)(p+2)=4(2-p)(p+3)$. За $p\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ оваа равенка нема решение.

Значи, останува да разгледаме кога $p\in[-3,2]$.

1° Ако $p\in(1,2]$, тогаш $p-1>0$, па квадратната равенка има барем едно позитивно решение ако и само ако $\frac{2+\sqrt{(2-p)(3+p)}}{p-1}>0$ кое е еквивалентно со

$$2+\sqrt{(2-p)(3+p)}>0$$

што е точно.

2° Ако е $p\in[-3,1)$, тогаш $p-1<0$, па квадратната равенка има барем едно решение ако и само ако $\frac{2-\sqrt{(2-p)(3+p)}}{p-1}>0$ кое е еквивалентно со

$$2-\sqrt{(2-p)(3+p)}<0\,.$$

Последното неравенство е точно ако и само ако $p\in(-2,1)$.

Конечно, почетната равенка има барем едно решение ако и само ако

$$p\in(-2,1)\cup\{1\}\cup(1,2]=(-2,2]\,.$$

17. Во множеството на реалните броеви реши ја равенката

$$\log_{1997}(\sqrt{1+x^2}+x)=\log_{1997}(\sqrt{1+x^2}-x)$$

Решение. Нека $x>0$. Тогаш $\sqrt{x^2+1}+x>1$, па затоа

$$\log(\sqrt{x^2+1}+x)>0\,.$$

Од друга страна $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}<1$, што значи $\log(\sqrt{x^2+1}-x)<0$. Според тоа, не постои реален број $x>0$, кој е решение на дадената равенка. Аналогно се покажува дека не постои реален број $x<0$ кој е решение на дадената равенка. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение на равенката е $x=0$.

18. Колку реални и различни решенија има равенката

$$\log_2(40-5x^2+x^2\cdot 2^x)=x+3\,?$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$40-5x^2+x^2\cdot 2^x=2^{x+3}$$

$$5(8-x^2)-2^x(8-x^2)=0$$

$$(8-x^2)(5-2^x)=0$$

Оттука:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}\,,\quad x_3=\log_2 5\,.$$

Бидејќи $-\sqrt{8}<0<\log_2 5<\frac{5}{2}<\sqrt{8},$ следува дека сите корени на равенката се различни, па заклучуваме дека дадената равенка има три различни и реални корени.

19. Реши ја равенката

$$\log_2(4^x+4)=x+\frac{1}{\log_{(2^{x+1}-3)}2}\,.$$

Решение. Користејќи ги особините на логаритамската функција

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\,,\ a=\log_b b^a \text{ и } \log_a(c\cdot d)=\log_a c+\log_a d\,,$$

дадената равенка ќе ја запишеме во облик:

$$\log_2(2^{2x}+4)=\log_2 2^x+\log_2(2^{x+1}-3)\ \Leftrightarrow\ \log_2(2^{2x}+4)=\log_2[2^x(2^{x+1}-3)]$$

Воведуваме смена $2^x=y$ и равенката го добива обликот

$$\log_2(y^2+4)=\log_2[y(2y-3)]\Rightarrow\ y^2+4=y(2y-3)\,.$$

Квадратната равенка $y^2-3y-4=0$ има решенија $y_1=-1$ и $y_2=4$. Равенката $2^x=-1$ нема решенија, а равенката $2^x=4$ има решение $x=2$. Со замена на $x=2$ во почетната равенкадобиваме дека $x=2$ е решение на почетната равенка.

20. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)\,.$$

Решение. Имаме:

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$$

$$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2 4+\log_2(3^{x-1}+1)\,,$$

$$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2 4(3^{x-1}+1)$$

$$9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)$$
$$3^{2x-2}+7=4\cdot 3^{x-1}+4 \quad /\cdot 9$$
$$3^{2x}-12\cdot 3^{x}+27=0$$
$$(3^{x})_{1/2}=6\pm\sqrt{36-27}=6\pm 3$$
$$3^{x}=3 \qquad \Rightarrow \qquad x=1$$
$$3^{x}=9 \qquad \Rightarrow \qquad x=2.$$

Следствено, решенија на дадената равенка се броевите 1 и 2.

21. Реши ја равенката

$$x^{\log_5 6}-5\cdot 6^{\log_5 \sqrt{x}}=6.$$

Решение. Равенката има смисла за $x>0$. Од $\log_6 x=\frac{\log_5 x}{\log_5 6}$ следува

$$\log_6 x\cdot\log_5 6=\log_5 x,$$

па затоа

$$x^{\log_5 6}=(6^{\log_6 x})^{\log_5 6}=6^{\log_6 x\cdot\log_5 6}=6^{\log_5 x}.$$

Понатаму,

$$6^{\log_5 \sqrt{x}}=6^{\frac{1}{2}\log_5 x}=(6^{\log_5 x})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6^{\log_5 x}}.$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$6^{\log_5 x}-5\cdot\sqrt{6^{\log_5 x}}-6=0,$$

од каде добиваме со смената $\sqrt{6^{\log_5 x}}=t>0$ ја добиваме равенката $t^2-5t-6=0$, чии решенија се $t_1=6$ и $t_1=-1$. Значи, $\sqrt{6^{\log_5 x}}=6$, па затоа $\log_5 x=2$, т.е. $x=25$.

22. Реши ја равенката

$$\tfrac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3-\log_4(x+6)^3.$$

Решение. Дадената равенка има смисла ако $x\neq-2,\ 4-x>0,\ x+6>0$, т.е. ако $x\in(-6,-2)\cup(-2,4)$. При овој услов дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$3\log_{\frac{1}{4}}|x+2|-3=3\log_{\frac{1}{4}}(4-x)+4\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$
$$\log_{\frac{1}{4}}4|x+2|=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6)$$
$$4|x+2|=(4-x)(x+6)$$

Ако $x\in(-6,-2)$, добиваме $-4(x+2)=(4-x)(x+6)$, од каде следува $x=1-\sqrt{33}$. Ако $x\in(-2,4)$, добиваме $4(x+2)=(4-x)(x+6)$, од каде следува $x=2$.

23. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_x 2-\log_4 x+\tfrac{7}{6}=0.$$

Решение. Дадената равенка е определена за $x>0$ и $x\neq 1$ и таа е еквивалентна со равенката $\log_x 2-\frac{1}{\log_x 2^2}+\frac{7}{6}=0$, т.е. со равенката $\log_x 2-\frac{1}{2\log_x 2}+\frac{7}{6}=0$.

Воведуваме смена $\log_x 2=t$, со што последната равенка се трансформира во равенката $6t^2+7t-3=0$, чии решенија $t_1=\frac{1}{3}$ и $t_2=-\frac{3}{2}$. Конечно, со замена во $\log_x 2=t$ добиваме $x=8$ и $x=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, и како 8 и $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ се позитивни броеви различни од 1 заклучуваме дека тие се решенија на почетната равенка.

24. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9.$$

Решение. Дефиниционата област на равенката е $x>0$ и $x\neq 1$. Логаритмираме со основа 3 и последователно ги добиваме еквивалентните равенки
$$\log_3(3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x})=\log_3 9 \Leftrightarrow \log_x 3+(\log_3 x)^2=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x}+(\log_3 x)^2=2.$$
Воведуваме смена $\log_3 x=u$, односно $x=3^u$, со што равенката го добива обликот
$$\frac{1}{u}+u^2-2=0 \Leftrightarrow u^3-2u+1=0 \Leftrightarrow (u-1)(u^2+u-1)=0.$$
Решенијата на оваа равенка се $u_1=1$ и $u_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, а решенијата на почетната равенка се $x_1=3$ и $x_{2,3}=3^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$, бидејќи x_1,x_2 и x_3 припаѓаат на дефиниционата област.

25. Реши ја равенката
$$2\log_6(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\log_4 x.$$

Решение. Дефиниционата област на равенката е $(0,+\infty)$. Значи решенијата на равенката мора да бидат во тој интервал. Дадената равенка ја трансформираме во видот $\log_6(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\frac{1}{2}\log_4 x$, односно $\log_6(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\log_4\sqrt{x}$. Да ставиме $y=\sqrt[4]{x}$. Добиваме $\log_6 y(y+1)=\log_4 y^2$. Означуваме $b=\log_4 y^2$. Тогаш
$$y^2=4^b \Leftrightarrow y^2=(2^b)^2 \Leftrightarrow (y-2^b)(y+2^b)=0.$$
Но $y=\sqrt[4]{x}>0$, па мора $y-2^b=0$, т.е. $y=2^b$. Сега почетната равенка го добива видот $\log_6 2^b(2^b+1)=b$, односно $2^b(2^b+1)=6^b$. Ако поделиме со 2^b добиваме
$$2^b+1=3^b \tag{1}$$
Ако $0\leq b<1$ имаме $3^b-2^b=2^b((\frac{3}{2})^b-1)<2^1(\frac{3}{2}-1)=1$, равенство не е можно.

Ако $b>1$, аналогно $3^b-2^b>1$.

Ако $b<0$, ставајќи $b=-a$ каде $a>0$, (1) преминува во $\frac{1}{2^a}+1=\frac{1}{3^a}$, односно $3^a+6^a=2^a$. Но $3^a+6^a>3^a>2^a$ за $a>0$, па равенството не е можно.

Останува $b=1$, т.е. $\log_6 y(y+1)=1$. Оттука $y(y+1)=6$ или $y^2+y-6=0$. Заради $y>0$ добиваме $y=2$. Бидејќи $x=y^4$ следува $x=16$.

26. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_a x-\log_{a^2} x+\log_{a^4} x=\tfrac{3}{2}.$$

Решение. *Прв начин.* Ако го искористиме равенството $\log_A B=\frac{\lg B}{\lg A}$, добиваме

$$\log_a x=\frac{\lg x}{\lg a}=\frac{4\lg x}{4\lg a}=\frac{\lg x^4}{\lg a^4}=\log_{a^4} x^4 \text{ и } \log_{a^2} x=\frac{\lg x}{\lg a^2}=\frac{2\lg x}{2\lg a^2}=\frac{\lg x^2}{\lg a^4}=\log_{a^4} x^2.$$

Според тоа, од дадената равенка последователно добиваме

$$\log_{a^4} x^4-\log_{a^4} x^2+\log_{a^4} x=\tfrac{3}{2}.$$

$$\log_{a^4} \tfrac{x^4\cdot x}{x^2}=\tfrac{3}{2},$$

$$\log_{a^4} x^3=\tfrac{3}{2}$$

$$x^3=a^6$$

$$x=a^2.$$

Втор начин. Слично како и во претходниот случај, користејќи го равенството $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$ последователно добиваме

$$\log_a x-\tfrac{1}{2}\log_a x+\tfrac{1}{4}\log_a x=\tfrac{3}{2},$$

$$\tfrac{3}{4}\log_a x=\tfrac{3}{2},$$

$$\log_a x=2,$$

$$x=a^2.$$

27. За реалниот број $a>0, a\neq 1$ дадена е функцијата $f(x)=\log_a x+\log_{a^2} x$. Во зависност од вредноста на параметарот a реши ја равенката

$$f(x+a^2-a)=2f(x).$$

Решение. За да равенката има решение треба да бидат исполнети условите $a>0, a\neq 1$, $x>0$ и $x>a-a^2$. Имаме

$$f(x)=\log_a x+\log_{a^2} x=\log_a x+\frac{1}{\log_x a^2}=\log_a x+\frac{1}{2\log_x a}=\tfrac{3}{2}\log_a x.$$

Од $f(x+a^2-a)=2f(x)$ следува

$$\tfrac{3}{2}\log_a(x+a^2-a)=2\cdot\tfrac{3}{2}\log_a x, \text{ т.е. } \log_a(x+a^2-a)=\log_a x^2,$$

од каде ја добиваме квадратната равенка $x^2-x+a-a^2=0$ чии решенија се $x_1=a$ и $x_2=1-a$. Лесно се гледа дека првото решение има слисла за секој позитивен број a освен за $a=1$, а вторoто за $a\in(0,1)$.

28. Докажи дека производот на корените на равенката

$$x^{\log_{2016} x}\sqrt{2016} = x^{2016},$$

е природен број. Која е последната цифра на тој број?

Решение. Дадената равенка ја логратимираме со логаритам со основа 2016 и последователно добиваме

$$\log_{2016}[\sqrt{2016}x^{\log_{2016} x}] = \log_{2016} x^{2016}$$

$$(\log_{2016} x)^2 + \tfrac{1}{2} = 2016(\log_{2016} x).$$

Воведуваме смена $t = \log_{2016} x$ и ја добиваме равенката $t^2 - 2016t + \frac{1}{2} = 0$. Според Виетовите правила, за збирот на корените t_1 и t_2 на последната равенка е исполнето $t_1 + t_2 = 2016$. Во тој случај решенија на почетната равенка се $x_1 = 2016^{t_1}$ и $x_2 = 2016^{t_2}$, а за нивниот производ добиваме

$$x_1 x_2 = 2016^{t_1} 2016^{t_2} = 2016^{t_1+t_2} = 2016^{2016},$$

кој е природен број.

Јасно, последната цифра на бројот 2016^{2016} е 6.

29. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_{\frac{1}{8}}(2x) - 4\log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_8 x = 0.$$

Решение. Ако искористиме дека

$$\log_{\frac{1}{8}}(2x) = \log_{\frac{1}{8}} 2 + \log_{\frac{1}{8}} x = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} x,\ \log_{\frac{1}{4}} x = \tfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x \text{ и } \log_8 x = -\tfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} x,$$

тогаш равенката ја запишуваме во обликот: $2\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0$. Решенијата на последната равенка се $\log_{\frac{1}{2}} x_1 = \frac{1}{2}$ и $\log_{\frac{1}{2}} x_2 = -1$, од каде добиваме $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = 2$.

30. Реши ја равенката

$$4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} 4} = 0.$$

Решение. Дадената равенка е определена за $x > 0$. За $x > 0$, $\log_{10} x$ можеме да го запишеме во облик

$$\log_{10} x = \frac{\log_4 x}{\log_4 10} = (\log_4 x)(\log_{10} 4),$$

од каде добиваме

$$4^{\log_{10} x} = 4^{(\log_4 x)(\log_{10} 4)} = (4^{\log_4 x})^{\log_{10} 4} = x^{\log_{10} 4}.$$

Сега, равенката можеме да ја запишеме во облик

$$4^{\log_{10} x} - 32 + 4^{\log_{10} x} = 0,$$

$$2 \cdot 4^{\log_{10} x} - 32 = 0,$$

$$4^{\log_{10} x} = 4^2,$$

$$\log_{10} x = 2.$$

Значи, решение на равенката е $x = 100$.

31. Реши ја равенката

$$\log_6(3\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+2\cdot 9^{-\frac{1}{x}})+\frac{1}{x}=\log_6 5.$$

Решение. За $x=0$ равенката не е дефинирана. За $x\neq 0$ воведуваме смена $-\frac{1}{x}=y$, при што равенката го добива обликот

$$\log_6(3\cdot 4^y+2\cdot 9^y)=y+\log_6 5,$$
$$\log_6(3\cdot 4^y+2\cdot 9^y)=\log_6 6^y+\log_6 5,$$
$$\log_6(3\cdot 4^y+2\cdot 9^y)=\log_6 5\cdot 6^y,$$

па затоа

$$3\cdot 4^y+2\cdot 9^y=5\cdot 6^y,$$
$$3\cdot (\tfrac{2}{3})^{2y}+2-5\cdot (\tfrac{2}{3})^y=0,$$

Воведуваме смена $(\frac{2}{3})^y=t$, при што добиваме $3t^2-5t+2=0$. Решенијата на последната квадратна равенка се $t_1=1$ и $t_2=\frac{2}{3}$.

За $t_1=1$, ја добиваме равенката $(\frac{2}{3})^y=1$, од каде имаме $y=0$ и во овој случај немаме решение, бидејќи $-\frac{1}{x}\neq 0$ за секој реален број x.

За $t_2=\frac{2}{3}$ ја добиваме равенката $(\frac{2}{3})^y=\frac{2}{3}$ која има единствено решение $y=1$. Решение на равенката $-\frac{1}{x}=1$ е $x=-1$.

Значи, единствено решение на почетната равенка е $x=-1$.

32. Реши ја равенката

$$\log_{3x+4}(2x+1)^2+\log_{2x+1}(6x^2+11x+4)=4.$$

Решение. За дефиниционата област во која ги бараме решенијата на равенката мора да важи

$$2x+1>0,\ 3x+4>0,\ 6x^2+11x+4>0 \text{ и } 2x+1,\ 3x+4\neq 1,$$

од каде го добиваме интервалот $(-\frac{1}{2},\infty)$. Забележуваме дека

$$6x^2+11x+4=(2x+1)(3x+4)$$

и тогаш равенката последователно е еквивалентна на равенката

$$2\log_{3x+4}(2x+1)+\log_{2x+1}(2x+1)(3x+4)=4$$
$$2\log_{3x+4}(2x+1)+\log_{2x+1}(2x+1)+\log_{2x+1}(3x+4)=4$$
$$2\log_{3x+4}(2x+1)+\log_{2x+1}(3x+4)=3$$
$$2\log_{3x+4}(2x+1)+\frac{1}{\log_{3x+4}(2x+1)}=3.$$

Воведуваме смена $u=\log_{3x+4}(2x+1)$, односно $(3x+4)^u=2x+1$ и дадената равенка го добива видот $2u+\frac{1}{u}=3$, од каде ја добиваме равенката $2u^2-3u+1=0$, чии решенија се $u_1=1$ и $u_2=\frac{1}{2}$. Од $u_1=1$ добиваме $3x+4=2x+1$, односно $x=-3$.

Но, $x=-3\notin(-\frac{1}{2},\infty)$, што значи дека $x=-3$ не е решение на почетната равенка. Од $u_2=\frac{1}{2}$ ја добиваме равенката $3x+4=(2x+1)^2$ која е еквивалентна на равенката $4x^2+4x-3=0$. Решенија на последната равенка се $x_1=-1$ и $x_2=\frac{3}{4}$ од кои само второто е во дефиниционата област.

Конечно, единствено решение на дадената равенка е $x=\frac{3}{4}$.

33. Да се реши равенката

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4,$$

каде што $3x+7$ и $2x+3$ се позитивни реални броеви и различни од 1).

Решение. Од $3x+7>0$, $2x+3>0$, $3x+7\neq 1$, $2x+3\neq 1$ следува дека решение на равенката може да биде реален број $x\in(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,+\infty)$. Бидејќи

$$9+12x+4x^2=(2x+3)^2$$

$$6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7),$$

дадената равенка може да се запише во обликот

$$2[\log_{3x+7}(2x+3)]^2-3\log_{3x+7}(2x+3)+1=0$$

од каде што добиваме

$$\log_{3x+7}(2x+3)=1, \qquad 2\log_{3x+7}(2x+3)=1,$$

т.е. $x_1=-4, x_2=-2$ и $x_3=-\frac{1}{4}$. Бидејќи $x\in(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,+\infty)$, следува дека решение на равенката е $x_3=-\frac{1}{4}$.

34. Реши ја равенката $27\cdot x^{\log_{27}x}=\sqrt[3]{x^{10}}$.

Решение. За $x>0$, ќе ја логаритмираме равенката со основа 3. Користејќи ги својствата на логаритми добиваме:

$$\log_3(27\cdot x^{\log_{27}x})=\log_3(x^{\frac{10}{3}}) \quad\Leftrightarrow\quad \log_3 3^3+\log_3(x^{\log_{27}x})=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$\Leftrightarrow\quad 3+\log_{27}x\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x \quad\Leftrightarrow\quad 3+\frac{1}{\log_x 3^3}\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$\Leftrightarrow\quad 3+\frac{1}{3\log_x 3}\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x \quad\Leftrightarrow\quad 3+\frac{1}{3}\log_3 x\cdot\log_3 x=\frac{10}{3}\log_3 x$$

$$\Leftrightarrow\quad 9+(\log_3 x)^2=10\cdot\log_3 x \quad\Leftrightarrow\quad (\log_3 x)^2-10\cdot\log_3 x+9=0$$

Решенијата на последната квадратна равенка по $\log_3 x$ се $\log_3 x=1$ и $\log_3 x=9$, од каде добиваме $x=3$ и $x=3^9$.

35. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои што равенката $\log_x a+2\log_{ax}a=6\log_{a^2x}a$ има барем две решенија во интервалот $[a,+\infty)$.

Решение. Допустливите вредности се $x>0, x\neq 1, a>0, ax\neq 1, a^2x\neq 1$. За $a=1$ секој $x>0$, $x\neq 1$ е решение на равенката. Ако $a\neq 1$, воведуваме смена $t=\log_x a$

и ја добиваме равенката $\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}=\frac{6}{t+2}$, чии решенија се $t=1$ и $t=-\frac{2}{3}$. Соодветните вредности за x се $x=a$ и $x=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$. Бидејќи $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\geq a$ кога $a\leq 1$, добиваме дека во овој случај решенијата се $a<1$.

Конечно, бараните вредности на параметарот a се $a\in(0,1]$.

36. Реши ја равенката $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}+\log_x \sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a$, каде a е позитивен реален број различен од 1.

Решение. Да забележиме дека $x\neq 1$ и $x>0$ (за да постои $\log_x \sqrt[4]{ax}$). Со преоѓање на логаритми со основа a равенката ќе се трансформира во

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}(1+\tfrac{1}{\log_a x})}+\sqrt{\log_a \sqrt[4]{\tfrac{x}{a}}(1-\tfrac{1}{\log_a x})}=a\,,$$

и со понатамошни трансформации го добива обликот:

$$\sqrt{\frac{(\log_a x+1)^2}{4\log_a x}}+\sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}}=a\,.$$

Оттука $\log_a x>0$ (заради ненегативноста на подкореновите изрази). Последната равенка е еквивалентна (заради $x\neq 1$, односно $\log_a x\neq 0$) со

$$|\log_a x+1|+|\log_a x-1|=2a\sqrt{\log_a x} \qquad (1)$$

За да ја решиме равенката (1) ќе разгледаме два случаи:

i) Нека $\lg_a x>1$, тогаш равенката преминува во следната равенка:

$$\log_a x=a\sqrt{\log_a x}\,.$$

Одовде добиваме решение, $x_1=a^{a^2}$. Натаму, заради $\lg_a x>1$ добиваме дека $a>1$.

ii) Нека сега $0<\log_a x\leq 1$. Тогаш равенката (1) преминува во следната равенка: $2=2a\sqrt{\log_a x}$. Тогаш нејзино единствено решение е $x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$. Овде да забележиме дека условот $0<\log_a x\leq 1$ ќе биде исполнет само ако $a\geq 1$. Но за $a=1$ добиваме $x_2=1$, па тоа не е решение на дадената равенка, затоа за решението на равенката x_2 важи истото како и за x_1, т.е. е решение за почетната равенка само ако $a>1$. На овој начин ги исцрпевме сите можности (бидејќи $\lg_a x\leq 0$). Останува дека почетната равенка при $a>1$ има две решенија $x_1=a^{a^2}, x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$, додека за $0<a<1$ равенката нема решение.

37. Определи ги вредностите на параметарот α за кој равенката

$$\log_6(9^x+\alpha^2 4^{x+1})=x$$

има

а) две реални решенија

б) едно реално решение

За определените вредности на α најди ги тие решенија

Решение. Равенката е еквивалентна на равенката $9^x+\alpha^2 4^{x+1}=6^x$, т.е. на равенката $(\frac{3}{2})^x+4\alpha^2(\frac{2}{3})^x-1=0$. Ако воведеме смена $(\frac{3}{2})^x=t$, тогаш $(\frac{2}{3})^x=\frac{1}{t}$ и равенката го обива обликот $t+4\alpha^2\frac{1}{t}-1=0$, т.е. обликот

$$t^2-t+4\alpha^2=0\,. \qquad (1)$$

Почетната равенка има реални решенија ако и само ако последната равенка има реални решенија. Послената равенка има реални решенија ако само ако $D=1-16\alpha^2\geq 0$. Ќе разгледаме два случаи.

Ако $1-16\alpha^2=0$, т.е. $\alpha=\pm\frac{1}{4}$, тогаш (1) го добива обликот $4t^2-4t+1=0$ која има решение $t=\frac{1}{2}$. Во тој случај $(\frac{3}{2})^x=\frac{1}{2}$ и почетната равенка има решение $x=-\log_{\frac{3}{2}}2$.

Ако $1-16\alpha^2>0$, т.е. $-\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{4}$, тогаш (1) има ве реални решенија

$$t_1=\frac{1+\sqrt{1-16\alpha^2}}{2} \text{ и } t_2=\frac{1-\sqrt{1-16\alpha^2}}{2}\,.$$

Биејќи $t_1,t_2>0$, равенките $(\frac{3}{2})^x=\frac{1+\sqrt{1-16\alpha^2}}{2}$ и $(\frac{3}{2})^x=\frac{1-\sqrt{1-16\alpha^2}}{2}$ имаат реални решенија

$$x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{1+\sqrt{1-16\alpha^2}}{2} \text{ и } x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{1-\sqrt{1-16\alpha^2}}{2}\,,$$

кои се решенија на почетната равенка.

38. Определи ги сите вредности на параметарот k за кои равенката

$$\log(kx)=2\log(x+1)$$

има точно еден позитивен корен.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\log(kx)=\log(x+1)^2\,.$$

Ако антилогаритмираме ќе добиеме $kx=(x+1)^2$, односно

$$x^2+(2-k)x+1=0\,. \qquad (1)$$

Решенија на последната се $x_{1/2}=\frac{k-2\pm\sqrt{k(k-4)}}{2}$. Равенката има реални решенија, ако и само ако $k(k-4)\geq 0$. Неравенството е исполнето за $k\leq 0$ или $k\geq 4$.

Ќе разгледаме три случаи:

1. Ако $k\leq 0$, тогаш решенијата се негативни.

2. Ако $k>4$, тогаш равенката има два реални различни корени.

3. Ако $k=4$, тогаш дискриминантата на квадратната равенка е $D=0$, па равенката (1) има еден реален позитивен корен $x=1$.

Не е тешко да се провери дека за $k=4$ позитивен корен на равенката е $x=1$.

39. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}\log_y x - 2\log_x y = 1\\ x - y = 2.\end{cases}$$

Решение. Нека $t = \log_y x$; тогаш првата равенка гласи $t - \frac{2}{t} = 1$, од каде што добиваме $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$.

Од $\log_y x = 2$, добиваме $x = y^2$. Од втората равенка, $x - y = 2$ и $x = y^2$ следува дека $y = 2$, зошто $y = -1$ не се зема како решение. Значи, едно решение е $x = 4$ и $y = 2$.

Од $\log_y x = -1$ добиваме дека $x = \frac{1}{y}$. Од ова и втората равенка следува дека $y = \sqrt{2} - 1$ ($y > 0$). Значи, второто решение е $x = \sqrt{2} + 1$ и $y = \sqrt{2} - 1$.

40. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases}|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3\\ xy = 3\end{cases}$$

Решение.Од $xy = 3$ заклучуваме дека $x > 0$ и $y > 0$, или $x < 0$ и $y < 0$. Од дефинираноста на $\log_2(x+y)$ и погоре кажаното следува дека $x, y > 0$.

Исто така, $x + y > 1$, бидејќи x или y е поголемо од 1, кое се добива од позитивноста на x и y и од $xy = 3$.

Од сето тоа следува дека дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}\log_2(x+y) + |\log_2(x-y)| = 3\\ xy = 3\end{cases}$$

Ако е $0 < x - y < 1$, тогаш горниот систем се трансформира во системот

$$\tfrac{x+y}{x-y} = 8,\ xy = 3,$$

и решавајќи го него го добиваме решението $(\frac{3\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{3})$.

Ако $x - y > 1$, се доаѓа до системот

$$x^2 - y^2 = 8,\ xy = 3,$$

и решение на овој систем кој ги задоволува условите $x - y > 1$ и $x, y > 0$, е $x = 3, y = 1$.

41. Реши го системот

$$\begin{cases}3^{2x-2y} + 2\cdot 3^{x-y} - 3 = 0\\ 3^x + 3^{1-y} = 4\end{cases}.$$

Решение. Ќе воведеме смена $3^x = u, 3^{-y} = v$, каде $u, v > 0$. Системот добива облик

$$\begin{cases}u^2v^2 + 2uv - 3 = 0\\ u + 3v = 4,\end{cases}$$

односно

$$\begin{cases}(uv)^2+2uv-3=0\\ u+3v=4.\end{cases}$$

Првата равенка ја решаваме како квадратна по uv, од каде се добиваат две решенија $uv=1$ и $uv=-3$. Заради $u,v>0$, понатаму го разгледуваме само решението $uv=1$. За да се добијат вредностите за x,y, потребно е да го решиме системот

$$\begin{cases}uv=1\\ u+3v=4\end{cases}.$$

Решенијата на системот се решенија на квадратната равенка $v(4-3v)-1=0$, односно $v_1=1$ и $v_2=\frac{1}{3}$. Тогаш соодветните вредности за u се $u_1=1$ и $u_2=3$. На крај, со решавање на системите

$$\begin{cases}3^x=1\\ 3^{-y}=1\end{cases} \text{ и } \begin{cases}3^x=3\\ 3^{-y}=\frac{1}{3}\end{cases},$$

се добиваат решенијата на почетниот систем $(x,y)\in\{(0,0),(1,1)\}$.

42. Да се најдат сите реални броеви a и b

$$\begin{cases}\left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a\\ x^2+y^2=b\end{cases} \tag{1}$$

при условот $x>0$, има единствено решение.

Решение. Нека $S\subseteq\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ е множеството парови (x,y) што го задоволуваат системот (1) при што $x>0$. Од $x^2+y^2=b$ следува дека $b>0$. Ако $(x,y)\in S$, тогаш и $(x,-y)\in S$, што значи дека за системот (1) да има единствено решение, при услов $x>0$, мора да биде $y=0$ и $a=0$. За $a=0$ и $b>1$ системот (1) има решенија $(\sqrt{b},0)$, $(1,\sqrt{b-1})$, $(1,-\sqrt{b-1})$. Според тоа, системот (1) има единствено решение, при услов $x>0$, за $a=0$ и $0<b\le 1$, и решението е $(\sqrt{b},0)$.

43. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}x^y=y^x\\ p^x=q^y\end{cases}$$

при што $x>0$, $y>0$, $p>0$ и $q>0$.

Решение. Да ги логаритмираме двете равенки од системот:

$$\begin{cases}y\lg x=x\lg y\\ x\lg p=y\lg q\end{cases}.$$

Од втората равенка добиваме: $\frac{x}{y}=\frac{\lg q}{\lg p}=\alpha$, т.е.

$$x=\alpha y,\ \alpha>0. \tag{*}$$

Ќе разгледаме два случаи:

i) Ако $p=q$ системот има бесконечно многу решенија од видот $x=y$.

ii) Ако $p\neq q$ тогаш заменувајќи го x од (*) во првата равенка од системот, добиваме: $x=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, $y=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

44. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[y]{a^{-1}}=1\\ \sqrt[x]{nb}:\sqrt[y]{b}=n^p\end{cases}.$$

Решение. Ќе сметаме дека a,b,n се позитивни броеви. Системот можеме да го запишеме во облик

$$\begin{cases}a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=1\\ n^{\frac{1}{x}-p}b^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=1\end{cases}.$$

Ќе разгледаме два случаи и тоа $a\neq 1$ и $a=1$.

Случај 1. $a\neq 1$. Од првата равенка имаме $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0$, т. е. $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$. За било која вредност на b, во тој случај, од втората равенка имаме

$$n^{\frac{1}{x}-p}=1. \tag{1}$$

Сега имаме два подслучаи, и тоа

а) $n\neq 1$, и тогаш $\frac{1}{x}-p=0$, т.е. $x=\frac{1}{p}$ и тогаш решение на системот е $x=y=\frac{1}{p}$

б) $n=1$, и тогаш решение на равенката (1) е $\frac{1}{x}-p\in\mathbb{R}$. Во тој случај решение на системот се сите подредени парови ненулти броеви (x,y) за кои $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$.

Случај 2. $a=1$. Во овој случај решение на првата равенка се било кои реални броеви (x,y), т.е. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\in\mathbb{R}$. Во тој случај втората равенка можеме да ја запишеме во облик

$$n^{\frac{1}{x}-p}=b^{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}. \tag{2}$$

Во овој случај ќе ги разгледаме следните подслучаи:

а) $b=1$, $n=1$. Во овој случај $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\in\mathbb{R}$ и $\frac{1}{x}-p\in\mathbb{R}$, т.е. решенија на системот се сите ненулти подредени парови реални броеви (x,y).

б) $b=1$, $n\neq 1$. Тогаш равенката (2) го добива обликот $n^{\frac{1}{x}-p}=1$, и во овој случај добиваме $\frac{1}{x}-p=0$, т.е. $x=\frac{1}{p}$. Во овој случај решение на почетниот систем е $x=\frac{1}{p}, y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

в) $b\neq 1$, $n=1$. Равенката (2) го добива обликот $1=b^{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$, од каде добиваме $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=0$. Според тоа, во овој случај решение на почетниот систем се сите подредени парови (x,y) од ненулти реални броеви x и y, за кои што $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$.

г) $b \neq 1$ $n \neq 1$. Во овој случај решенија се $x = \frac{\ln nb}{\frac{1}{y}\ln b + \ln n^p}$.

45. Нека a и b се рационални броеви такви што $a > 1$, $b > 0$ и $ab = a^b$ и $\frac{a}{b} = a^{3b}$. Определи ги вредностите за a?

Решение. *Прв начин.* Со логартимирање на дадените равенки со основа a добиваме

$$\log_a ab = \log_a a^b \text{ и } \log_a \frac{a}{b} = \log_a a^{3b}$$
$$1 + \log_a b = b \text{ и } 1 - \log_a b = 3b$$
$$\log_a b = b - 1 \text{ и } \log_a b = 1 - 3b$$

Сега од последните две равенки следува дека $b - 1 = 1 - 3b$, т.е. $b = \frac{1}{2}$. Со замена во равенката $ab = a^b$ добиваме $a \cdot \frac{1}{2} = a^{\frac{1}{2}}$, т.е. $a^2 = 4a$. Бидејќи $a > 1$ добиваме дека $a = 4$.

Втор начин. Од $\frac{a}{b} = a^{3b}$ следува дека $b = a^{1-3b}$. Ако замениме во $ab = a^b$ ќе добиеме $a^{2-3b} = a^b$. Од условот $a > 1$ добиваме $2 - 3b = b$, $b = \frac{1}{2}$. Сега ако замениме во $ab = a^b$ имаме $\frac{a}{2} = \sqrt{a}$, од каде добиваме дека $a = 4$.

46. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} (mx)^{\lg m} = (ny)^{\lg n} \\ n^{\lg x} = m^{\lg y} \end{cases}.$$

Решение. Со логаритмирање на равенките на системот добиваме

$$\begin{cases} \lg(mx)^{\lg m} = \lg(ny)^{\lg n} \\ \lg n^{\lg x} = \lg m^{\lg y} \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} (\lg m)\lg x - (\lg n)\lg y = \lg^2 n - \lg^2 m \\ (\lg n)\lg x - (\lg m)\lg y = 0 \end{cases}$$

Воведуваме смени $\lg x = u$ и $\lg x = v$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} u\lg m - v\lg n = \lg^2 n - \lg^2 m \\ u\lg n - v\lg m = 0 \end{cases}$$

чие решение е $u = -\lg m$, $v = -\ln n$. Според тоа, $\lg x = -\lg m$ и $\lg y = -\lg n$, па затоа $x = \frac{1}{m}$ и $y = \frac{1}{n}$.

47. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \end{cases}.$$

Решение. Од втората равенка на системот имаме: $y-x=(\sqrt{2})^4$, т.е. $y=x+4$. Заменуваме во првата равенка и добиваме $3^x\cdot 2^{x+4}=576$, т.е. $6^x=36=6^2$, од каде наоѓаме $x=2$.

Конечно, $x=2$ и $y=2+4=6$.

48. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^x=(6x^y)^2 \\ 4x+\log_6 x=9+8y. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Системот можеме да го запишеме во облик

$$\begin{cases} x^{x-2y}=36 \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9. \end{cases}$$

Ако првата равенка ја логаритмираме со логаритам со основа 6, добиваме

$$\begin{cases} (x-2y)\log_6 x=2 \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9. \end{cases}$$

Ако воведеме смени $x-2y=u, \log_6 x=v$, системот ќе го добие обликот

$$\begin{cases} uv=2 \\ 4u+v=9. \end{cases} \qquad (2)$$

Од првата равенка имаме $v=\frac{2}{u}$ и ако замениме во втората равенка добиваме $4u+\frac{2}{u}=9$. Решенија на равенката $4u^2-9u+2=0$ се $u_1=8$ и $u_2=1$. Според тоа решение на системот (2) се $u_1=8, v_1=\frac{1}{4}$ и $u_2=1, v_2=2$. Значи, ги добиваме системите

$$\begin{cases} x-2y=8 \\ \log_6 x=\frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-2y=1 \\ \log_6 x=2. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение на првиот систем од (3) е $x_1=\sqrt[4]{6}, y_1=\frac{1}{2}(\sqrt[4]{6}-8)$ а решенија на вториот систем од (3) е $x_2=36, y_2=\frac{35}{2}$.

Не е тешко да се провери дека тоа се решенија и на почетниот систем.

49. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^m=y^n \\ \log_p \frac{x}{y}=\frac{\log_p x}{\log_p y}. \end{cases}$$

Решение. Првата равенка на системот ја логаритмираме со логаритам со основа p и добиваме

$$\log_p x=\frac{n}{m}\log_p y. \qquad (1)$$

Втората равенка од системот ќе ја запишеме во облик

$$\log_p x-\log_p y=\frac{\log_p x}{\log_p y},$$

и ако од (1) замениме во последната равенка, последователно добиваме

$$\frac{n}{m}\log_p y-\log_p y=\frac{\frac{n}{m}\log_p y}{\log_p y},$$

$$(\frac{n}{m}-1)\log_p y=\frac{n}{m},$$

$$\log_p y=\frac{n}{n-m} \text{ и } \log_p x=\frac{n^2}{m(n-m)}.$$

Конечно, решение на системот е $x=p^{\frac{n^2}{m(n-m)}}$, $y=p^{\frac{n}{n-m}}$.

50. Определи ги сите решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x^{\log y}+\sqrt{y^{\log x}}=110 \\ xy=1000 \end{cases}.$$

Решение. Воведуваме ознаки $A=x^{\lg y}$ и $B=y^{\lg x}$. Ако последните две равенства ги логаритмираме и ги искористиме својствата на фукцијата $\lg$, добиваме

$$\lg A=\lg x^{\lg y}=\lg y\cdot\lg x$$

$$\lg B=\lg y^{\lg x}=\lg x\cdot\lg y,$$

т.е. $\lg A=\lg B$. Бидејќи функцијата $\lg$ е монотоно растечка, следува дека $A=B$. Сега, ако во првата равенка на системот воведеме смена $t=\sqrt{y^{\lg x}}$, добиваме дека $t^2=y^{\lg x}$, и заради претходно добиеното равенство имаме $t^2=x^{\lg y}$.

Првата равенка од системот го добива обликот $t^2+t-110=0$. Нејзини решенија се $t_1=-11$ и $t_2=10$. Бидејќи $t>0$, добиваме дека единствено решение е $t_2=10$. Тогаш $x^{\lg y}=100$, и ако логаритмираме добиваме $\lg x\cdot\lg y=2$.

Ако пак втората равенка од системот ја логаритмираме, добиваме $\lg x+\lg y=3$, односно го добиваме системот

$$\begin{cases} \lg x+\lg y=3 \\ \lg x\cdot\lg y=2 \end{cases}$$

Според тоа, $u=\lg x$ и $v=\lg y$ се решенија на квадратната равенка $w^2-3w+2=0$, а нејзини решенија се $w_1=1$ и $w_2=2$. Значи,

$$\begin{cases} \lg x=1 \\ \lg y=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lg x=2 \\ \lg y=1 \end{cases}.$$

Конечно, системот има две решенија $x=10, y=100$ или $x=100, y=10$, кои се решенија и на почетниот систем.

51. За кои вредности на параметарот a системот

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

има единствено решение.

Решение. Ако (x_0, y_0) е решение на системот равенки, тогаш и $(-x_0, y_0)$ е решение. Ако a е вредност на параметарот за кој системот има единствено решение, тогаш $x_0 = -x_0$, односно $x_0 = 0$.

Ако замениме во системот, добиваме

$$\begin{cases} y + a = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}.$$

Од втората равенка имаме $y = \pm 1$, па според тоа за a, од првата равенка на последниот систем, добиваме две решенија $a = 0$ и $a = 2$.

Ќе разгледаме два случаи.

а) $a = 0$. Во тој случај системот го добива обликот

$$\begin{cases} 2^{|x|} + x - x^2 = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Од втората равенка е јасно дека $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. При $x \in [-1,1]$ имаме

$$|x| - x^2 = |x|(1 - |x|) \geq 0,\ 2^{|x|} \geq 1$$

па според тоа, од првата равенка $y \geq 1$. Но од условот $|y| \leq 1$ (кој е исполнет за решенијата на системот), добиваме $y = 1$. Од втората равенка добиваме $x = 0$ и тоа е единственото решение.

б) $a = 2$. Во тој случај

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| - x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Во овој случај не е тешко да се провери дека освен $(0,-1)$, решенија на системот се и $(1,0)$ и $(-1,0)$. Значи, за $a = 2$ системот има повеќе од едно решение.

Конечно, системот има едно решение за $a = 0$.

52. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^y = z \\ y^z = x \\ z^x = y \end{cases}.$$

Решение. *Прв начин.* Од $y^z = x$ добиваме $y^{zy} = x^y = z$. Натаму $y^{zy} = z$, т.е. $y^{xyz} = z^x = y$, па оттука $xyz = 1$. Ако ги помножиме равенките од дадениот систем добиваме $z^y y^z z^x = xyz = 1$. Имаме две можности или $x = 1$ или $x \neq 1$.

1) Ако $x = 1$ добиваме $z = 1^y = 1$ и $y = z^x = 1^1 = 1$.

2) Да претпоставиме дека $x \neq 1$ и нека $x > 1$. Тогаш од $xyz = 1$ добиваме $yz < 1$. Заради $y^z = x > 1$ мора $y > 1,\ z > 1$ или $y > 1,\ z < 1$. Првата можност отпаѓа заради $yz < 1$. Ако важи $y > 1,\ z < 1$ тогаш имаме $x^y = z < 1$, а од друга страна заради $x > 1,\ y > 1$ важи и $x^y > 1$. Значи и втората можност отпаѓа.

Ако $x<1$, тогаш од $xyz=1$ следува $yz>1$. Бидејќи $y^z=x<1$, мора да важи $y<1,\ z<1$ или $y<1,\ z>1$. Заради $yz>1$ првата можност отпаѓа. Нека важи $y<1,\ z>1$. Од $x<1,\ y<1$ следува $x^y<1$. Од друга страна $x^y=z>1$, па и втората можност отпаѓа.

Останува дека единствено решение на системот е $x=y=z=1$.

Втор начин. Со замена на z во од првата во втората и третата равенка добиваме

$$\begin{cases} y^{(x^y)}=x \\ (x^y)^x=y. \end{cases}$$

Ако ги логаритмираме двете равенки од системот имаме

$$\begin{cases} x^y\lg y=\lg x \\ xy\lg x=\lg y. \end{cases}.$$

Со замена на $\lg x$ од првата во втората равенка ќе добиеме $xyx^y\lg y=\lg y$.

Ако $\lg y=0$, тогаш $y=1$ па и $x=z=1$

Ако $\lg y\neq 0$, тогаш $xyx^y=1$, односно $x^{y+1}=\frac{1}{y}$, односно $x=y^{-\frac{1}{y+1}}$. Ако замениме во равенката $x^y\lg y=\lg x$ добиваме $y^{-\frac{y}{y+1}}\lg y=\lg y^{-\frac{1}{y+1}}$. Оттука, заради $\lg y\neq 0$, имаме $y^{-\frac{y}{y+1}}=-\frac{1}{y+1}$. Но последново равенство не е можно, бидејќи левата страна е позитивен, а десната негативен број.

Значи единствено решение на системот е $x=y=z=1$.

53. Најди ги сите вредности на a за кои што секое решение на системот равенки

$$\begin{cases} x-a^2\log_3 y=1 \\ x-3a\log_3 y=1, \end{cases}$$

го задоволува условот $x+y>1$.

Решение. Со замена на x во втората равенка добиваме

$$\begin{cases} x=1+a^2\log_3 y \\ (a^2+3a)\log_3 y=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Ќе разгледаме три случаи:

1) $a=0$. Во овој случај $x=1$, а $y\in\mathbb{R}^+$, па следува $x+y>1$, т.е. условот е исполнет. Значи, $a=0$.

2) $a=-3$. Во овој случај го добиваме системот

$$\begin{cases} x=1+9\log_3 y \\ y>0 \end{cases}$$

чие едно решение, на пример $y=3,\ x=10$ го задоволува условот $x+y>1$, но решението $y=\frac{1}{3}, x=-8$ не го задоволува условот $x+y>1$. Значи, $a\neq -3$.

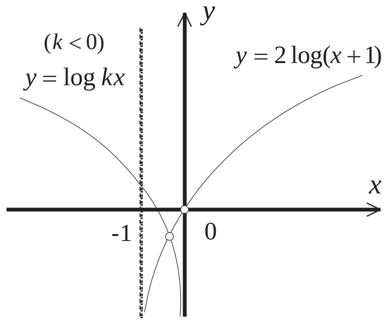
3) $a \neq 0$ и $a \neq -3$. Тогаш од $\log_3 y = 0$ следува $y = 1$, а од првата равенка на системот (*) добиваме $x = 1 + a^2 \cdot 0 = 1$, па и во овој случај $x + y > 1$.

Следствено, бараните вредности за a се $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

54. Одреди ги сите вредности на параметарот k, така што равенката $\log kx = 2\log(x+1)$ има точно еден корен.

Решение. Равенката има смисол за $x > -1$ и $kx > 0$. Ја трансформираме во видот $\log kx = \log(x+1)^2$, т.е. во видот $kx = (x+1)^2$, од каде добиваме

$$x^2 - (k-2)x + 1 = 0 \qquad (*)$$



Последната равенка има точно еден корен, ако $D = 0$, т.е. $(k-2)^2 - 4 = 0$, т.е. за $k = 4$ и $k = 0$. Но, поради $kx > 0$, следува $k \neq 0$. Равенката (*)

- за $k > 4$ има две реални решенија;
- за $k \in (0,4)$ нема реални решенија
- за $k = 4$ има точно едно решение, бројот 1
- за $k < 0$ има две решенија.

Во последниот случај треба да провериме дали и двете решенија ја задоволуваат почетната равенка (во овој случај $-1 < x < 0$).

Триномот $f(x) = x^2 - (k-2)x + 1$ ќе има точно еден корен меѓу броевите -1 и 0, ако важи $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Бидејќи $f(-1) = 1 + k - 2 + 1 = k$ и $f(0) = 1$, следува $k < 0$.

Конечно, дадената логаритамска равенка има точно еден корен за $k = 4$ и $k < 0$.

3. НЕРАВЕНКИ

1. Да се реши неравенката

$$\log_2 \tfrac{6x+2}{x-2} > 2$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $\tfrac{6x+2}{x-2} > 4$, а таа е, пак, еквивалентна со неравенката

$$(6x+2)(x-2) > 4(x-2)^2,$$

т.е. со неравенката

$$x^2 + 3x - 10 > 0,$$

од каде што добиваме дека $x \in (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$.

2. Реши ја неравенката

$$\log_{x^2}(3-2x) > 1.$$

Решение. Јасно, $x \neq 0$ и $3 - 2x > 0$. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенската

$$\log_{x^2}(3-2x) > \log_{x^2} x^2 .$$

Ќе разгледаме два случаи:

1) Ако $0 < x^2 < 1$, т.е. $x \in (-1,1)\setminus\{0\}$, тогаш неравенката се сведува на системот неравенски

$$\begin{cases} 3-2x > 0 \\ x^2 > 3-2x \end{cases}$$

кој множеството $(-1,1)\setminus\{0\}$ нема решение.

2) Ако $x^2 > 1$, т.е. $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, тогаш неравенката се сведува на системот неравенски

$$\begin{cases} 3-2x > 0 \\ x^2 < 3-2x \end{cases},$$

за кој на интервалот $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ решение е интервалот $(-3,-1)$

Конечно, решението на почетната неравенка е интервалот $(-3,-1)$.

3. Реши ја неравенката $\lg\sqrt{x-2} + 0,5\lg(3x-5) > \frac{1}{2}$.

Решение. Прво да определиме кои вредности може да ги прими x, односно да ги определиме дефиниционите области на изразите во неравенката. Имаме $x-2>0$ и $3x-5>0$ и решение на овој систем е $x>2$. Сега ќе извршиме некои трансформации на неравенката. Ако ја помножиме со 2 добиваме

$$2\lg\sqrt{x-2} + \lg(3x-5) > 1 \text{, т.е. } \lg(x-2) + \lg(3x-5) > 1 .$$

Користејќи го својството на логаритмот $\lg a + \lg b = \lg ab$ за $a,b>0$ ја добиваме неравенката $\lg(x-2)(3x-5) > \lg 10$. Бидејќи функцијата $\lg$ е растечка добиваме $(x-2)(3x-5) > 10$. Решение на последната неравенка е $(-\infty,0)\cup(\frac{11}{3},\infty)$, но имајќи предвид дека $x>2$ решението на почетната неравенка е интервалот $(\frac{11}{3},\infty)$.

4. Реши ја неравенката $\log_{x-3}(x^2-4x+3) < 0$.

Решение. За $0 < x-3 < 1$ и $x^2-4x+3 > 1$ функцијата $y = \log_{x-3}(x^2-4x+3)$ монотоно опаѓа и прима негативни вредности. Од $0 < x-3 < 1$ добиваме $x \in (3,4)$ а од $x^2-4x+3>1$, $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},+\infty)$. Пресекот на овие два интервали е интервалот $(2+\sqrt{2},4)$.

За $x-3>1$, т.е. $x>4$ и $0 < x^2-4x+3 < 1$ функцијата монотоно расте и добива негативни вредности. Од $0 < x^2-4x+3 < 1$ го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} x^2-4x+3 > 0 \\ x^2-4x+2 < 0 \end{cases},$$

чие решение е $(2-\sqrt{2},1)\cup(3,2+\sqrt{2})$. Но, бидејќи $x>4$ заклучуваме дека во овој случај неравенката нема решение.

Следствено, решение на неравенката е интервалот $(2+\sqrt{2},4)$.

5. Реши ја неравенката: $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$.

Решение. Левата страна на неравенката е определена и е позитивна за секој реален број x, а десната страна е определена за секој број $x \neq -2$, при што изразот може да добие и негативни вредности. Тогаш

1) Ако десната страна на неравенката е негативна, т.е. ако $2^{x+2} < 1$, тогаш решение на дадената неравенка е $x < -2$.

2) Ако $x > -2$ тогаш дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $2^{2x}+3 \leq 2^{x+2}-1$, т.е. неравенската $2^{2x}-4\cdot 2^x+4 \leq 0$. Воведуваме смена $2^x = t$, и ја добиваме неравенката $t^2-4t+4 \leq 0$ т.е. неравенката $(t-2)^2 \leq 0$. Единствено решение на последната неравенка е $t=2$, па затоа во овој случај единствено решение на почетната неравенка е $x=1$.

Конечно, решението на почетната неравенка е $x \in (-\infty,-2) \cup \{1\}$.

6. Реши ја неравенката: $2^{\frac{1-x}{2}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$.

Решение. Дадената неравенка ја запишуваме во обликот

$$2^{\frac{1}{x}-1} < 2^{\frac{1}{2x}-1} + 1, \text{ т.е. } 2^{\frac{1}{x}} < 2^{\frac{1}{2x}} + 2$$

Воведуваме смена, $2^{\frac{1}{2x}} = y$ и тогаш $2^{\frac{1}{x}} = y^2$, па затоа неравенката го добива обликот

$$y^2 - y - 2 < 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-2) < 0.$$

Решението на последната неравенка е $-1 < y < 2$, од каде добиваме $-1 < 2^{\frac{1}{2x}} < 2$.

Но $2^{\frac{1}{2x}} > 0$, па затоа

$$2^{\frac{1}{2x}} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{2x} < 0$$

од каде што следува $x \in (-\infty,0) \cup (\frac{1}{2},+\infty)$.

7. Реши ја неравенката

$$2^{2x} \leq 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4\cdot 2^{2\sqrt{x}}$$

Решение. Решенијата на неравенката ќе ги бараме во интервалот $[0,+\infty)$. При тоа, дадената неравенка последователно е еквивалентна со неравенките

$$4\cdot 2^{2\sqrt{x}} + 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}} - 2^{2x} \geq 0$$

$$4\cdot 2^{2\sqrt{x}} + 4\cdot 2^{x+\sqrt{x}} - 2^{x+\sqrt{x}} - 2^{2x} \geq 0$$

$$(4\cdot 2^{\sqrt{x}} - 2^x)(2^{\sqrt{x}} + 2^x) \geq 0$$

Бидејќи $2^{\sqrt{x}} + 2^x > 0$, од последната неравенка добиваме $4\cdot 2^{\sqrt{x}} - 2^x \geq 0$, од каде ја добиваме неравенката $2+\sqrt{x} \geq x$, чие решение е $x \in [0,4]$. Непосредно се проверува дека најденото решение е решение и на почетната неравенка.

8. Реши ја неравенката $2^{2ax+1}+2^{a}\leq 2^{ax}+2^{ax+a+1}$, каде a е реален параметар.

Решение. Воведуваме смена $2^{ax}=y>0$ и ја добиваме неравенката

$$2y^{2}-(2^{a+1}+1)y+2^{a}\leq 0,$$

чии решенија се $y\in[\frac{1}{2},2^{a}]$ кога $a\geq -1$ и $y\in[2^{a},\frac{1}{2}]$ кога $a<-1$. Според тоа,

1) Ако $a<-1$ имаме $2^{a}\leq 2^{ax}\leq 2^{-1}$, т.е. $a\leq ax\leq -1$, од каде добиваме $1\geq x\geq -\frac{1}{a}$.
2) Ако $a=-1$ имаме $2^{-x}=2^{-1}$, т.е. $x=1$.
3) Ако $-1<a<0$ имаме $2^{-1}\leq 2^{ax}\leq 2^{a}$, т.е. $-1\leq ax\leq a$, од каде добиваме $-\frac{1}{a}\geq x\geq 1$.
4) Ако $a=0$, тогаш решение е секој реален број x.
5) Ако $a>0$ имаме $2^{-1}\leq 2^{ax}\leq 2^{a}$, т.е. $-1\leq ax\leq a$ од каде добиваме $-\frac{1}{a}\leq x\leq 1$.

9. Реши ја неравенката

$$\log_{\frac{x+4}{2}}\log_{2}\frac{2x-1}{1+x}<0.$$

Решение. За да изразот на левата страна е дефиниран потребно е да важи $\frac{2x-1}{1+x}>0$, $\log_{2}\frac{2x-1}{1+x}>0$, $\frac{x+4}{2}>0$ и $\frac{x+4}{2}\neq 1$. Според тоа, потребно е да важи $\frac{2x-1}{1+x}>0$, $\frac{2x-1}{1+x}>1$, $\frac{x+4}{2}>0$ и $\frac{x+4}{2}\neq 1$, од каде добиваме дека $\frac{2x-1}{1+x}>1$, $\frac{x+4}{2}>0$ и $\frac{x+4}{2}\neq 1$, па затоа $x\in((-4,-1)\cup(2,+\infty))\setminus\{-2\}$.

Ќе разгледуваме два случаја и тоа кога $0<\frac{x+4}{2}<1$ и кога $\frac{x+4}{2}>1$.

Во случајот кога $0<\frac{x+4}{2}<1$, т.е. кога $-4<x<-2$ последователно важи

$$\log_{2}\frac{2x-1}{1+x}>(\frac{x+4}{2})^{0}$$
$$\frac{2x-1}{1+x}>2$$
$$\frac{-3}{1+x}>0.$$

Значи, $x+1<0$, т.е. $x<-1$ па затоа во овој случај решение е $x\in(-4,-2)$.

Во случајот кога $\frac{x+4}{2}>1$, т.е. кога $x>-2$ последователно важи

$$\log_{2}\frac{2x-1}{1+x}<(\frac{x+4}{2})^{0}$$
$$\frac{2x-1}{1+x}<2$$
$$\frac{-3}{1+x}<0.$$

Значи, $x+1>0$, т.е. $x>-1$.

Конечно, решение на задачата е пресекот на почетните услови со унијата на добиените решенија, па затоа $x\in((-4,-1)\cup(2,+\infty))\setminus\{-2\}$.

10. Докажи, дека секое решение на неравенката $\log_3(2x-3)+\log_5(4x^2-9)>2$ го задоволува и неравенството

$$\log_5(4x^2-9)\cdot\log_5(100x^2-225)>2\log_3(2x-3)-\log_3^2(2x-3)$$

Решение. Второто неравенство го трансформираме до облик

$$\log_5(4x^2-9)\cdot\log_5(25(4x^2-9))>2\log_3(2x-3)-\log_3^2(2x-3)$$

$$\log_5(4x^2-9)\cdot(2+\log_5(4x^2-9))>2\log_3(2x-3)-\log_3^2(2x-3)$$

За дефиниционата област на функциите, во двете неравенства треба да важи

$$\begin{cases}2x-3>0\\4x^2-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3>0\\2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\x>-\frac{3}{2}\end{cases}$$

односно $x\in(\frac{3}{2},+\infty)$. Нека $x_0\in(\frac{3}{2},+\infty)$ е решение на првото неравенство. Нека $u(x)=\log_3(2x-3)$ и $v(x)=\log_5(4x^2-9)$. Од првото неравенство, за x_0 важи

$$u(x_0)+v(x_0)>2 \qquad (1)$$

Со воведените ознаки, второто неравенство го добива обликот

$$v(x)\cdot(2+v(x))>2u(x)-u^2(x)$$

односно

$$2v(x)+v^2(x)-2u(x)+u^2(x)>0$$

и последователно е еквивалентно на неравенствата

$$2v(x)+2u(x)+v^2(x)-4u(x)+u^2(x)+4-4>0$$

$$v^2(x)+(u(x)-2)^2+2(u(x)+v(x)-2)>0 \qquad (2)$$

Останува само да провериме дали неравенството (2)е точно за x_0. Бидејќи $v^2(x_0)\geq 0$ и $(u(x_0)-2)^2\geq 0$, а од (1) имаме $u(x_0)+v(x_0)>2$, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (2). Според тоа, x_0 го задоволува второто неравенство.

11. Нека a и b се реални броеви поголеми од 1. Определи ја најголемата вредност на реалниот број c за кој е точно неравенството

$$\frac{1}{3+\log_a b}+\frac{1}{3+\log_b a}\geq c.$$

Решение. Нека $A=\frac{1}{3+\log_a b}+\frac{1}{3+\log_b a}$ и $x=\log_a b$. Тогаш $\log_b a=\frac{1}{x}$, па затоа $x>0$ и

$$A=\frac{1}{3+x}+\frac{x}{1+3x}=\frac{x^2+6x+1}{(x+3)(3x+1)}=\frac{8x+\frac{1}{3}(x+3)(3x+1)}{(x+3)(3x+1)}=\frac{8x}{(x+3)(3x+1)}+\frac{1}{3}>\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно мал број. Тогаш за $x>\frac{4-5\varepsilon+2\sqrt{(2-4\varepsilon)(2-\varepsilon)}}{3\varepsilon}$ важи $\frac{8x}{(x+3)(3x+1)}<\varepsilon$. Според тоа, за доволно голем x изразот $\frac{8x}{(x+3)(3x+1)}$ може да се направи произволно мал број, па затоа најголемата можна вредност на c е $\frac{1}{3}$.

12. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои секое решение на неравенката

$$(\log_2 x)^2 + (x-2)\log_2 x \le x-1$$

е решение и на неравенката

$$2^x + 2^{2-x} \le a\,.$$

Решение. Првата неравенка има смисол за $x>0$ и е еквивалентна на неравенката $(\log_2 x - 1)(\log_2 x + x - 1) \le 0$. Имаме

$\log_2 x - 1 \le 0$ кога $0 < x \le 2$ и $\log_2 x - 1 \ge 0$ кога $x \ge 2$,

$\log_2 x + x - 1 \le 0$ кога $0 < x \le 1$ и $\log_2 x + x - 1 \ge 0$ кога $x \ge 1$.

Споредувајќи ги знаците на двата множители, заклучуваме дека решенијата на оваа неравенка се $x \in [1,2]$.

Ставаме $y = 2^x > 0$ и втората неравенка го добива обликот

$$f(y) = y^2 - ay + 4 \le 0\,. \qquad (1)$$

Освен тоа, $x \in [1,2]$ е еквивалентно на $y \in [2,4]$. Според тоа, секое решение на првата равенка е решение на втората равенка кога секој број $y \in [2,4]$ е решение на (1). За квадратната неравенка (1) тоа е еквивалентно со $f(2) \le 0$ и $f(4) \le 0$, од каде наоѓаме $a \ge 4$ и $a \ge 5$. Конечно, бараните вредности се $a \in [4,+\infty)$.

13. Во мнжеството реални броеви реши ја неравенката: $\left|\frac{4^x - 2^{x+1} - 2}{2^x - 4}\right| < 1$.

Решение. Имаме

$$\frac{4^x - 2^{x+1} - 2}{2^x - 4} < 1 \text{ и } \frac{4^x - 2^{x+1} - 2}{2^x - 4} > -1\,,$$

односно

$$\frac{4^x - 3\cdot 2^x + 2}{2^x - 4} < 0 \text{ и } \frac{4^x - 2^x - 6}{2^x - 4} > 0\,.$$

Воведуваме смена $t = 2^x > 0$ и добиваме

$$\frac{t^2 - 3t + 2}{t-4} < 0 \text{ и } \frac{t^2 - t - 6}{t-4} > 0\,,$$

односно

$$\frac{(t-1)(t-2)}{t-4} < 0 \text{ и } \frac{(t-3)(t+2)}{t-4} > 0\,.$$

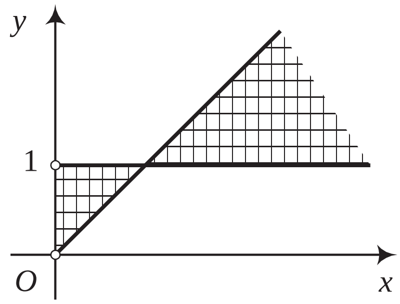
Решенијата на овие неравенки се $t \in (0,1) \cup (2,4)$ и $t \in (0,3) \cup (4,+\infty)$. Двете неравенки се задоволени за $t \in (0,1)$, па затоа решението на почетната неравенка е $x \in (-\infty, 0)$.

14. Реши ја неравенката: $\frac{9^x - 5\cdot 15^x + 4\cdot 25^x}{-9^x + 8\cdot 15^x - 15\cdot 25^x} < 0$.

Решение. Неравенката ќе ја запишеме во обликот $\frac{(\frac{3}{5})^{2x} - 5\cdot(\frac{3}{5})^x + 4}{-(\frac{3}{5})^{2x} + 8\cdot(\frac{3}{5})^x - 15} < 0$. Воведуваме смена $(\frac{3}{5})^x = t$ и последната неравенка ја запишуваме во облик $\frac{t^2 - 5t + 4}{-t^2 + 8t - 15} < 0$, т.е. $\frac{(t-1)(t-4)}{-(t-3)(t-5)}<0$, па затоа $\frac{(t-1)(t-4)}{(t-3)(t-5)}>0$. Решение на последната неравенка е множеството $(0,1)\cup(3,4)\cup(5,\infty)$. Според тоа, решение на почетната неравенка е множеството

$$x\in(-\infty,\log_{\frac{3}{5}}5)\cup(\log_{\frac{3}{5}}4,\log_{\frac{3}{5}}3)\cup(0,\infty).$$

15. Во рамнината одреди го множеството точки $M(x,y)$ чии координати го исполнуваат неравенството $\log_x(\log_y x)>0$.



Решение. Од дефиницијата на логаритамската функција имаме $x>0$ и $y>0$. Од друга страна од особините на логаритамската функција добиваме

$$\log_y x=\frac{1}{\log_x y}.$$

Сега неравенството го добива обликот

$$\log_x(\frac{1}{\log_x y})>0,$$

$$\log_x 1-\log_x\log_x y>0,$$

$$\log_x(\log_x y)<0.$$

Случај 1. $0<x<1$. Тогаш $\log_x y>1$, од каде што следува $0<y<x$.

Случај 2. $x>1$. Тогаш $0<\log_x y<1$, од каде што следува $1<y<x$.

Конечно, бараното множество е $M=M_1\cup M_2$, каде

$$M_1=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<x\},\text{ и } M_2=\{(x,y)\,|\,x>1,1<y<x\}.$$

16. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои решенијата на системот неравенки

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(3^x-6a)+\frac{2}{\log_a 3}<x-3\\ \log_{\frac{1}{3}}(3^x-18)>x-5\end{cases}$$

формираат интервал со должина $\frac{1}{3}$.

Решение. Првата неравенка има смисла за $a>0$, $a\neq 1$ и $3^x>6a$. При овие услови таа последователно е еквивалентно на неравенките

$$\log_{\frac{1}{3}}(3^x-6a)+\log_{\frac{1}{3}}a^2<x-3$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{3^x-6a}{a^2}<x-3$$

$$\frac{3^x-6a}{a^2}>3^{3-x}$$

$$3^{2x}-6a\cdot 3^x-27a^2>0$$

Ставаме $y=3^x>0$ и последната неравенка го добива облик $y^2-6ay-27a^2>0$, од каде добиваме $y>9a$, т.е. $x>\log_3 9a$.

Втората неравенка на системот последователно е еквивалентна на неравенките

$$0 < 3^x - 18 < 3^{5-x}$$

$$0 < 3^x(3^x - 18) < 3^5$$

$$18 < 3^x < 27$$

па затоа $x \in (\log_3 18, 3)$. Бидејќи $3 - \log_3 18 > \frac{1}{3}$ (провери!), добиваме дека условот на задачата е еквивалентен со $3 - \log_3 9a = \frac{1}{3}$, од каде добиваме $a = \sqrt[3]{9}$.

III ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. ОЈЛЕРОВА ФУНКЦИЈА

1. Ако $n>2, n\in\mathbb{N}$, тогаш $\varphi(n)$ е парен број. Докажи!

Решение. Нека $n=2^k m$, $k>1$ и m е непарен број. Тогаш

$$\varphi(n)=\varphi(2^k m)=\varphi(2^k)\varphi(m)=2^{k-1}\varphi(m),$$

па затоа $\varphi(n)$ е парен број. Понатаму, ако $n=p^k m$, p е непарен прост број и $\mathrm{NZD}(p,m)=1$, тогаш

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=\varphi(p^k m)=\varphi(p^k)\varphi(m)=(p^k-p^{k-1})\varphi(m)\\&=p^{k-1}(p-1)\varphi(m)\end{aligned},$$

па затоа $\varphi(n)$ е парен број.

2. Дадено е $\varphi(m)$. Пресметај $\varphi(2m)$.

Решение. Ако m е непарен број, тогаш $\mathrm{NZD}(2,m)=1$, па затоа

$$\varphi(2m)=\varphi(2)\varphi(m)=\varphi(m).$$

Ако m е парен број, тогаш $m=2^k p$ и $2m=2^{k+1}p$, каде p е непарен број, па затоа

$$\begin{aligned}\varphi(2m)&=\varphi(2^{k+1}p)=\varphi(2^{k+1})\varphi(p)=2^{k+1}(1-\tfrac{1}{2})\varphi(p)=2\cdot 2^k(1-\tfrac{1}{2})\varphi(p)\\&=2\varphi(2^k)\varphi(p)=2\varphi(2^k p)=2\varphi(m).\end{aligned}$$

3. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $\varphi(3^m 5^n)=600$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3^{m-1}5^{n-1}\cdot 2\cdot 4=600,$$

т.е. на равеката

$$3^{m-1}5^{n-1}=3\cdot 5^2.$$

Во множеството $\mathbb{N}$ решение на последната равенка е $m=2, n=3$.

4. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $\varphi(n)=11424$, ако $n=p^2q^2$ и p и q се прости броеви.

Решение. Од $n=p^2q^2$, каде p и q се прости броеви следува дека равенката $\varphi(n)=11424$ е еквивалентна на равенката

$$pq(p-1)(q-1)=2^5\cdot 3\cdot 7\cdot 17.$$

Со непосредна проверка добиваме дека решенија на последната равенка се $p=7, q=17$ и $p=17, q=7$, па затоа $n=7^2 17^2=14161$.

5. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{n}{2}$.

Решение. Јасно n мора да е парен број. Нека $n=2^a r$, каде r е непарен број и $a\in\mathbf{N}$. Равенката добива облик $2^{a-1}\varphi(r)=2^{a-1}r$, од каде следува $r=1$ и $n=2^a$, $a\in\mathbb{N}$.

6. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{n}{3}$.

Решение. Нека $n=2^a3^b r$, каде r е природен број кој не е делив со 2 и со 3 и $a,b\in\mathbb{N}$. Равенката добива облик $2^{a-1}3^{b-1}(3-1)\varphi(r)=2^a3^{b-1}r$, од каде следува $r=1$ и $n=2^a3^b,\ a,b\in\mathbb{N}$.

7. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{2n}{3}$.

Решение. Бројот $\frac{2n}{3}$ треба да е природен број, па затоа $3\,|\,n$. Нека $n=3^k m$, каде $k\geq 1, m\geq 1$ и $\mathrm{NZD}(3,m)=1$. Тогаш

$$\varphi(n)=\varphi(3^k m)=\varphi(3^k)\varphi(m)=2\cdot 3^{k-1}\varphi(m),$$

па ако замениме во дадената равенка добиваме

$$2\cdot 3^{k-1}\varphi(m)=\tfrac{2}{3}3^k m\text{, т.е. }\varphi(m)=m,$$

од каде следува $m=1$. Конечно, решенија на дадената равенка се броевите од облик $n=3^k, k\in\mathbb{N}$.

8. Реши ја равенката $\varphi(2n)=\varphi(3n)$.

Решение. Нека $n=2^a3^b r$, каде $a,b\geq 0$, $r>1$ и $\mathrm{NZD}(r,6)=1$. Со замена во дадената равенка последователно добиваме

$$\varphi(2^{a+1}3^b r)=\varphi(2^a3^{b+1}r),$$

$$\varphi(2^{a+1})\varphi(3^b)\varphi(r)=\varphi(2^a)\varphi(3^{b+1})\varphi(r)$$

$$2^a\varphi(3^b)=\varphi(2^a)\cdot 2\cdot 3^b.$$

Ако $b>0$, тогаш последната равенка го добива обликот

$$2^a\cdot 2\cdot 3^{b-1}=\varphi(2^a)\cdot 2\cdot 3^b\text{, т.е. }2^a=3\varphi(2^a),$$

што е противречност. Според тоа, $b=0$ и го добиваме равенството $2^a=2\varphi(2^a)$, т.е. $2^{a-1}=\varphi(2^a)$, кое е исполнето за секој $a\geq 1$. Значи, решение на задачата е $n=2^a r$, каде a е произволен природен број и r е произволен природен број заемно прост со 6.

9. Пресметај го збирот $\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+...+\varphi(p^a)$, каде p е прост број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+...+\varphi(p^a)&=1+(p-1)+p(p-1)+...+p^{a-1}(p-1)\\&=1+p-1+p^2-p+...+p^a-p^{a-1}=p^a.\end{aligned}$$

10. Ако n е парен совршен број, тогаш $\varphi(n)=2^{p-1}(2^{p-1}-1)$, за некој прост број p. Докажи!

Решение. Парен природен број n е совршен ако и само ако има облик

$$n=2^{p-1}(2^{p}-1),$$

каде $2^{p}-1$ е Мерсенов прост број. Според тоа,

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=\varphi(2^{p-1})\varphi(2^{p}-1)=2^{p-2}(2^{p}-1-1)\\&=2^{p-2}\cdot 2(2^{p-1}-1)=2^{p-1}(2^{p-1}-1).\end{aligned}$$

11. Во множеството природни броеви реши ја равенката $\tau(\varphi(3^{k}))=2^{k}$.

Решение. Имаме $\varphi(3^{k})=2\cdot 3^{k-1}$, па затоа

$$\tau(\varphi(3^{k}))=\tau(2\cdot 3^{k-1})=\tau(2)d(3^{k-1})=2k$$

и со замена во равенката добиваме $2k=2^{k}$, т.е. $k=2^{k-1}$. Но, $k=2^{k-1}$, за $k=1,2$ и $2^{k-1}>k$, за $k\geq 3$, добиваме дека решенија на дадената равенка се $k=1$ и $k=2$.

12. Најди ги сите природни броеви од облик $n=p^{k}, k\in\mathbb{N}$ и p е прост број такви што $\varphi(\tau(n))=\tau(\varphi(n))$.

Решение. Нека $n=p^{k}, k\in\mathbb{N}$ и p е прост број. Имаме $\varphi(\tau(p^{k}))=\varphi(k+1)$ и $\tau(\varphi(p^{k}))=\tau(p^{k-1}(p-1))=\tau(p^{k-1})\tau(p-1)=k\tau(p-1)$, па од условот на задачата добиваме $\varphi(k+1)=k\tau(p-1)$. Но, $\varphi(k+1)\leq k$ и $\tau(p-1)\geq 1$, па затоа последното равенство е можно ако и само ако $\tau(p-1)=1$ и $\varphi(k+1)=k$, од што следува дека $p-1=1$, т.е. $p=2$ и $q=k+1$ е прост број. Конечно, решение на задачата е $n=2^{q-1}$, каде q е прост број.

13. Нека $a,b\in\mathbb{N}$, $\mathrm{NZD}(a,b)=d$, $\mathrm{NZS}(a,b)=m$. Докажи, дека

$$\varphi(ab)=d\varphi(m).$$

Решение. Ако еден од броевите a или b е еднаков на 1, тогаш тврдењето е очигледно. Нека $a,b>1$. Имаме

$$a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k} \text{ и } b=p_1^{b_1}p_2^{b_2}...p_k^{b_k}$$

каде $p_1,p_2,...,p_k$ се различни прости броеви и $a_i\geq 0, b_i\geq 0$ и $a_i+b_i\geq 1$, за $i=1,2,...,k$. Тогаш

$$d=\mathrm{NZD}(a,b)=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k},\ m=\mathrm{NZS}(a,b)=p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_k^{m_k},$$

каде

$$n_i=\min\{a_i,b_i\}\geq 0,\quad m_i=\max\{a_i,b_i\}\geq 1,\ i=1,2,3,...,k.$$

Имаме

$$\varphi(ab)=\varphi(p_1^{a_1+b_1}p_2^{a_2+b_2}\dots p_k^{a_k+b_k})$$
$$=p_1^{a_1+b_1-1}p_2^{a_2+b_2-1}\dots p_k^{a_k+b_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_k-1)$$

и

$$d\varphi(m)=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}p_1^{m_1-1}p_2^{m_2-1}\dots p_k^{m_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_k-1)$$
$$=p_1^{m_1+n_1-1}p_2^{m_2+n_2-1}\dots p_k^{m_k+n_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_k-1)$$
$$=p_1^{a_1+b_1-1}p_2^{a_2+b_2-1}\dots p_k^{a_k+b_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_k-1)$$

па затоа $\varphi(ab)=d\varphi(m)$.

14. Докажи, дека $\varphi(n)+\sigma(n)\geq 2n$, при што знак за равенство важи ако и само ако $n=1$ или n е прост број.

Решение. Нека $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$. Имаме

$$\varphi(n)+\sigma(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}(1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})\dots(1-\tfrac{1}{p_k})+\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\dots\cdot\frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$$
$$=n[(1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})\dots(1-\tfrac{1}{p_k})+\frac{(1-p_1^{-(a_1+1)})(1-p_2^{-(a_2+1)})\dots(1-p_k^{-(a_k+1)})}{(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_k})}]$$
$$\geq 2n\sqrt{(1-p_1^{-(a_1+1)})(1-p_2^{-(a_2+1)})\dots(1-p_k^{-(a_k+1)})}\geq 2n,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $n=1$ или n е прост број.

15. Ако $n\in\mathbb{N}$, тогаш $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$, при што сумирањето е по сите позитивни делители на n. Докажи!

Решение. Нека $f(n)=\sum_{d|n}\varphi(d)$. Функцијата $f(n)$ е мултипликативна, односно $f(nm)=f(n)f(m)$, за секои m и n такви што $\mathrm{NZD}(m,n)=1$. Нека p е прост број и $a\geq 1$. Тогаш

$$f(p^a)=\sum_{d|p^a}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(p)+\ldots+\varphi(p^a)$$
$$=1+(p-1)+(p^2-p)+\ldots+(p^a-p^{a-1})=p^a.$$

Според тоа, ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$, тогаш

$$f(n)=f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\dots f(p_k^{a_k})=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}=n.$$

16. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви k такви што равенката $\varphi(n)=k$ нема решение.

Решение. Нека $k=2\cdot 7^m, m\geq 1$. Ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}$, тогаш

$$\varphi(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}(1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})\dots(1-\tfrac{1}{p_t})$$
$$=p_1^{a_1-1}p_2^{a_2-1}\dots p_t^{a_t-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_t-1).$$

Ако најмалку два од простите броеви $p_1, p_2, ..., p_t$ се непарни, тогаш $4 \mid \varphi(n)$, па затоа $\varphi(n) \neq k$. Ако $n = 2^a p^b$, каде $p \geq 3$, тогаш

$$\varphi(n) = 2^a p^b (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{p}) = 2^{a-1} p^{b-1}(p-1)$$

и лесно се покажува дека и во овој случај $\varphi(n) \neq k$.

17. Определи ги сите природни броеви n такви што $\varphi(\varphi(n)) + \varphi(n) = n$, каде $\varphi(k)$ е бројот на природните броеви помали или еднакви на k и заемно прости со k.

Решение. За функцијата $\varphi(k)$ важи $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ и $\varphi(k)$ е парен број ако $k > 2$. Освен тоа,

$$\varphi(2k) = \begin{cases} 2\varphi(k), & \text{ако } k \text{ е парен} \\ \varphi(k), & \text{ако } k \text{ е непарен.} \end{cases} \tag{1}$$

Нека n е решение. Ќе разгледаме два случаја.

Прв случај. Ако n е парен број, тогаш $n = 2^s m$, каде $s, m \in \mathbb{N}$ и m е непарен број. Ако замениме во условот последователно добиваме

$$\varphi(\varphi(2^s m)) + \varphi(2^s m) = 2^s m,$$
$$\varphi(2^{s-1}\varphi(m)) + 2^{s-1}\varphi(m) = 2^s m.$$

Ако $m = 1$, тогаш последното равенство го добива видот $\varphi(2^{s-1}) = 2^{s-1}$ и единствена можност е $s = 1$, од што следува $n = 2$. Ако $m > 1$, тогаш $\varphi(m)$ е парен број и од (1) следува

$$2^{s-1}\varphi(\varphi(m)) + 2^{s-1}\varphi(m) = 2^s m$$
$$\varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) = 2m.$$

Но, $\varphi(m) < m$, за секој $m > 1$, па затоа $\varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) \leq \varphi(m) + \varphi(m) < 2m$, што е противречност.

Втор случај. Ако n е непарен, тогаш $\varphi(n) = 1$ или $\varphi(n) = 2^s k$, каде $s, k \in \mathbb{N}$ и k е непарен број.

Случајот $\varphi(n) = 1$, доведува до $n = \varphi(1) + 1 = 2$, што е противречност.

Ако $\varphi(n) = 2^s k$, каде $s, k \in \mathbb{N}$ и k е непарен број, тогаш со замена во условот добиваме

$$\varphi(2^s k) + 2^s k = n$$
$$2^{s-1}\varphi(k) + 2^s k = n.$$

Но, n е непарен број, па последното равенство е можно ако и само ако $s = k = 1$, што значи $n = 3$.

Конечно, $n = 2$ и $n = 3$ се единствени решенија на задачата.

18. Определи ги сите природни броеви m и n за кои важи $n = m^{\varphi(n)} - 1$.

Решение. Ако $n = 1$, тогаш $m = 2$. Нека $n > 1$. Од условот $n = m^{\varphi(n)} - 1$ следува дека $\text{NZD}(m,n)=1$. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разложување на n. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $p_1^{\alpha_1}<p_2^{\alpha_2}<...<p_k^{\alpha_k}$.

Прв случај. Нека $k\geq 2$, За $t=p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ имаме $m^{\varphi(n)}-1=(m^{\varphi(t)}-1)M$, каде $M>m^{\varphi(t)}$. Бидејќи t е делител на $m^{\varphi(t)}-1$, заклучуваме дека $M\leq p_1^{\alpha_1}$, што е противречност бидејќи $p_1^{\alpha_1}<t<m^{\varphi(t)}-1<M\leq p_1^{\alpha_1}$.

Втор случај. Нека $k=1$, т.е. $n=p^{\alpha}$, каде $\alpha\geq 2$. Тогаш $\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)$ и за $t=p^{\alpha-2}(p-1)$ имаме $m^{\varphi(n)}-1=(m^t-1)M$, каде $M>m^t$. Бидејќи $p^{\alpha-1}$ е делител на m^t-1, заклучуваме дека $M\leq p$ и како во претходниот случај добиваме противречност.

Трет случај. Нека $n=p$ е прост број. Тогаш $\varphi(n)=\varphi(p)=p-1$. Ако $p=2$, тогаш $m=3$. Ако $p>2$, тогаш $p-1=2s$. Сега, од $p=(m^s-1)(m^s+1)$ следува, дека $m^s-1=1$, т.е. $s=1$ и $m=2$. Тоа значи, дека $p=3$.

Конечно, бараните вредности се $(n,m)=(1,2),(2,3),(3,2)$.

19. Ако n е сложен природен број, тогаш $\varphi(n)\leq n-\sqrt{n}$. Докажи!

Решение. Нека n е сложен и $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е неговот канонично претставување. Тоа значи дека n има прост множител $p_j\leq\sqrt{n}$, па затоа важи

$$\varphi(n)=p_1^{a_1-1}p_2^{a_2-1}...p_k^{a_k-1}(1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})...(1-\tfrac{1}{p_k})\leq n(1-\tfrac{1}{p_j})\leq n(1-\tfrac{1}{\sqrt{n}})=n-\sqrt{n}.$$

20. Нека n е непарен природен број таков што броевите $\varphi(n)$ и $\varphi(n+1)$ се степени на бројот 2 . Докажи, дека $n+1$ е степен на бројот 2 или $n+1=5$.

Решение. Ако $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{r_i}$ е каноничното претставување на бројот n, тогаш $\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{r_i-1}(p_i-1)$, па бидејќи $\varphi(n)$ нема други степени освен бројот 2, мора да важи $r_i=1$ и $p_i-1=2^{b_i}$ за секој i и некои b_i. Но, бројот $2^{b_i}+1$ може да биде прост само ако бројот b_i е степен на бројот 2, добиваме дека $2^{2^{c_i}}+1$, за некои различни c_i.

Нека претпоставиме дека бројот $n+1$ не е степен на бројот 2. Бидејќи бројот $\varphi(n+1)$ е степен на бројот 2 следува дека сите непарни прости делители на бројот $n+1$ се од облик $2^{2^{d_i}}+1$. Според тоа,

$$n=\prod_{i=1}^{k}(2^{2^{c_i}}+1) \text{ и } n+1=\prod_{j=1}^{l}(2^{2^{d_j}}+1),$$

при што сите c_i и d_j се различни меѓе себе. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c_1 < c_2 < ... < c_k$ и $d_1 < d_2 < ... < d_l$.

За секои $m, M \in \mathbb{N}, m \le M$, со едноставна индукција се докажува дека важи

$$\frac{2^{2^m}+1}{2^{2^m}} < \prod_{i=m}^{M} \frac{2^{2^i}+1}{2^{2^i}} = \frac{2^{2^m}}{2^{2^m}-1} \cdot \frac{2^{2^{M+1}}-1}{2^{2^{M+1}}} < \frac{2^{2^m}}{2^{2^m}-1}.$$

Оттука добиваме

$$\frac{2^{2^{c_1}}+1}{2^{2^{c_1}}} 2^c \le n < \frac{2^{2^{c_1}}}{2^{2^{c_1}}-1} 2^c \text{ и } \frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}} 2^d \le n+1 < \frac{2^{2^{d_1}}}{2^{2^{d_1}}-1} 2^d,$$

каде $c = \sum_{i=1}^{k} 2^{c_i}$ и $d = \sum_{j=1}^{l} 2^{d_j}$. Од горните неравенства следува дека $c = d$. Ако $d_1 > c_1$, тогаш $\frac{2^{2^{d_1}}}{2^{2^{d_1}}-1} < \frac{2^{2^{c_1}}+1}{2^{2^{c_1}}}$, па затоа $n+1 < n$, што е противречност. Според тоа, $d_1 < c_1$, па тогаш

$$n+1 \ge \frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}} 2^d > \frac{2^{2^{c_1}}}{2^{2^{c_1}}-1} 2^c > n,$$

па затоа

$$\frac{n+1}{n} > \frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}} \cdot \frac{2^{2^{c_1}}-1}{2^{2^{c_1}}}.$$

Но, $n \ge 2^{2^{c_1}} + 1 \ge a^2 + 1$, за $a = 2^{2^{d_1}}$, па затоа

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} > \frac{(a+1)(a^2-1)}{a^3} = 1 + \frac{a^2-a-1}{a^3},$$

од каде следува $a^2 + 1 \le n < \frac{a^3}{a^2-a-1}$. Единствена можност е $a = 2$ и $n = 5$.

21. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број $n > m$ таков што декадниот запис на 5^n се добива од декадниот запис на 5^m со додавање на неколку цифри од лево.

Решение. Прво ќе докажеме, дека ако бројот 5^m има k цифри, тогаш $k \le m$. Навистина, ако го претпоставиме спротивното, тогаш $k-1 \ge m$, па како секој број со k цифри е поголем или еднаков на 10^{k-1} добиваме $10^{k-1} \ge 10^m > 5^m \ge 10^{k-1}$, што е противречност.

Ако најдеме n таков што $5^n - 5^m$ се дели со 10^k, тогаш последните k цифри на 5^n се совпаѓаат со бројот 5^m, т.е. 5^n се добива од 5^m со додавање на неколку цифри од лево. Бидејќи броевите 2 и 5 се заемно прости, заклучуваме дека бројот $5^{\varphi(2^k)} - 1$ е делив со 2^k, каде $\varphi(x)$ е Ојлеровата функција. Тогаш бројот

$$5^{m+\varphi(2^k)} - 5^m = 5^m(5^{\varphi(2^k)} - 1)$$

е делив со 5^k и со 2^k, т.е. се дели со 10^k. Значи, $n = m + \varphi(2^k)$ е бројот со саканото својство.

2. ТЕОРЕМА НА ОЈЛЕР

1. Даден е природен број $n>1$. Докажи, дека постојат n последователни природни броеви чиј производ е делив со сите прости броеви помали или еднакви на $2n+1$ и не е делив со ниту еден друг прост број.

Решение. Ако бројот $n+1$ е сложен, тогаш броевите $n+2, n+3, ..., 2n+1$ го имаат саканото својство. Навистина, нивниот производ очигледно е делив со сите прости броеви од интервалот $[n+2, 2n+1]$, но не е делив со простите броеви поголеми од $2n+1$. Освен тоа, за секој прост број $p \le n$ меѓу множителите имаме полн систем на остатоци по модул p, па значи производот е делив со p.

Ако $n+1$ е прост број, тогаш тој е непарен и $n+2$ е парен, што значи дека е сложен број. Сега да ги разгледаме броевите $n+3, n+4, ..., 2n+2$. Како и претходно, лесно се гледа дека нивниот производ P е делив со сите прости броеви од интервалите $[1,n]$ и $[n+3, 2n+2]$, но не е делив со простите броеви поголеми од $2n+1$ (бидејќи $2n+2$ е сложен). Освен тоа P е делив со $n+1=\frac{2n+2}{2}$.

2. Докажи, дека $2^{340}-1$ не е прост број.

Решение. Од теоремата на Ојлер следува

$$2^{10}=2^{\varphi(11)}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,11).$$

Значи,

$$2^{340}=(2^{10})^{34}\equiv 1^{34}\ (\mathrm{mod}\,11),\text{ т.е. } 11\,|\,(2^{340}-1).$$

Според тоа, $2^{340}-1$ не е прост број.

3. Докажи, дека за секој природен број n бројот 5^{n+1} е делител на $N=1+2^{2\cdot 5^n}$.

Решение. Од теоремата на Ојлер имаме $2^{4\cdot 5^n}\equiv 2^{\varphi(5^{n+1})}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,5^{n+1})$. Значи, 5^{n+1} е делител на $(2^{2\cdot 5^n}+1)(2^{2\cdot 5^n}-1)$. Двата множители во последниот производ се заемно прости и $5\nmid(2^{2\cdot 5^n}-1)$ (провери!), па затоа $5^{n+1}\,|\,(2^{2\cdot 5^n}+1)$.

4. Ако $\mathrm{NZD}(p,q)=1,\ p\ge 2$, тогаш низата $\{\frac{p^n}{qn+1}, n\in\mathbb{N}\}$ содржи бесконечно многу цели броеви. Докажи!

Решение. Од $\mathrm{NZD}(p,q)=1$ следува $\mathrm{NZD}(p^k,q)=1$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Значи, за секој природен број k ќе важи $q\,|\,p^{k\varphi(q)}-1$. Нека $n_k=\frac{p^{k\varphi(q)}-1}{q}$. Тогаш важи

$$\frac{p^{n_k}}{qn_k+1}=\frac{p^{n_k}}{p^{k\varphi(q)}}=p^{n_k-k\varphi(q)}.$$

Бидејќи $p\ge 2$, за доволно големо k ќе важи $n_k\ge k\varphi(q)$.

5. Нека $\mathrm{NZD}(a,n)=1$ и $b-c=k\varphi(n)$. Докажи, дека a^b-a^c е делив со n.

Решение. Според теоремата на Ојлер важи $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$, па затоа

$$a^{k\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n).$$

Последната конгруенција ја множиме со a^c и добиваме

$$a^{k\varphi(n)}a^c\equiv a^c(\mathrm{mod}\,n), \text{ т.е. } a^{c+k\varphi(n)}\equiv a^c(\mathrm{mod}\,n).$$

Но, $b=c+k\varphi(n)$, па затоа $a^b\equiv a^c(\mathrm{mod}\,n)$, што значи $n\,|\,(a^b-a^c)$.

6. Нека a и b се природни броеви за кои важи

$$\mathrm{NZD}(a,2013)=\mathrm{NZD}(b,2013)=1$$

и $a>b$. Докажи дека бројот $a^{1200}-b^{1200}$ има најмалку три прости делители.

Решение. Од $2013=3\cdot 11\cdot 61$ следува

$$\varphi(2013)=2013\cdot(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{11})(1-\tfrac{1}{61})=1200.$$

Од теоремата на Ојлер следува

$$a^{1200}=a^{\varphi(2013)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2013) \text{ и } b^{1200}=b^{\varphi(2013)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2013).$$

Затоа $2013\,|\,a^{1200}-1$ и $2013\,|\,b^{1200}-1$. Според тоа, $2013\,|\,a^{1200}-b^{1200}$, што значи дека простите броеви 3, 11 и 61 се делители на $a^{1200}-b^{1200}$.

7. Определи ги последните две цифри во декадниот запис на бројот 137^{42}.

Решение. Бидејќи $\mathrm{NZD}(137,100)=1$ од теоремата на Ојлер следува

$$137^{\varphi(100)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100).$$

Но, $100=2^2 5^2$, па затоа

$$\varphi(100)=100(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{5})=40,$$

од што следува дека $137^{40}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Од друга страна $137\equiv 37(\mathrm{mod}\,100)$, па затоа $137^2\equiv 1369\equiv 69(\mathrm{mod}\,100)$. Конечно,

$$137^{42}\equiv 69(\mathrm{mod}\,100)$$

што значи дека последните две цифри на бројот 137^{42} се 6 и 9.

8. Определи го остатокот од делењето на бројот $(12371^{76}+34)^{150}$ со 111.

Решение. Бидејќи $\mathrm{NZD}(12371,111)=1$, од теоремата на Ојлер следува

$$12371^{\varphi(111)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,111).$$

Понатаму, $111=3\cdot 37$, па затоа $\varphi(111)=(3-1)(37-1)=72$. Според тоа,

$$12371^{72}\equiv 1(\mathrm{mod}\,111).$$

Исто така, $12371\equiv 50(\mathrm{mod}\,111)$, па затоа

$$12371^2\equiv 50^2\equiv 58(\mathrm{mod}\,111) \text{ и } 12371^4\equiv 58^2\equiv 34(\mathrm{mod}\,111).$$

Оттука,

$$12371^{76} \equiv 34 (\bmod 111) \text{ и } 12371^{76} + 34 \equiv 68 \equiv -43 (\bmod 111) .$$

Но, $\mathrm{NZD}(43,111) = 1$, па затоа од теоремата на Ојлер следува дека

$$43^{72} \equiv 1 (\bmod 111) ,$$

што значи

$$43^{144} \equiv 1 (\bmod 111) .$$

Од друга страна

$$43^2 = 1849 \equiv -38 (\bmod 111) ,$$

$$43^4 = 38^2 = 1444 \equiv 1 (\bmod 111) \text{ и}$$

$$43^6 \equiv -38 \equiv 73 (\bmod 111)$$

што значи дека

$$(12371^{76} + 34)^{150} \equiv (-43)^{150} \equiv 43)^{144} 43)^6 \equiv 73 (\bmod 111) .$$

Конечно, бараниот остаток е 73.

9. Определи ги сите природни броеви во чиј декаден запис се појавува само цифрата 9 и кои се деливи со 7.

Решение. Бараните броеви се до облик $10^n - 1$. Најмалиот број n за кој $10^n - 1 \equiv 0 (\bmod 7)$, односно $10^n \equiv 1 (\bmod 7)$ е бројот $\varphi(7) = 6$. Значи, $n = 6k,$ $k \in \mathbb{N}$. Конечно, бараните броеви имаат $6k$ цифри и сите цифри им се еднакви на 9.

10. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека $2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 1 (\bmod 9)$.

Решение. Имаме $\varphi(9) = 6$. Бидејќи n е непарен број важи $n = 6q + r$, $r = 1, 3$ или 5. Од теоремата на Ојлер следува $2^6 \equiv 1 (\bmod 9)$, па затоа $2^{6q} \equiv 1 (\bmod 9)$ што значи дека

$$2^n \equiv 2^{6q+r} \equiv 2^r (\bmod 9) \text{ и } 2^{n-1} \equiv 2^{6q+r-1} \equiv 2^{r-1} (\bmod 9) .$$

Според тоа,

$$2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 2^{r-1}(2^r - 1) (\bmod 9) ,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$2^{r-1}(2^r - 1) \equiv 1 (\bmod 9) , \text{ за } r = 1, 3 \text{ и } 5,$$

што се проверува непосредно.

11. Нека n е природен број кој не е делив ниту со 2, ниту со 3, ниту со 5. Докажи, дека бројот со $\varphi(n)$ цифри, кај кој сите цифри се единици, е делив со n.

Решение. Бидејќи $\mathrm{NZD}(10, n) = 1$, од теоремата на Ојлер следува конгруенцијата $10^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 (\bmod n)$. Бројот $10^{\varphi(n)} - 1$ има $\varphi(n)$ цифри и сите цифри се деветки. Но, $\mathrm{NZD}(9, n) = 1$ и ако конгрунцијата ја поделиме со 9 добиваме број со $\varphi(n)$, кај кој сите цифри се единици и кој е делив со n.

12. Докажи, дека последните $2k$ цифри на бројот $2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}-2^{2k}$ се нули.

Решение. Броевите 2 и 5^n се заемно прости и $\varphi(5^n)=4\cdot 5^{n-1}$, па од теоремата на Ојлер следува

$$2^{4\cdot 5^{n-1}}\equiv 1(\bmod 5^n).$$

Ако во горната конгруенција ставиме $n=2k$, добиваме

$$2^{4\cdot 5^{2k-1}}\equiv 1(\bmod 5^{2k}),$$

па затоа $5^{2k}\,|\,(2^{4\cdot 5^{2k-1}}-1)$, од што следува $2^{2k}5^{2k}\,|\,2^{2k}(2^{4\cdot 5^{2k-1}}-1)$, односно . $10^{2k}\,|\,(2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}-2^{2k})$, што значи дека последните $2k$ цифри на бројот $2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}-2^{2k}$ се нули.

13. Нека a е природен број. Определи го остатокот при делењето на бројот a^{100} со 125.

Решение. Ако $\mathrm{NZD}(a,5)=5$, тогаш $125\,|\,a^{100}$. Ако $\mathrm{NZD}(a,5)=1$, тогаш од теоремата на Ојлер следува

$$a^{100}=a^{4\cdot 5^2}=a^{\varphi(125)}\equiv 1(\bmod 125).$$

Конечно, бараните остатоци се 0 и 1.

14. Најди го остатокот при делењето на збирот

$$S=1^{100}+2^{100}+3^{100}+...+1997^{100}$$

со 125.

Решение. Имаме

$$\varphi(125)=\varphi(5^3)=5^3(1-\tfrac{1}{5})=100.$$

Од теоремата на Ојлер добиваме: ако $\mathrm{NZD}(a,5)=1$, тогаш $a^{100}\equiv 1\ (\bmod 125)$, а ако $\mathrm{NZD}(a,5)>1$, тогаш $5\,|\,a$ и $5\,|\,a^{100}$, т.е. $a^{100}\equiv 0\ (\bmod 125)$. Останува да пресметаме колку броеви од 1 до 1997 не се делливи со 5. Бидејќи $\left[\frac{1997}{5}\right]=399$, такви броеви вкупно се $1997-399=1598$. Според тоа

$$S=1^{100}+2^{100}+3^{100}+...+1997^{100}\equiv 1598\equiv 98\ (\bmod 125),$$

т.е. бараниот број е 98.

15. Определи ги сите природни броеви $n>1$ за кои бројот

$$1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$$

е делив со n.

Решение. Сите непарни броеви поголеми од 1 го задоволуваат условот на задачата. Навистина, ако $n=2t+1$, тогаш $\frac{n-1}{2}=t$ е природен број и за $k=1,2,...,\frac{n-1}{2}$ важи $n\,|\,k^n+(n-k)^n$. Значи, $n\,|\,1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$.

Нека сега n е парен број и нека $2^s m = n$, m е непарен број. Бидејќи $s < 2^s$, заклучуваме дека за парни k важи $2^s \mid k^n$, а за непарните k, чиј број е $\frac{n}{2}$, од теоремата на Ојлер имаме $2^{k^{s-1}} \equiv 1(\bmod 2^s)$, па затоа и $k^n \equiv 1(\bmod 2^s)$ и оттука

$$1^n + 3^n + \ldots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \tfrac{n}{2}(\bmod 2^s).$$

Според тоа, од

$$2^n + 4^n + \ldots + (n-2)^n \equiv 0(\bmod 2^s)$$

добиваме

$$1^n + 2^n + \ldots + (n-2)^n + (n-1)^n \equiv \tfrac{n}{2}(\bmod 2^s).$$

Ако сега претпоставиме, дека $n \mid 1^n + 2^n .. + (n-1)^n$, тогаш бидејќи $2^s \mid n$, ја добиваме конгруенцијата $0 \equiv \frac{n}{2}(\bmod 2^s)$ од која следува $2^s \mid \frac{n}{2}$, што противречи на $n = 2^s m,\ m$ е непарен број. Конечно, ако n парен број, тогаш

$$n \nmid 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n.$$

16. Докажи дека ако a и b се заемно прости природни броеви, тогаш постојат цели броеви m и n така што $a^m + b^n \equiv 1(\bmod ab)$.

Решение. Нека $m = \varphi(b)$ и $n = \varphi(a)$, каде φ е Ојлерова функција. Од теоремата на Ојлер имаме $a^m = a^{\varphi(b)} \equiv 1(\bmod b)$. Значи, $a^m + b^n \equiv 1(\bmod b)$, т.е. важи $b \mid a^m + b^n - 1$. На ист начин добиваме $a^m + b^n \equiv 1(\bmod a)$ односно $a \mid a^m + b^n - 1$. Но, a и b се заемно прости, па затоа $ab \mid a^m + b^n - 1$, т.е. $a^m + b^n \equiv 1(\bmod ab)$.

17. Докажи дека постои природен број $n > 2$ таков што $1991 \mid 1\underbrace{99...9}_{n}1$.

Решение. Имаме

$$1\underbrace{99...9}_{n}1 = 1\cdot 10^{n+1} + 9(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10) + 1 = 10^{n+1} + 9\cdot 10\cdot \tfrac{10^n-1}{10-1}$$

$$= 10^{n+1} + 10^{n+1} - 9 = 2\cdot 10^{n+1} - 9.$$

Нека $n = 1800k + 2$. Бидејќи $\varphi(1991) = \varphi(11\cdot 181) = 1991\cdot(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{181}) = 1800$, од теоремата на Ојлер следува

$$1\underbrace{99...9}_{n}1 = 2\cdot 10^{n+1} - 9 = 2\cdot 10^{1800k+3} - 9 \equiv 2\cdot 10^{1800k+3} - 2000$$

$$\equiv 2000\cdot((10^{\varphi(1991)})^k - 1) \equiv 2000\cdot(1^k - 1) \equiv 0(\bmod 1991)$$

т.е. $1991 \mid 1\underbrace{99...9}_{n}1$.

18. Докажи, дека ако n е непарен природен број, тогаш $n \mid 2^{n!} - 1$.

Решение. Ако n е природен број, тогаш $\varphi(n)\,|\,n!$. Навистина, за $n=1$ тоа е очигледно, а ако $n>1$ и $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разложување на n, каде $p_1<p_2<...<p_k$, тогаш

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}...p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\,|\,n!,$$

бидејќи $p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}...p_k^{\alpha_k-1}\,|\,n$, а $p_k-1<p_k\le n$, па затоа

$$p_1-1<p_2-1<...<p_k-1$$

се различни природни броеви помали од n т.е

$$(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\,|\,(n-1)!.$$

Сега, бидејќи n е непарен природен број, од теоремата на Ојлер имаме $2^{\varphi(n)}\equiv 1(\text{mod }n)$. Според тоа,

$$2^{n!}=(2^{\varphi(n)})^{\frac{n!}{\varphi(n)}}\equiv 1(\text{mod }n).$$

19. Докажи, дека за секој природен број s постои природен број n кој се дели со s и чиј збир на цифри е s.

Решение. Нека s е даден природен број, $s=2^{\alpha}5^{\beta}t$, каде α,β се цели ненегативни броеви, а t е природен број кој не се дели ниту со 2, ниту со 5. Од теоремата на Ојлер следува $10^{\varphi(t)}\equiv 1(\text{mod}\,t)$. Нека

$$n=10^{\alpha+\beta}(10^{\varphi(t)}+10^{2\varphi(t)}+\ldots+10^{s\varphi(t)}).$$

Бројот n се дели со s, бидејќи $2^{\alpha}5^{\beta}\,|\,10^{\alpha+\beta}$ и бидејќи $t\,|\,s$ добиваме

$$10^{\varphi(t)}+10^{2\varphi(t)}+\ldots+10^{s\varphi(t)}\equiv s\equiv 0(\text{mod}\,t).$$

Од друга страна, јасно, збирот на цифрите на бројот n е s.

20. Нека k и n се природни броеви такви што $k<2^{n+1}$. Докажи, дека бројот $1^{2^n}+2^{2^n}+...+k^{2^n}$ е делив со 2^n ако и само ако $k=2^{n+1}-1$.

Решение. Нека $k<2^{n+1}$ е таков природен број што бројот

$$S(n,k)=1^{2^n}+2^{2^n}+...+k^{2^n}$$

е делив со 2^n. Бидејќи $(2i)^{2^n}$ е делив со 2^{2^n}, доволно е да ги разгледаме само непарните собирци во $S(n,k)$. Ако j е непарен, тогаш од теорема на Ојлер следува $j^{2^{n-1}}\equiv 1(\text{mod}\,2^n)$, па затоа $j^{2^n}\equiv 1\,(\text{mod}\,2^n)$. Тогаш

$$S(n,k)\equiv[\tfrac{k+1}{2}](\text{mod}\,2^n).$$

Јасно, $[\frac{k+1}{2}]\le 2^n$, при што знак за равенство важи само ако $k=2^{n+1}-1$.

21. Нека k е природен број и m е непарен цел број. Докажи, дека постои природен број n таков што 2^k е делител на n^n-m.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. За $k=1$ можеме даземеме произволен непарен број n. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е таков што $n_0^{n_0} \equiv m (\mod 2^k)$. Јасно, n_0 е непарен број.

Ако $n_0^{n_0} \equiv m (\mod 2^{k+1})$, тогаш нема што да докажуваме. Во спротивно ќе докажеме дека бројот $n = n_0 + 2^k$ го има саканото својство.

Имаме $n_0^{n_0} - m = 2^k d$, каде d е непарен број и затоа бројот $n_0^{n_0} - m - 2^k = 2^k (d-1)$ е делив со 2^{k+1}. Од теоремата на Ојлер следува дека $n^{2^k} \equiv 1 (\mod 2^{k+1})$. Затоа

$$n^n = n^{n_0 + 2^k} = n^{n_0} n^{2^k} \equiv n^{n_0} = (n_0 + 2^k)^{n_0} \equiv n_0^{n_0} + \binom{n_0}{1} n_0^{n_0 - 1} 2^k$$

$$\equiv m + 2^k + n_0^{n_0} 2^k = m + (n_0^{n_0} + 1) 2^k \equiv m (\mod 2^{k+1}).$$

Според, $n^n - m \equiv 0 (\mod 2^{k+1})$, па од принципот на математичка индукција следува тврдењето на задачата.

22. Докажи, дека за секои природни броеви m и n постојат бесконечно многу заемно прости природни броеви a и b такви што $a+b$ е делител на $am^a + bn^b$.

Решение. Ако $m=n=1$, тогаш условот е исполнет за секои два заемно прости броеви a и b. Нека $mn \geq 2$. Бидејќи

$$n^a (am^a + bn^b) = (a+b) n^{a+b} + a[(mn)^a - n^{a+b}],$$

доволно е да докажеме, дека постојат бесконечно многу парови заемно прости броеви a и b такви што $a+b$ е делител на $(mn)^a - n^{a+b}$ и $\mathrm{NZD}(a+b, n) = 1$.

Нека $p = a+b$ е прост број. Треба да докажеме дека постојат бесконечно многу парови (p, a), каде p е прост број и $1 \leq a \leq p-1$, такви што p е делител на $(mn)^a - n^p$.

Од теоремата на Ферма следува дека ако $a_1 \equiv a_2 (\mod p-1)$, $a_1 \geq 1, a_2 \geq 1$, тогаш $(mn)^{a_1} \equiv (mn)^{a_2} (\mod p)$.

Според тоа, доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу прости броеви p и природни броеви a такви што p е делител на $(mn)^a - n$.

Нека претпоставиме, дека постојат само конечно многу прости броеви $p_1, p_2, ..., p_r$ кои се делители на броевите од видот $(mn)^a - n$. Тогаш

$$(mn)^2 - n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}, \qquad (1)$$

каде α_i се ненегативни цели броеви. Понатаму, за

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} (p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_r - 1) + 2$$

имаме

$$(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r} \qquad (2)$$

каде β_i се ненегативни цели броеви.

Ако p_i е делител на n, тогаш од (2) и $a \geq 2$ следува дека $p_i^{\beta_i}$ е делител на n, па затоа $p_i^{\beta_i}$ е делител на $(mn)^2 - n$. Сега, од (1) следува дела $\beta_i \leq \alpha_i$. Ако p_i не е делител на n, тогаш p_i не е делител и на m. Значи, $\text{NZD}(p_i^{\alpha_i+1}, mn) = 1$ и бидејќи $\varphi(p_i^{\alpha_i+1})$ е делител на $a-2$ од теоремата на Ојлер следува, дека

$$(mn)^a - n \equiv (mn)^2 - n (\text{mod}\, p_i^{\alpha_i+1}).$$

Но, $p_i^{\alpha_i+1}$ не е делител на $(mn)^2 - n$, па затоа од претходната конгруенција следува дека $p_i^{\alpha_i+1}$ не е делител и на $(mn)^a - n$. Според тоа, $\beta_i \leq \alpha_i$. Од досега изнесеното следува дека

$$(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r} \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} = (mn)^2 - n,$$

што противречи на $a > 2$. Конечно, од добиената противречност следува дека постојат бесконечно многу прости броеви p и природни броеви a такви што p е делител на $(mn)^a - n$.

23. Даден е природен број a. Докажи, дека

а) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p \,|\, a^n + n$,

б) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p^2 \,|\, a^n + n$.

Решение. Очигледно а) следува од б), но ќе дадеме одделни докази за двете тврдења. Јасно, ако $p \,|\, a$, тогаш доволно е да ги земеме природните броеви n кои се деливи со p^2, а такви има бесконечно многу.

а) Малата теорема на Ферма дава идеја да бараме n таков што се исполнети конгруенциите $n \equiv 0(\text{mod}\, p-1)$ и $n \equiv -1(\text{mod}\, p)$, бидејќи тогаш важи $a^n \equiv 1(\text{mod}\, p)$ и $n \equiv -1(\text{mod}\, p)$, па затоа $a^n + n \equiv 0(\text{mod}\, p)$. Од кинеската теорема за остатоци следува дека постојат бесконечно многу такви броеви n. Од $n \equiv 0(\text{mod}\, p-1)$ следува $n = s(p-1)$ и тогаш од $n \equiv -1(\text{mod}\, p)$ добиваме $s \equiv 1(\text{mod}\, p)$, т.е. $s = kp + 1$. Според тоа, $n = (p-1)(kp+1), k \geq 0$ е цел број.

б) Ако ја искористиме теоремата на Ојлер за

$$a^{\varphi(p^2)} \equiv 1(\text{mod}\, p^2), \varphi(p^2) = p(p-1)$$

за најдените вредности во а) добиваме

$$a^n + n = a^{kp(p-1)} a^{p-1} + kp^2 - kp + p - 1 \equiv a^{p-1} - kp + p - 1(\text{mod}\, p^2).$$

Според тоа, доволно е да избереме k таков што $k \equiv \frac{a^{p-1}-1}{p} + 1(\text{mod}\, p)$ и да добиеме $a^n + n \equiv 0(\mathrm{mod}\ p^2)$.

24. Нека се a и n природни броеви. Докажи дека постои природен број m таков што n е делител на $a^m - m$.

Решение. Ако $a=1$, тогаш можеме да земеме $m=kn+1$ и притоа лесно се проверува дека важи $n \mid a^m - m$.

Ако $a \geq 2$, со индукција по n ќе докажеме дека за секој пар (a,n) постојат бесконелно многу броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

Ако $n=1$, тогаш тврдењето е очигледно.

Нека $n>1$ и нека тврдењето е точно за сите броеви помали од n. Нека

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} ... q_l^{\beta_l} \text{ и } n = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_k^{\gamma_k} r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} ... r_s^{\delta_s},$$

каде p_i, q_i, r_i се прости броеви такви што $q_i \neq r_j$ за секои i, j, а $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ се природни броеви. Нека

$$b = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_k^{\gamma_k} \text{ и } c = r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} ... r_s^{\delta_s}.$$

Тогаш $n = bc$ и $\mathrm{NZD}(a,c)=1$. Ако $c=1$, за $m=kn$ и доволно голем k важи $n \mid a^m - m$ (сите прости делители на n учествуваат во факторизацијата на бројот a). Ако $c \neq 1$, тогаш важи $1 \leq \varphi(c) < c$, па од индуктивната претостака постојат бесконечно многу t такви што $\varphi(c) \mid a^t - t$. Според тоа, $c \mid a^{a^t - t} - 1$. Како во случајот $c=1$ за доволно големо t важи $b \mid a^t$, па затоа

$$n = bc \mid a^t (a^{a^t - t} - 1) = a^{a^t} - a^t,$$

за доволно големо t.

3. ТЕОРЕМА НА ВИЛСОН

1. Нека p е прост број. Докажи, дека за секој $k = 0,1,2,..., \ p-1$ важи

$$k!(p-k-1)! + (-1)^k \equiv 0(\mathrm{mod}\ p).$$

Решение. Да означиме $a_k = k!(p-k-1)+(-1)^k$. Имаме

$$\begin{aligned} a_k + a_{k+1} &= k!(p-k-1)! + (-1)^k + (k+1)!(p-k-2)! + (-1)^{k+1} \\ &= k!(p-k-2)![p-k-1+k+1] \\ &= k!(p-k-2)!\,p \end{aligned}$$

па затоа $a_k + a_{k+1} \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, за $k = 0,1,2,...,p-2$. Но, од теоремата на Вилсон следува дека $a_0 = (p-1)!+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, со замена за $k=0$ во претходната конгруенција добиваме $a_0 + a_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, т.е. $a_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. Повторувајќи ја постапката за $k = 1,2,...,p-2$ добиваме $a_{k+1} \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, што и требаше да се докаже.

2. Нека p е прост број и $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ се последователни природни броеви. Определи го остатокот од делењето на бројот $a_1 a_2 ... a_{p-1}$ со бројот p.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 < a_2 < ... < a_{p-1}$. Ако еден од овие броеви е делив со p, тогаш бараниот остаток е 0. Нека ниту еден од броевите $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ не се дели со p. Ако $a_1 \equiv r \pmod p$ и $2 \le r \le p-1$, тогаш $2 \le p-r+1 \le p-1$ и притоа важи $a_{p-r+1} \equiv 0 \pmod p$, што е противречност. Според тоа, имаме

$$a_1 \equiv 1 \pmod p,\ a_2 \equiv 2 \pmod p,\ ...,\ a_{p-1} \equiv p-1 \pmod p,$$

па затоа ако ја искористиме теоремата на Вилсон добиваме

$$a_1 a_2 ... a_{p-1} \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

3. Докажи, дека ако p е непарен прост број, тогаш

а) $1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$,

б) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$.

Решение. Од теоремата на Вилсон имаме

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-2)(p-1) \equiv -1 \pmod p. \qquad (1)$$

Понатаму, за секој $i = 1, 2, 3, ..., p-1$ важи

$$i \equiv -(p-i) \pmod p.$$

Ако ги замениме $\frac{p-1}{2}$ парните броеви на левата страна на (1) ја добиваме конгруенцијата

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot (p-2)^2 (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

и ако последната конгруенција ја помножиме со $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, добиваме дека е точна конгруенцијата под а). Аналогно, ако ги замениме $\frac{p-1}{2}$ непарните броеви на левата страна на (1) ја добиваме конгруенцијата

$$2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot (p-1)^2 (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

и ако последната конгруенција ја помножиме со $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, добиваме дека е точна конгруенцијата под б).

4. Низата $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ е определена со $x_2 = 1, x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2-n-1)x_n - (n-1)^3 x_{n-1}, \text{ за } n \ge 3.$$

Докажи дека x_n е цел број ако и само ако n е прост број.

Решение. Со смената $nx_n = y_n$ дадената релација го добива видот

$$(n-2)y_{n+1} = (n^2-n-1)y_n - (n-1)^2 y_{n-1},$$

што е еквивалентно на

$$y_{n+1}-y_n=\frac{(n-1)^2}{n-2}(y_n-y_{n-1}).$$

Оттука, со индукција лесно следува дека

$$y_{n+1}-y_n=(n-1)(n-1)!=n!-(n-1)! \text{ и } y_n=(n-1)!+1.$$

Според тоа, $x_n=\frac{y_n}{n}$ е цел број ако и само ако $n\,|\,(n-1)!+1$, што според теоремата на Вилсон значи ако и само ако n е прост број.

5. Нека $a_0,a_1,...,a_{p-1}; b_0,b_1,...,b_{p-1}$ се две пермутации на броевите $0,1,...,p-1$, каде p е прост број број. Со $r_0,r_1,...,r_{p-1}$ ги означуваме остатоците од делењето на броевите $a_0b_0,a_1b_1,...,a_{p-1}b_{p-1}$ со бројот. Докажи, дека броевите $r_0,r_1,...,r_{p-1}$ не формираат пермутација на броевите $0,1,...,p-1$.

Решение. Нека $r_0,r_1,...,r_{p-1}$ е пермутација на броевите $0,1,...,p-1$. Тогаш во пермутациите $a_0,a_1,...,a_{p-1}$ и $b_0,b_1,...,b_{p-1}$ бројот 0 треба да се наоѓа на исто место, бидејќи во спротивно ќе добиеме дека за некои $i\neq j$ важи $r_i=r_j=0$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a_0=b_0=0$. Тогаш $r_0=0$ и $a_1,a_2,...,a_{p-1}$ и $b_1,b_2,...,b_{p-1}$ се пермутации на броевите $1,2,...,p-1$. Од теоремата на Вилсон следува

$$a_1a_2...a_{p-1}\equiv -1(\text{mod } p),$$
$$b_1b_2...b_{p-1}\equiv -1(\text{mod } p),$$
$$r_1r_2...r_{p-1}\equiv -1(\text{mod } p).$$

Затоа

$$\begin{aligned}1&\equiv(-1)(-1)\equiv(a_1a_2...a_{p-1})(b_1b_2...b_{p-1})\\&\equiv(a_1b_1)(a_2b_2)...(a_{p-1}b_{p-1})\equiv r_1r_2...r_{p-1}\equiv -1(\text{mod } p),\end{aligned}$$

што е противречност.

6. Нека $a_i,\ i=1,2,...,22$ се 22 последователни природни броеви. Докажи, дека тие не може да се поделат во две групи така да производот на броевите од едната група е еднаков на производот на броевите од другата група.

Решение. Во 22 последователни природни броеви само еден е делив со 23, па затоа доколку бараната поделба е можна меѓу дадените броеви ниту еден не е делив со 23. Нека претпоставиме дека

$$M=a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_t}=a_{j_1}a_{j_2}...a_{j_s}=N,\ s+t=22,$$

каде $i_1,i_2,...,i_t,j_1,j_2,...,j_t$ е пермутација на броевите 1,2,...,22. Тогаш

$$M^2=MN=a_1a_2...a_{22}\equiv 22!(\text{mod } 23)$$

и од теоремата на Вилсон следува дека $M^2\equiv -1(\text{mod } 23)$. Последното меѓутоа не е можно, бидејќи од $\text{NZD}(M,22)=1$ и од теоремата на Ферма следува дека

$$1\equiv M^{22}\equiv(-1)^{11}\equiv -1(\text{mod } 23).$$

7. Докажи, дека за $n>5$ бројот $[\frac{(n-1)!}{n(n+1)}]$ е парен.

Решение. *Прв начин* Ако $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}=N$, тогаш $N=\frac{(n-1)!}{n}+\frac{n!}{n+1}-(n-1)!$. Ако $m>5$ е произволен сложен број, тогаш бројот $\frac{(m-1)!}{m}$ е парен број. Значи, ако n и $n+1$ се сложени броеви, тогаш N е парен број. Останува да го разгледаме случајот кога еден од броевите n и $n+1$ е прост. Нека, на пример, n е прост број. Тогаш $n+1$ е сложен број, па затоа бројот $\frac{n!}{n+1}$ е парен. Имаме $[N]=[\frac{(n-1)!}{n}]+\frac{n!}{n+1}-(n-1)!$, па затоа доволно е да докажеме дека $[\frac{(n-1)!}{n}]$ е парен број. Од теоремата на Вилсон следува дека $n\,|\,(n-1)!+1$ и бидејќи $(n-1)!+1$ е непарен број добиваме дека количникот $\frac{(n-1)!+1}{n}$ е непарен број. Понатаму, $\frac{(n-1)!}{n}=\frac{(n-1)!+1}{n}-\frac{1}{n}$, па затоа $[\frac{(n-1)!}{n}]=\frac{(n-1)!+1}{n}-1$ е парен број.

Втор начин. Да означиме $p=n+1\geq 7$. Тогаш $p-1$ е сложен број и нека $p-1=ab, 1<a,b\leq p-2$. Според тоа, $p-1$ е делител на $(p-2)!$, бидејќи $(p-2)!$ ги содржи различните множители 2 и $\frac{p-1}{2}$. Нека $(p-2)!=k(p-1)$. Бидејќи $p\geq 7$, меѓу броевите од 2 до $p-2$ има барем два парни броја. Нека l е најголемиот природен број таков што $2^l\,|\,p-1$. Тогаш множеството $\{1,2,...,p-2\}\setminus\{2^l,\frac{p-1}{2^l}\}$ содржи барем еден парен број. Сега, од равенството $(p-2)!=k(p-1)$, изборот на l да е најголемиот природен број таков што $2^l\,|\,p-1$ и фактот дека меѓу броевите од 2 до $p-2$ има барем два парни броја, заклучуваме дека k е парен број. Тоа значи дека $(p-1)!=k(p-1)^2\equiv k(\operatorname{mod} p)$ и од теоремата на Вилсон следува дека $k\equiv -1(\operatorname{mod} p)$. Значи, постои природен број m таков што $k=mp-1$ и како k е парен број заклучуваме дека m е непарен број. Добиваме

$$\frac{(n-1)!}{n^2+n}=\frac{(p-2)!}{p(p-1)}=\frac{k(p-1)}{p(p-1)}=\frac{k}{p}=\frac{mp-1}{p}=m-\frac{1}{p},$$

па затоа $[\frac{(n-1)!}{n^2+n}]$ е непарен број.

8. Нека $n\geq 5$ и $2\leq b\leq n$. Докажи, дека

$$[\frac{(n-1)!}{b}]\equiv 0(\operatorname{mod} b-1).$$

Решение. Ако $b\leq n-1$, тогаш

$$\frac{(n-1)!}{b}=1\cdot 2\cdot ...\cdot (b-1)(b+1)...(n-1)$$

и очигледно $(b-1)\,|\,\frac{(n-1)!}{b}$. Нека $b=n$. Ако n е сложен број и не е квадрат на прост број, тогаш $n=ac$, каде $2\leq a<c\leq n-2$ и тогаш

$$\frac{(n-1)!}{n}=1\cdot 2\cdot ...\cdot (a-1)(a+1)...(c-1)(c+1)...(n-1)$$

пак е цел број и се дели со $n-1$. Нека $n=p^2$, каде p е прост број. Од $n\geq 5$ следува $p\neq 2$ и затоа $2p<n-1$. Тогаш

$$\frac{(n-1)!}{n}=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)(p+1)\ldots(2p-1)\cdot 2\cdot(2p+1)\ldots(n-1)$$

пак е цел број и се дели со $n-1$. Останува да го разгледаме случајот кога $n=p$ е прост број. Од теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$ и како $p-1\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$ добиваме $(p-2)!\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $(p-2)!=1+up$, $u\in\mathbf{N}$. Ако помножиме со $p-1$ добиваме

$$(p-1)!=p(1+u(p-1))-1\text{, т.е. }\frac{(p-1)!}{p}=1+u(p-1)-\frac{1}{p}.$$

Според тоа,

$$[\frac{(p-1)!}{p}]=u(p-1)\text{, т.е. }[\frac{(p-1)!}{p}]\equiv 0(\mathrm{mod}\, p-1).$$

9. Ако p е прост број, тогаш $p^3\,|\,(p!)^2-p^2$. Докажи!

Решение. Имаме

$$(p!)^2-p^2=(p!-p)(p!+p)=p^2[(p-1)!-1][(p-1)!+1]. \qquad (1)$$

Од теоремата на Вилсон следува дека $(p-1)!+1=pn$, за некој природен број n и ако замениме во (1) добиваме

$$(p!)^2-p^2=p^3n[(p-1)!-1],$$

што значи дека $p^3\,|\,[(p!)^2-p^2]$.

10. Нека p е прост број. Докажи, дека:

а) $a^p+a(p-1)!\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$,

б) $a^p(p-1)!+a\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

Решение. а) Од теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, па затоа

$$a(p-1)!+a\equiv 0(\mathrm{mod}\ p).$$

Понатаму, $a^p-a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, p)$, па сега тврдењето следува ако ги собереме последните две конгруенции.

б) Тврдењето следува од конгруеницииите

$$(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)\text{ и }a^p\equiv a\,(\mathrm{mod}\, p).$$

11. Природниот број $p>2$ е прост ако и само ако

$$(p-2)!-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p).$$

Докажи!

Решение. Според теоремата на Вилсон и пример 4.8 добиваме дека природниот број p е прост ако и само ако

$$(p-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p),$$

што значи ако и само ако

$$(p-2)!(p-1)+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p),$$

односно ако и само ако

$$(p-2)!\,p-[(p-2)!-1]\equiv 0 \pmod p\,,$$

од што следува тврдењето на задачата.

12. Докажи, дека постојат бесконечно многу сложени броеви n, за кои бројот $n!-1$ има барем два различни прости делители.

Решение. Нека $p>5$ е прост број, $n=p-2$ и нека $N=n!-1=(p-2)!-1$. Од теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!\equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$ и бидејќи

$$(p-1)!=(p-1)(p-2)!\equiv -(p-2)! (\mathrm{mod}\, p)$$

добиваме дека $(p-2)!\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Според тоа, $p\,|\,N$. Нека претпоставиме дека N нема друг прост делител, т.е. дека $N=p^m, m\in\mathbb{N}$. Тогаш $N\equiv 1(\mathrm{mod}\, p-1)$. Од друга страна, од $p>5$ следува $2<\frac{p-1}{2}<p-2$, па затоа 2 и $\frac{p-1}{2}$ се различни множители на $(p-2)!$ и тогаш $2\cdot\frac{p-1}{2}=p-1$ е делител на $(p-2)!$. Оттука следува дека $N\equiv -1(\mathrm{mod}\, p-1)$, што противречи на $N\equiv 1(\mathrm{mod}\, p-1)$. Значи, N има прост делител различен од p, т.е. N има барем два различни прости делители.

На крајот, да избереме p од видот $3k+2, k>1$. Како што е познато, постојат бесконечно многу прости броеви од овој вид. Тогаш $n=3k$ е сложен број и тврдењето е докажано.

13. Докажи дека n е делител на бројот $N=\sum\limits_{r=1}^{n-3} r\cdot r!$ ако и само ако n е прост број.

Решение. Од $r\cdot r!=(r+1)!-r!$ следува

$$N=\sum_{r=1}^{n-3} r\cdot r!=(2!-1!)+(3!-2!)+\dots+((n-2)!-(n-3)!)=(n-2)!-1\,,$$

т.е. $(n-1)N=(n-1)!-n+1$. Понатаму, бидејќи $\mathrm{NZD}(n,n-1)=1$, добиваме дека n е делител на N ако и само ако n е делител на $(n-1)N$, т.е. ако и само ако n е делител на $(n-1)!-n+1$. Значи, n е делител на N ако и само ако n е делител на $(n-1)!+1$, т.е. $(n-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$, што според теоремата на Вилсон значи ако и само ако n е прост број.

14. Докажи дека секој прост број од облик $p=4k+1$ може да се претстави како збир од квадрати на два природни броја.

Решение. Од теорема на Вилсон имаме $(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$, па ако искористиме дека $p-i\equiv -i(\mathrm{mod}\, p)$, за $i=1,2,\dots,\frac{p-1}{2}$ и $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{2k}=1$, добиваме

$$\begin{aligned}-1&\equiv 1\cdot(p-1)\cdot 2\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot\tfrac{p-1}{2}\cdot(p-\tfrac{p-1}{2})\\ &\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\tfrac{p-1}{2})^2\equiv((\tfrac{p-1}{2})!)^2 (\mathrm{mod}\, p)\end{aligned}.$$

Според тоа конгруенцијата $x^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$ има решение $x_0 = (\frac{p-1}{2})!$. Понатаму, од лемата на Туе следува дека постојат природни броеви $a, b < \sqrt{p}$ такви што $ax_0 - b$ или $ax_0 + b$ е делив со p, т.е. $ax_0 \equiv b (\mathrm{mod}\, p)$ или $ax_0 \equiv -b (\mathrm{mod}\, p)$, што значи дека $a^2 x_0^2 \equiv b^2 (\mathrm{mod}\, p)$. Според тоа, $b^2 \equiv a^2 x_0^2 \equiv a^2(-1) = -a^2 (\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $p \mid a^2 + b^2$ и како $0 < a^2 + b^2 < 2(\sqrt{p})^2 = 2p$, заклучуваме дека $p = a^2 + b^2$.

15. Докажи, дека за секој непарен прост број p при делење на броевите

$$2^p - 2 \text{ и } p(p-1)!(-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{p-1})$$

со p^2 се добива ист остаток.

Решение. Имаме

$$2^p - 2 = (1+1)^p - 2 = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} = p \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)(p-2)\ldots(i+1)}{(p-i)!} .$$

Нека x е остатокот при делењето на бројот $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)(p-2)\ldots(i+1)}{(p-i)!}$ со p. Треба да докажеме дека остатокот при делењето на бројот

$$(p-1)!(-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{p-1}) = (p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i i^{-1}$$

со p исто така е еднаков на x.

Имаме

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)(p-2)\ldots(i+1)\cdot(p-1)!}{(p-i)!} \equiv x(p-1)! \, (\mathrm{mod}\, p),$$

од каде, согласно со теоремата на Вилсон добиваме

$$\sum_{i=1}^{p-1} \{(p-1)(p-2)\ldots(i+1)\cdot(p-1)(p-2)\ldots(p-i+1)\} \equiv x(p-1)! \equiv -x \, (\mathrm{mod}\, p) .$$

Од друга страна, од теоремата на Вилсон следува

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p-1} \{(p-1)\ldots(i+1)\cdot(p-1)(p-2)\ldots(p-i+1)\} &\equiv \sum_{i=1}^{p-1} \{(p-1)\ldots(i+1)\cdot(-1)^{i-1}(i-1)!\} \\
&\equiv \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} \frac{(p-1)!}{i} \\
&\equiv (p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} i^{-1} \, (\mathrm{mod}\, p)
\end{aligned}$$

Според тоа, $(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i i^{-1} \equiv x \, (\mathrm{mod}\, p)$.

16. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за кои $f(n!) = f(n)!$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $m - n$ е делител на $f(m) - f(n)$ за секои $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

Решение. Нека f е функција која ги задоволува условите на задачата. Прво, нека претпоставиме дека постои $a>2$ таков што $f(a)=a$. Тогаш $a!,(a!)!,...$ се фиксни точки за f. Според тоа, постои растечка низа $\{a_n\}_{n\geq 0}$ од фиксни точки на f. За секој природен број a_k-n е делител на бројот $f(a_k)-f(n)=a_k-f(n)$, за секој k и тој исто така е делител на $f(n)-n$ за секој k. Оттука следува дека $f(n)=n$ за секој n.

Сега да претпоставиме дека f нема фиксни точки поголеми од 2. За простиот број $p>3$ имаме $(p-2)!\equiv 1(\operatorname{mod} p)$, па затоа $f(p-2)!-f(1)=f((p-2)!)-f(1)$ е делив со p. Јасно, $f(1)=1$ или 2. Бидејќи $p>3$ и p е делител на $f(p-2)!-f(1)$ важи $f(p-2)<p$. Од теоремата на Вилсон следува дека $(p-1)!-f(1)$ не е делив со p, па затоа добиваме дека $f(p-2)\leq p-2$. Од друга страна $p-3$ е делител на $f(p-2)-f(1)=f(p-2)-1$. Според тоа, $f(p-2)=f(1)$ или $f(p-2)=p-2$. Бидејќи $p-2>2$, вториот случај не е можен, па затоа $f(p-2)=f(1)$ за секој прост број $p>3$. За произволен природен број n бројот $p-2-n$ е делител на $f(1)-f(n)$ и последното важи за сите големи прости броеви. Според тоа, $f(n)=f(1)$, т.е. f е константа. Непосредно се проверува дека таа константа е 1 или 2.

Значи, решенија на задачата се функциите $f(n)=1$, $f(n)=2$ и $f(n)=n$, за $n\in\mathbb{N}$.

17. Нека A е бесконечно подмножество од множеството природни броеви. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој $a\in A$ важи

$$a^n+a^{n-1}+...+a^1+1\,|\,a^{n!}+a^{(n-1)!}+...+a^{1!}+1.$$

Решение. Да означиме $P(x)=x^n+x^{n-1}+...+x+1$ и

$$Q(x)=x^{n!}+x^{(n-1)!}+...+x^{1!}+1.$$

Нека $Q(x)=C(x)P(x)+R(x)$, каде $C(x)$ и $R(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти и $\deg R<\deg P$. Од условот на задачата следува $P(a)\,|\,Q(a)$, па затоа $P(a)\,|\,R(a)$, за бесконечно многу цели броеви a. Бидејќи за доволно голем број a важи $|R(a)|<|P(a)|$, заклучуваме дека $R(a)=0$. Значи, $R(x)$ има бесконечно многу нули, па затоа $R(x)\equiv 0$ и $P(x)\,|\,Q(x)$.

Лема. Нека $k_0,k_1,...,k_n\in\mathbb{N}_0$. Полиномот $P(x)=x^n+x^{n-1}+...+x+1$ е делител на полиномот $Q(x)=x^{k_n}+...+x^{k_1}+x^{k_0}$ ако и само ако $\{k_0,k_1,...,k_n\}$ е потполн систем на остатоци по модул $n+1$.

Доказ. Нека r_i е остатокот при делење на k_i со $n+1$. Бидејќи $x^{n+1}-1$ е делител на $x^{k_i}-x^{r_i}$ за секој i, следува дека $P(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ е делител на $Q(x)-Q_1(x)$, каде $Q_1(x)=x^{r_n}+...+x^{r_1}+x^{r_0}$ и притоа важи $\deg Q_1\leq n$. Ако $P(x)\,|\,Q(x)$, тогаш $P(x)\,|\,Q_1(x)$, т.е. $Q_1(x)=cP(x)$ за некоја константа c, а тоа важи ако и само ако $c=1$ и $\{r_0,r_1,...,r_n\}=\{0,1,2,...,n\}$. ■

Од лемата следува дека бараните броеви се оние броеви за кои $\{0,1!,2!,...,n!\}$ е потполн систем на остатоци по модул $n+1$.

Ако $n>3$ и $n+1$ е сложен број, тогаш $n!\equiv 0(\mathrm{mod}\, n+1)$, па условот не е задоволен. Ако $n+1=p>3$ е прост број, тогаш според теоремата на Вилсон $(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$, од каде следува $(p-2)!\equiv 1=1!(\mathrm{mod}\, p)$ и повторно условот не е исполнет. Остануваат случаите $n\leq 3$. Со непосредна проверка се добива дека $n=1$ и $n=2$ ги задоволуваат условите на задачата.

4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

4.1. ДЕЛИВОСТ

1. На бројот 123 допиши му го бројот што е еднаков на производот на неговите две последни цифри; на така добиениот број допиши му го бројот што е еднаков на производот на неговите две последни цифри итн. Која цифра стои на 1995-то место?

Решение. Да ги напишеме првите неколку цифри на бараниот број, ќе го означиме со N:

$$N=12361886424832612248326122483 2$$

Забележуваме дека после деветтата цифра групата цифри 24832612 периодично се повторува. Значи по деветте први цифри се повторува период од осум цифри.

За да ја најдеме цифрата која стои на 1995-то место, треба од бројот 1995 да одземеме 9 а добиената разлика да ја поделиме со 8 (бројот на цифрите на периодот). Остатокот од тоа делење ни го одредува бројот на цифрата од периодот. Бидејќи $1995-9=1986=8\cdot 248+2$, следува дека на 1995-то место ќе се наоѓа втората цифра од периодот, т.е. цифрата 4.

2. Докажи, дека за секој природен број n постои природен број N таков што за секој природен број $b\in[2,1389]$ збирот на цифрите на бројот N запишан во броем систем со основа b е поголем од n.

Решение. Бројот $N=(1389!)^{n+1}-1$ го има саканото својство. Навистина, за секој $b\in[2,1389]$ бројот $N+1$ е делив со b^{n+1}, па затоа последните $n+1$ цифра на бројот $N+1$ запишан во систем со основа b се нули. Значи, последните $n+1$ на бројот N запишан во систем со основа b се $b-1$ и нивниот збир е еднаков на $(n+1)(b-1)>n$.

3. Колку најмногу елементи може да има подмножество на множеството $\{1,2,3,...,2017\}$ такво што за секои два елементи a и b на тоа подмножество бројот $a+b$ не е делив со бројот $a-b$?

Решение. Во подмножеството не смее да има последователни броеви a и $b=a+1$ бидејќи 1 е делител на $a+b$. Во подмножеството не смее да се a и $b=a+2$, бидејќи 2 е делител на $a+b=2a+2$. Значи, од три последователни броеви во подмножеството се наоѓа најмногу еден број. Затоа, бидејќи

$2017 = 3 \cdot 672 + 1$ подмножество со саканото својство може да има најмногу 673 елементи. Подмножеството $A = \{1, 4, 7, ..., 2014, 2017\}$ кое се состои од броевите кои при делење со 3 даваат остаток 1 има 673 елементи. За било кои два елементи $a, b \in A$ бројот $a - b$ е делив со 3, а бројот $a + b$ при делење со 3 дава остаток 2, па затоа $a - b$ не е делител на $a + b$.

4. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$, постојат различни природни броеви $x_1, x_2, ..., x_n$, такви што

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2013}.$$

Решение. Задачата ќе ја докажеме со математичка индукција. Имаме

$$\frac{1}{2013} = \frac{1}{3 \cdot 671} = \frac{1}{674}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{671}\right) = \frac{1}{3 \cdot 674} + \frac{1}{671 \cdot 674},$$

равенството важи за $n = 2$. Нека тврдењето важи за $n = k$, односно постојат различни природни броеви $x_1, x_2, ..., x_k$, такви што

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_k} = \frac{1}{2013}.$$

Тогаш

$$\frac{1}{2013} = \frac{1}{4026} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + ... + \frac{1}{2x_k}.$$

Јасно $x_i \neq 2013$ односно $2x_i \neq 4026$ за $i = 1, 2.., n$ и $2x_1$, $2x_2$, ..., $2x_k$ се различни природни броеви. Значи, тврдењето важи и за $n = k + 1$. Конечно, од принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број $n \in \mathbb{N}$.

5. За позитивните рационални броеви a, b и c е исполнето равенството

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Докажи дека $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ е рационален број.

Решение. Равенството $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во видот

$$ac + bc = ab,$$

односно

$$ab - ac - bc = 0.$$

Тогаш

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab - ac - bc) = (a + b - c)^2.$$

Сега

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b - c)^2} = |a + b - c|,$$

Бидејќи $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$, добиваме $|a + b - c| \in \mathbb{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{Q}^+$.

6. Најди ги сите трицифрени броеви кои се еднакви збирот на факториелите од нивните цифри!

Решение. Имаме

$$100a + 10b + c = a! + b! + c!$$

$$a! + b! + c! < 1000 \quad \Rightarrow \quad \max(a, b, c) \leq 6$$

бидејќи $7!>1000,\ 6!<1000$. Понатаму, бидејќи $4!+4!+4!<99$ од $a!+b!+c!>99$ следува дека еден од a, b или c мора да е 5 или 6.

Ако еден од броевите е 6, $a!+b!+c!>6!=720$, па мораме да го исклучиме 6. Тогаш $\max(a,b,c)=5$. Има три можности:

а) 5 да е на местото на стотките: $5bc$, но не може. Најголемиот број што се добива е $5!+5!+5!=360<500$.

б) 5 да е на местото на десетките: $a5c$. Најголем таков број е $4!+5!+5!=264$, па на местото на стотките би бил 1 или 2, т.е.

$$150,\quad 1!+5!+0!\neq 150$$
$$151,\quad 1!+5!+1!\neq 151$$
$$152,\quad 1!+5!+2!\neq 152$$
$$153,\quad 1!+5!+3!\neq 153$$
$$154,\quad 1!+5!+4!\neq 154$$
$$155,\quad 1!+5!+5!\neq 155$$
$$254,\quad 2!+5!+4!<200$$
$$255,\quad 2!+5!+5!\neq 255$$

в) 5 да е на местото на единиците: $ab5$. Ако е 1 или 2 на место на стотки, тогаш исто како во б) се покажува дека важи само за $1!+4!+5!=145$.

7. За произволни природни броеви m и n, постои природен број k, таков што

$$(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^{2^n}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\,. \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. За природниот број m имаме:

$$\begin{aligned}(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^2&=(\sqrt{m+1})^2-2\sqrt{m+1}\sqrt{m}+(\sqrt{m})^2\\&=m+1-\sqrt{4m(m+1)}+m=2m+1-\sqrt{4m^2+4m}\\&=\sqrt{(2m+1)^2}-\sqrt{(2m+1)^2-1}=\sqrt{l+1}-\sqrt{l}\,,\end{aligned}$$

каде $l=(2m+1)^2$. Според тоа,

$$(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^{2^n}=[(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^2]^{2^{n-1}}=(\sqrt{l+1}-\sqrt{l})^{2^{n-1}}\,.$$

Изразот од десната страна на последната низа равенства е од ист облик како и изразот на десната страна, со тоа што степенот е 2^{n-1}. Повторувајќи ја оваа постапка уште ($n-1$)-пат ќе го добиеме равенството (1).

8. Дадени се n различни природни броеви $1=a_1<a_2<...<a_n=2010$, при што збирот на секои $n-1$ од овие броеви е делив со $n-1$. Определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. Од условот на задачата и од равенството

$$a_k-a_j=[(a_1+a_2+...+a_n)-a_j]-[(a_1+a_2+...+a_n)-a_k]$$

следува дека $(n-1)\,|\,(a_k-a_j)$, за секои k и j. Освен тоа

$$2009 = a_n - a_1 = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_2 - a_1) \geq (n-1)^2 .$$

Според тоа, $n-1$ е делител на 2009 и е помал од 45, бидејќи $45^2 = 2025 > 2009$. Значи, најголемата можна вредност на n е 42, при што за $n = 42$ можеме да ги земеме следниве броеви $a_k = 1 + 41(k-1)$, за $k = 1, 2, ..., 41$ и $a_{42} = 2010$.

9. За кои природни броеви n бројот $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$ е делив со 10?

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = (2n+3)^2 + 5,$$

па дадениот број е делив со 10 ако и само ако бројот $(2n+3)^2$ завршува на цифрата 5. Тоа е можно ако $2n+3$ завршува на 5, односно $2n+3 = 10k+5$ каде што $k = 0,1,2,...$ Оттука $n = 5k+1,\ k = 0,1,2,...$ Значи бројот

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

е делив со 10 ако и само ако n е од облик $5k+1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ т.е. ако n завршува на 1 или 6.

Втор начин. Дадениот број да го трансформираме на следниов начин

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = 2(2n^2 + 6n + 7),$$

па оттука следува дека дадениот број е делив со 10 ако и само ако бројот $2n^2 + 6n + 7$ е делив со 5.

- Ако $n = 5k$ тогаш $2n^2 + 6n + 7 = 5(10k^2 + 6k + 1) + 2$, па не е делив со 5.
- Ако $n = 5k+1$ тогаш $2n^2 + 6n + 7 = 5(10k^2 + 10k + 3)$ и е делив со 5.

Слично се проверува дека и за $n = 5k+2$, $n = 5k+3$ и $n = 5k+4$ бројот $2n^2 + 6n + 7$ не е делив со 5.

Според тоа само за броевите од облик $n = 5k+1$ дадениот број е делив со 10.

Трет начин. Да го трансформираме изразот на следниов начин

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = 4(n^2 + 3n + 1) + 10 .$$

Овој број е делив со 10 ако и само ако $n^2 + 3n + 1$ е делив со 5, односно ако $n(n+3)$ завршува на 4 или 9. Последново е можно ако n завршува на 1 или 6, односно ако $n = 5k+1$, $k = 0,1,2,...$

10. Докажи дека вредноста на изразот

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$$

не е еднаква на 33, за било кои вредности на x и y од множеството цели броеви.

Решение. Полиномот можеме да го запишеме во облик

$$P(x, y) = (x+3y)(x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4),$$

$$P(x, y) = (x+3y)(x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2),$$

$$P(x, y) = (x+3y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y).$$

Цели броеви x и y за кои што $P(x,y)=33$ не исполнуваат ниту едно од равенствата $x=y$, $x=-y$, $x=2y$, $x=-2y$, $x=-3y$, бидејќи тогаш $P(x,y)=0\neq 33$.

Нека x,y се цели броеви за кои $P(x,y)=33$. Бројот 33 можеме да го запишеме во облик $33=1\cdot 3\cdot 11$. Бидејќи еден множител на 33 е 1, имаме пет можности за линеарните множителите на $P(x,y)$, и тоа

$$x+3y=1,\ x-y=1,\ x+y=1,\ x-2y=1,\ x+2y=1.$$

Доволно е да разгледаме еден од овие случаи, на пример $x-2y=1$. Притоа $x=2y+1$ и

$$\begin{aligned}x-y&=y+1,\\ x+y&=3y+1,\\ x+2y&=4y+1,\\ x+3y&=5y+1,\end{aligned}$$

Ако $y\neq 0$, тогаш $y+1, 2y+1, 3y+1, 4y+1, 5y+1$ се пет по парови различни цели броеви, па според тоа 33 би имал пет различни делители што не е можно. Ако $y=0$, тогаш 33 би имал само еден делител 1 што не е можно.

Останатите случаи $x+3y=1$, $x-y=1$, $x+y=1$, $x+2y=1$ се разгледуваат аналогно и се доаѓа до слична противречност. На потполно ист начин се разгледуваат случаите $x+3y=-1$, $x-y=-1$, $x+y=-1$, $x-2y=-1$, $x+2y=-1$ и се доаѓа до противеречност.

Значи, такви цели броеви x и y не постојат.

11. Докажи дека за произволни цифри $a,b\neq 0$, постои сложен број од облик $\overline{aaaa...ab}$.

Решение. Ако $b\in\{2,4,6,8\}$, тогаш $2\,|\,\overline{aaa...ab}$, без разлика колку е бројот на цифри a, па бројот $\overline{aaa...ab}$ е сложен број . Ако $b=5$, тогаш $5\,|\,\overline{aaa...ab}$, па бројот $\overline{aaa...a5}$ е сложен. Ќе ги разгледаме одвоено случаите кога $b\in\{1,3,7,9\}$.

Ако $b=3$ или $b=9$, тогаш броевите од облик $\overline{\underbrace{aaa...a}_{3k}b}$, за $k=1,2,3,...$ се деливи со 3.

Ако $b=7$, тогаш $7\,|\,111111$, па според тоа $7\,|\,\overline{aaaaaa7}$. Уште повеќе $7\,|\,\overline{\underbrace{aa...a}_{6k}7}$, за $k=1,2,....$. Значи, броевите од облик $\overline{\underbrace{aa...a}_{6k}7}$ се сложени броеви.

За секој $a\in\{1,2,3,...,9\}$ постои $k\in\mathbb{N}$ така што $\overline{a1}\,|\,\overline{\underbrace{aaa...a}_{k}}$. Според тоа, бројот $\overline{\underbrace{aaa...aa}_{k+1}1}$ е сложен.

12. Најди ги цифрите x,y,z,t,u, ако важи равенството

$$\overline{xy}+\overline{ztu}=\sqrt{\overline{xyztu}}\ .$$

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\overline{xy}+\overline{ztu}=100z+10(x+t)+y+u$$
$$\overline{xyztu}=100z+10(x+t)+y+u+999\overline{xy}\ .$$

Нека $100z+10(x+t)+y+u=a$, $\overline{xy}=b$, тогаш $a=\sqrt{a+999b}$, т.е. $a^2=a+999b$, па затоа

$$b=\tfrac{a(a-1)}{999}=\tfrac{a(a-1)}{27\cdot 37} \qquad (1)$$

и како $\overline{xy}=b\le 99$, добиваме $a(a-1)\le 99\cdot 999$, т.е. $a\le 314$. Но a е трицифрен број $(x\ne 0, z\ne 0)$, па значи $110\le a\le 314$. Броевите a и $a-1$ се заемно прости, па од (1) заклучуваме дека тие припаѓаат на множеството

$$\{4\cdot 37, 5\cdot 37, 6\cdot 37, 7\cdot 37, 8\cdot 37\}.$$

Оттука следува дека:

$$a\in\{148,149,185,186,259,260,296,297\}$$

Од овие броеви само бројот 297 е делив со $3^3=27$, па наоѓаме дека

$$b=\tfrac{297\cdot 298}{999}=88.$$

Тогаш $\overline{ztu}=a-b=297-88=209,$ па бараните цифри се:

$$x=y=8,\ z=2,\ t=0,\ u=9.$$

Втор начин. Нека $\overline{xy}=a$, $\overline{ztu}=b$, тогаш:

$$a+b=\sqrt{\overline{ab}},\ \overline{ab}=1000a+b$$
$$a^2+2(b-500)a+b^2-b=0$$
$$(a+b-500)^2=500^2-999b$$
$$999b=(a+b)(1000-a-b)=c(1000-c)$$

каде што $c=a+b$ е некој трицифрен број. Бидејќи производот $c(1000-c)$ е делив со $999=27\cdot 37$, а броевите c и $1000-c$ немаат заеднички делители еднакви на 3 и 37, тогаш еден од нив е делив со 999 или еден е делив со 27 а другиот со 37. Првиот случај не е можен, бидејќи броевите c и $1000-c$ се троцифрени. Во вториот случај имаме две можности:

1) $c=27k$, $1000c=37l$ $(k,l\in\mathbb{N})$. Оттука добиваме $27k+37l=1000$ и заклучуваме дека бројот l при делење со 9 дава остаток 1, т.е. $l=9m+1$. Тогаш $27k+37\cdot 9m+37=1000,$ т.е. $3k+37m=107.$ Од последната равенка заклучуваме дека бројот m при делење со 3 дава остаток 2, т.е. $m=3n+2$, па имаме $3k+37\cdot 3n+74=107$, т.е. $k+37n=11$. Оттука, бидејќи $k>0$, $n\ge 0$, наоѓаме: $n=0, k=11$, а тогаш $c=297=a+b$. Следствено,

$$\overline{xyztu}=(a+b)^2=297^2=88209$$

и со проверка утврдуваме дека равенството $88+209=\sqrt{88209}$ е точно.

2) Ако $1000-c=27k,\ c=37k,$ на сличен начин добиваме дека $1000-c=297$, $c=703$ и $\overline{xyztu}^2=c^2=51319$. Но, $51+319\ne\sqrt{51319}$.

Значи, условот на задачата го задоволуваат само цифрите:

$$x=8,\quad y=8,\quad z=2,\quad t=0,\quad u=9.$$

13. Нека p е прост број таков што сите цифри му се единици. Докажи дека бројот на цифрите на бројот p е прост број.

Решение. *Прв начин.* Нека p е број таков што сите цифри му се единици и нека бројот на цифрите му е сложен, т.е. е mn каде што $m,n \geq 2$. Тогаш

$$p = (1+10+...+10^{n-1})+10^{n}(1+10+...+10^{n-1})+...+10^{n(m-1)}(1+10+...+10^{n-1})$$
$$= (1+10+10^{2}+...+10^{n-1})(1+10^{n}+10^{2n}+...+10^{n(m-1)})$$

Бидејќи $m,n \geq 2$, добиваме дека p е сложен број. Значи, ако p е прост број таков што сите цифри му се единици, тогаш бројот на цифрите на p мора да е прост.

Втор начин. Нека $p = \underbrace{11...11}_{a}$ е прост број и нека $a = mn,\ m,n > 1$. Имаме

$$\underbrace{11...11}_{a} = \frac{10^{a}-1}{9} = \frac{10^{mn}-1}{9} = \frac{10^{m}-1}{9}((10^{m})^{n-1}+(10^{m})^{n-2}+...+10^{m}+1).$$

Бидејќи $m > 1$ имаме $10^{m}-1 > 9$ и $9 \mid 10^{m}-1$. Оттука следува дека p е сложен број, што е спротивно на претпоставката. Значи a е прост број.

14. Ако n е природен број поголем од 2, докажи дека меѓу дропките $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,\frac{n-1}{n}$ има парен број нескратливи дропки.

Решение. Ако k е природен број, $1 \leq k < \frac{n}{2}$ и $\frac{k}{n}$ е нескратлива дропка, тогаш $\mathrm{NZD}(k,n) = 1$. Но, тогаш и

$$\mathrm{NZD}(n-k,n) = \mathrm{NZD}(n-(n-k),n) = \mathrm{NZD}(k,n) = 1,$$

т.е. дропката $\frac{n-k}{n}$ е исто така нескратлива и $\frac{n}{2} < n-k < n$. Значи за секоја нескратлива дропка $\frac{k}{n}$, за $1 \leq k < \frac{n}{2}$ постои единствена нескратлива дропка $\frac{n-k}{n}$. Притоа важи $\frac{k}{n} \neq \frac{n-k}{n}$, бидејќи во спротивно добиваме $n = 2k$ и $\frac{k}{n} = \frac{n}{2n}$ е скратлива со $n > 2$. Значи, добиваме дека бројот на нескратливи дропки е парен.

15. Нека природниот број n е таков што d_1 и d_2 се делители на n^2 и $d_1 < n < d_2$. Докажи, дека $d_2 - d_1 \geq \sqrt{4n+1}$.

Решение. Ако $d_1 = n-k$, тогаш од $n-k \mid n^2 = n^2 - k^2 + k^2$ следува дека $n-k \mid k^2$, па затоа $k^2 + k - n \geq 0$, т.е. $(k+\frac{1}{2})^2 \geq \frac{4n+1}{4}$, од каде добиваме $k \geq \frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}$. Аналогно, за $d_2 = n+s$ следува дека $s^2 - s - n \geq 0$, од каде добиваме $s \geq \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$. Тогаш $d_2 - d_1 = s + k \geq \sqrt{4n+1}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $n = k(k+1)$.

16. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ е природен број.

Решение. Нека $a^2 = k(2ab^2 - b^3 + 1), k \in \mathbb{N}$. Од $2ab^2 \geq b^3$ следува $b \leq 2a$. Од друга страна, ако $b \geq a$, тогаш $b^2 \geq a^2 \geq b^2(2a-b)+1$, па затоа во овој случај $b = 2a$.

За дадени вредности на b и k, бројот a е корен на квадратната равенка

$$x^2 - 2kb^2x + k(b^3 - 1) = 0. \qquad (1)$$

Оваа равенка има две решенија $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$. Нека $a_1 \geq a_2$. Од Виетовите правила имаме $a_1 + a_2 = 2kb^2$, па затоа $a_1 \geq kb^2$. Повторно од Виетовите правила следува

$$0 \leq a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b$$

и од претходно изнесеното добиваме дека мора да важи $b = 2a_2$ или $a_2 = 0$.

Ако $a_2 = 0$, тогаш $b = 1$ и $a_1 = 2k$. Ако $b = 2a_2$, тогаш ако во равенката (1) ставиме $x = a_2$ и $b = 2a_2$ добиваме $k = a_2^2$, па наоѓаме дека $a_1 = 2kb^2 - a_2 = 8a_2^4 - a_2$.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека единствени решенија се

$$(a,b) \in \{(2t,1), (t,2t), (8t^4 - t, 2t) \mid t \in \mathbb{N}\}.$$

Непосредно се проверува дека овие парови навистина се решенија на задачата.

17. Нека p е прост број и $X = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. Докажи, дека множеството X содржи два различни елементи x и y такви што $x \neq 1$ и $x \mid y$.

Решение. Нека $m = [\sqrt{p}]$, $x = p - m^2$ и $y = p - |m-x|^2$. Тогаш

$$y = m^2 + x - (m-x)^2 = x(2m+1-x),$$

па затоа $x \mid y$. Освен тоа, од $x + m^2 = p < (m+1)^2$ следува дека $x < 2m+1$, т.е. $y > 0$. Исто така, $m \neq x$ бидејќи $p \neq m^2$. Освен тоа, $y \neq x$, бидејќи во спротивно $x = 0$ или $x = 2m$, од каде добиваме $p = m^2$ или $p = m(m+2)$, т.е. $m = 1$ и $p = 3$. Од досега изнесеното следува дека $x, y \in X$ и $x \mid y$. Ако $x \neq 1$, тогаш задачата е решена. За $x = 1$ следува дека m е парен број и затоа $2m = p - (m-1)^2$ е делител на $m^2 = p - 1^2$. Останува да забележиме дека $2m < m^2$, бидејќи во спротивно $m = 2$ и $p = 1 + 2^2 = 5$.

18. Нека p е природен број, таков што $2^p - 1$ е прост број. Докажи дека збирот на позитивните делители на бројот $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ кои се помали од n е еднаков на n.

Решение. Ќе воведеме ознака $q = 2^p - 1$. Бидејќи $n = 2^{p-1}q$ и q е прост број, делители на бројот n кои се помали од него се $1, 2, ..., 2^{p-1}, q, 2q, ..., 2^{p-2}q$. Збирот степените на бројот 2 е

$$A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2^{p-1} = (2-1)(1+2+3+\ldots+2^{p-1}) = 2^p - 1 = q,$$

а збирот на останатите броеви е

$$B = q + 2q + \ldots + 2^{p-2}q = q(2-1)(1+2+\ldots+2^{p-2}) = q(2^{p-1}-1) = q2^{p-1} - q.$$

За нивниот збир имаме $A + B = q + n - q = n$, што требаше да се докаже.

19. Дали постои природен број n кој е делив со точно 2000 различни прости броеви, таков што бројот $2^n + 1$ е делив со n?

Решение. Со индукција по k ќе докажеме дека за секој $k \in \mathbb{N}$ постои $n_k \in \mathbb{N}$ кој има точно k различни прости делители и важи $n_k \mid 2^{n_k} + 1$ и $3 \mid n_k$.

За $k = 1$ бројот $n_1 = 3$ го задоволува условот. Нека претпоставиме дека $k \geq 1$ и $n_k = 3^a m$, каде $3 \nmid m$, па m има $k-1$ прости делители. Тогаш бројот $3n_k = 3^{a+1}m$ има точно k прости делители и $2^{3n_k} + 1 = (2^{n_k} + 1)(2^{2n_k} - 2^{n_k} + 1)$ е делив со $3n_k$, бидејќи $3 \mid 2^{2n_k} - 2^{n_k} + 1$. Ќе земеме прост број p кој не е делител на n_k и нека $n_{k+1} = 3pn_k$. Доволно е да се земе p така што $p \mid 2^{3n_k} + 1$ и $p \nmid 2^{n_k} + 1$.

Последното е можно, бидејќи за секој природен број $a > 2$ постои прост број p кој е делител на $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$, но не е делител на $a + 1$. Навистина, од $a^2 - a + 1 = (a+1)(a-2) + 1$ следува дека $\text{NZD}(a+1, a^2 - a + 1) \mid 3$ и $3^2 \nmid a^2 - a + 1$, па за p може да се земе било кој прост делител на бројот $a^2 - a + 1$ поголем од 3.

20. Да се определат рационалните вредности на x, за коишто бројот $8x^2 - 2x - 3$ е квадрат на рационален број.

Решение. Да го разложиме дадениот израз:

$$8x^2 - 2x - 3 = (2x+1)(4x-3). \qquad (1)$$

За рационални вредности на x двата множители на десната страна се рационални броеви. Производот на овие два рационални броја е квадрат на рационален број, ако и само ако постојат рационални броеви d, u и v така што:

$$2x + 1 = du^2 \text{ и } 4x - 3 = dv^2. \qquad (2)$$

Решавајќи го (2) како систем од равенки по непознати x и d се добива

$$d = \tfrac{5}{2u^2 - v^2} \text{ и } x = \tfrac{1}{2}\tfrac{3u^2 + v^2}{2u^2 - v^2}. \qquad (3)$$

Бидејќи u и v се рационални, а $\sqrt{2}$ е ирационален, изразот што се јавува како именител е 0 ако и само ако $u = v = 0$. Значи, единствен недозволен избор на u и v е $u = v = 0$. За секој друг избор на рационални броеви u и v рационалниот број x (одбран како во (3)) ги задоволува барањата на задачата и притоа важи

$$8x^2 - 2x - 3 = \left(\tfrac{5uv}{2u^2 - v^2}\right)^2.$$

21. Определи ги сите прости броеви p и q за кои бројот $p^{q+1}+q^{p+1}$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Лесно се гледа дека $p=q=2$ е решение на задачата. Нека $p^{q+1}+q^{p+1}=x^2$, $x\in\mathbb{N}$ и p е непарен број. Тогаш $p+1$ е парен број и важи

$$p^{q+1}=(x-q^{\frac{p+1}{2}})(x+q^{\frac{p+1}{2}}).$$

Ако $d=\mathrm{NZD}(x-q^{\frac{p+1}{2}},x+q^{\frac{p+1}{2}})$, тогаш d е степен на p и е делител на $2x$. Но, p е непарен број, па ако $d>1$, тогаш $p\,|\,x$, од каде следува дека $p\,|\,q^{\frac{p+1}{2}}$, т.е. $p\,|\,q$. Значи, $p=q$ и добиваме дека $2p^{p+1}=x^2$, што не е можно.

Според тоа, $d=1$ и $x-q^{\frac{p+1}{2}}=1,\ x+q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}$. Оттука, следува дека

$$2q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}-1,$$

што кога q е непарен број не е можно, бидејќи десната страна ќе се дели со 4, а левата не. Значи, $q=2$ и

$$2^{\frac{p+3}{2}}=p^3-1=(p-1)(p^2+p+1).$$

Меѓутоа, $\mathrm{NZD}(p-1,p^2+p+1)=1$, па затоа $p-1=1$, т.е. $p=2$, што е противречност.

22. Да се докаже дека ниту еден член од низата $a_1=1+2$, $a_2=1+2+2^2,\dots$, $a_n=1+2+2^2+...+2^n$, … не може да се претстави како квадрат, куб или некој повисок степен на природен број.

Решение. За n-тиот член на низата имаме: $a_n=1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$. Да претпоставиме дека $a_n=b^m$, каде што $m,b\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, т.е.

$$b^m=2^{n+1}-1. \tag{1}$$

Од (1) следува дека бројот b е непарен. Ќе покажеме дека m не може да биде парен број. Навистина, ако е $m=2k$ би добиле

$$b^{2k}-1=2^{n+1}-2$$

$$(b^k-1)(b^k+1)=2(2^n-1)$$

што претставува контрадикција, бидејќи левата страна се дели 4 а десната само со 2. Значи, m е непарен број. Тогаш $b^m+1=2^{n+1}$, т.е.

$$(b+1)[(b^{m-1}-b^{m-2})+...+(b^2-b)+1]=2^{n+1}.$$

Изразот во средната заграда е непарен број, бидејќи секоја разлика

$$(b^{m-1}-b^{m-2}),...,(b^2-b)$$

е парен број. Од друга страна, пак, бројот 2^{n+1} нема непарен фактор, што е противречност. Значи, $a_n\neq b^m$, за $b\in\mathbb{N}$.

23. Нека $a_1=1, a_2=3$ и $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, за секој $n=1,2,\dots$. Определи ги сите броеви n за кои a_n е делив со 11.

Решение. Од рекурентната врска следува дека ако два последователни члена на низата се делат со 11, тогаш сите следни членови се делат со 11. Со непосредна проверка се добива дека a_{10} и a_{11} се делат со 11, а меѓу членовите $a_1, a_2, \dots, a_9$ само a_4 и a_8 се делат со 11. Според тоа, a_n се дели со 11 за $n=4, n=8$ или $n \geq 11$.

24. Определи ги сите парови прости броеви p и q за кои $p^2 \mid q^3+1$ и $q^2 \mid p^6-1$.

Решение. Ако $p=3$, од $q^2 \mid 3^6-1=2^3 \cdot 7 \cdot 11$ следува $q=2$ и тоа е едно решение на задачата. Нека $p \neq 3$. Од $\mathrm{NZD}(q+1, q^2-q+1)=1$ или 3, заклучуваме дека $p^2 \mid q+1$ или $p^2 \mid q^2-q+1$, при што и во двата случаја важи $p<q$. За $p+1=q$ го добиваме решението $p=2, q=3$. Нека сега $q \geq p+2$.

Да го разгледаме условот $q^2 \mid p^6-1=(p-1)(p+1)(p^2-p+1)(p^2+p+1)$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(q, p-1)=\mathrm{NZD}(q, p+1)=1$ добиваме $q^2 \mid (p^2-p+1)(p^2+p+1)$. Освен тоа, $\mathrm{NZD}(p^2-p+1, p^2+p+1)=\mathrm{NZD}(p^2+p+1, 2p)=1$, па затоа $q^2 \mid p^2-p+1$ или $q^2 \mid p^2+p+1$. Првото не е можно бидејќи $p^2-p+1<p^2<q^2$, а од второто следува $(p+2)^2 \leq q^2 \leq p^2+p+1$, т.е. $3p+3<0$, што е противречност.

25. Природните броеви a,b,c,p,q,r се такви што $a^2+b^2=c^2$ и $p^2+q^2=r^2$. Дали $ap+bq+cr$ е прост број?

Решение. Нека претпоставиме дека $ap+bq+cr$ е прост број. Тогаш $\mathrm{NZD}(a,b,c)=1$, т.е. $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ и $\mathrm{NZD}(p,q,r)=1$, т.е. $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Но тогаш

$$\begin{aligned}(ap+bq+cr)(ap+bq-cr) &= (ap+bq)^2-(cr)^2 \\ &= a^2p^2+2abpq+b^2q^2-(a^2+b^2)(p^2+q^2) \\ &= -a^2q^2+2aqbp-b^2p^2=-(aq-bp)^2.\end{aligned}$$

Според тоа $ap+bq+cr \mid (aq-bp)^2$. Но бидејќи $ap+bq+cr$ е прост број добиваме дека $ap+bq+cr \mid aq-bp$. Ќе разгледаме два случаи:

Случај 1. $aq-bp=0$. Бидејќи $(a,b)=1$ и $(p,q)=1$ добиваме $a=p$, $b=q$. Но тогаш

$$ap+bq+cr=a^2+b^2+c^2=c^2+c^2=2c^2.$$

Значи, $2 \mid ap+bq+cr$ и $c^2 \mid ap+bq+cr$. Но $ap+bq+cr>3$, па затоа $ap+bq+cr$ не е прост број.

Случај 2. $aq-bp \neq 0$. Во овој случај

$$ap+bq+cr \le |aq-bp| < \max aq,bp\} \le \max\{a,b\}\max\{p,q\} < cr < ap+bq+cr\ .$$

Заради добиената контрадикција и во двата случаи, бројот $ap+bq+cr$ е сложен број.

26. Нека p и q се прости броеви, бројот q^3-1 е делив со p а бројот $p-1$ е делив со q. Докажи дека $p=1+q+q^2$.

Решение. *Прв начин.* Од $p\,|\,(q^3-1)$, $q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$ и p е прост следува дека $p\,|\,(q-1)$ или $p\,|\,(q^2+q+1)$. Ако $p\,|\,(q-1)$ тогаш $q-1\ge p$. Но и $q\,|\,(p-1)$ па $p-1\ge q$. Значи $q\ge p+1\ge q+1+1=q+2$ што не е можно. Значи $p\,|\,(q^2+q+1)$, т.е. постои природен број r така што $q^2+q+1=rp$. Да претпоставиме $r\ge 2$. Значи

$$q^2+q=rp-1=rp-r+r-1=r(p-1)+(r-1),\quad \text{т.е.}\quad r-1=q^2+q-r(p-1).$$

Бројот q е делител на десната страна па следува $q\,|\,(r-1)$ односно постои природен број s, таков што $r-1=sq$. Сега имаме $q^2+q+1=p(sq+1)$, односно

$$q^2+q+1=p(sq+1)-(sq+1)+(sq+1)=(p-1)(sq+1)+(sq+1)$$

и оттука

$$(p-1)(sq+1)=q^2+q+1-sq-1=q^2+q-sq=q(q-s+1).$$

Според тоа $(sq+1)\,|\,q(q-s+1)$. Ако $q\,|\,(sq+1)$ тогаш постои природен број a така што $sq+1=aq$ односно $1=(a-s)q$ што не е можно. Уште q е прост па следува дека броевите q и $sq+1$ се заемно прости и добиваме дека $(sq+1)\,|\,(q-s+1)$. Но тогаш $q-s+1\ge sq+1$, односно $q\ge sq+s$ што не е можно бидејќи s и q се природни броеви. Останува $r=1$ односно $q^2+q+1=p$.

Втор начин. Од $q\,|\,(p-1)$ следува дека постои природен број m така што $p-1=mq$, т.е. $p=mq+1$. Од $p\,|\,(q^3-1)$ следува дека постои $k\in\mathbb{N}$ така што $q^3-1=kp$, односно $(q-1)(q^2+q+1)=kp$. Оттука следува дека $p\,|\,(q-1)$ или $p\,|\,(q^2+q+1)$, (бидејќи p е прост број). Исто како претходно добиваме дека не може да важи $p\,|\,(q-1)$, па мора $p\,|\,(q^2+q+1)$. Значи постои $n\in\mathbb{N}$ таков што $q^2+q+1=np$. Ако во последново равенство го замениме равенството $p=mq+1$ по средувањето добиваме $q^2+(1-mn)q+1-n=0$. Тоа значи дека при досегашните претпоставки равенката $x^2+(1-mn)x+1-n=0$ има решение q и тоа е природен број, па дискриминантата на равенката мора да е ненегативна и да биде квадрат на природен број. Имаме

$$D=(mn-1)^2-4(1-n)=(mn-1)^2+4(n-1)\ge(mn-1)^2.$$

Од друга страна $D=m^2n^2-2mn+4n-3=m^2n^2-\big(n(2m-4)+3\big)$. Ако $m=1$ тогаш $p=q+1$ и $q^3-1=(p-1)^3-1=p^3-3p^2+3p-2$ не е делив со p. Значи $m\ge 2$ и тогаш $n(2m-4)+3\ge 3>0$ од што следува $D=m^2n^2-(n(2m-4)+3)<(mn)^2$.

Според тоа $(mn-1)^2 \le D < (mn)^2$, па мора $D=(mn-1)^2$ а тоа е можно само за $n=1$. Значи $q^2+q+1=p$.

27. Определи ги сите природни броеви n за кои 2^{n+1} е делител на $7^{n!}-3^{n!}$.

Решение. Нека $n!=2^k m$, каде m е непарен број, а k е ненегативен цел број. Тогаш

$$7^{n!}-3^{n!}=(7^m)^{2^k}-(3^m)^{2^k}=(7^m-3^m)(7^m+3^m)(7^{2m}+3^{2m})...(7^{2^{k-1}m}+3^{2^{k-1}m}).$$

Бидејќи

$$7^m+3^m \equiv 7^{2m}+3^{2m} \equiv ... \equiv 7^{2^{k-1}m}+3^{2^{k-1}m} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \text{ и } 7^m-3^m \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 8)$$

заклучуваме дека $2^{k+2} \mid (7^{n!}-3^{n!})$, но $2^{k+3} \nmid (7^{n!}-3^{n!})$. Затоа, $n+1 \le k+2$, т.е. $k \ge n-1$.

Од друга страна, ако $2^t \le n < 2^{t+1}, t \in \mathbb{N}_0$, тогаш

$$k=[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{2^2}]+...+[\tfrac{n}{2^t}] \le \tfrac{n}{2}+\tfrac{n}{2^2}+...+\tfrac{n}{2^t}=n(1-\tfrac{1}{2^t}) \le n-1.$$

Според тоа, $k=n-1$ и $n=2^t$, $t \in \mathbb{N}_0$.

28. Докажи, дека постојат само конечен број тројки природни броеви (a,b,c) такви што $abc=2009(a+b+c)$.

Решение. За секои природни броеви x,y и z постојат 6 нивни пермутации. Според тоа, доволно е да докажеме дека постојат конечен број тројки $a \ge b \ge c$ за кои $abc=2009(a+b+c)$. Имаме

$$abc=2009(a+b+c) \le 2009 \cdot 3a=6027a,$$

од каде следува $bc \le 6027$. Јасно, имаме конечен број парови (b,c) за кои $bc \le 6027$. Бидејќи $a=\frac{2009(b+c)}{bc-2009}$, добиваме дека за секој таков пар постои најмногу еден природен број a за кој $abc=2009(a+b+c)$.

Конечно, постојат конечен број тројки со саканото својство.

29. Ако n е природен број поголем од 2, докажи дека меѓу дропките $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,\frac{n-1}{n}$ има парен број нескратливи дропки.

Решение. Ако k е природен број, $1 \le k < \frac{n}{2}$ и $\frac{k}{n}$ е нескратлива дропка, тогаш $\mathrm{NZD}(k,n)=1$. Но, тогаш и

$$\mathrm{NZD}(n-k,n)=\mathrm{NZD}(n-(n-k),n)=\mathrm{NZD}(k,n)=1,$$

т.е. дропката $\frac{n-k}{n}$ е исто така нескратлива и $\frac{n}{2}<n-k<n$. Значи за секоја нескратлива дропка $\frac{k}{n}$, за $1 \le k < \frac{n}{2}$ постои единствена нескратлива дропка $\frac{n-k}{n}$. Притоа важи $\frac{k}{n} \ne \frac{n-k}{n}$, бидејќи во спротивно добиваме $n=2k$ и $\frac{k}{n}=\frac{n}{2n}$ е скратлива со $n>2$. Значи, добиваме дека бројот на нескратливи дропки е парен.

30. Определи ги сите подредени тројки (m,n,p) позитивни рационални броеви такви што броевите $m+\frac{1}{np}$, $n+\frac{1}{pm}$, $p+\frac{1}{mn}$ се цели.

Решение. Да означиме $a=mnp$. Броевите $\frac{a+1}{mn},\frac{a+1}{np},\frac{a+1}{pm}$ се цели, па затоа и нивниот производ $\frac{(a+1)^3}{a^2}=k$ е цел број. Значи, a е решение на равенката

$$x^3+(3-k)x^2+3x+1=0\,.$$

Оттука следува дека ако $a=\frac{q}{r},(q,r\in\mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(q,r)=1)$, тогаш $q,r\,|\,1$, па затоа $a=1$. Според тоа, $a+1=2a=2mnp$, па затоа $2p=\frac{a+1}{mn}$ е цел број. Аналогно $2m$ и $2n$ се цели броеви, па бидејќи $2m\cdot 2n\cdot 2p=8$, единствени решенија (m,n,p) се тројките $(1,1,1),(1,2,\frac{1}{2})$ и $(4,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ со нивните пермутации.

31. Нека n е природен број таков што $24\,|\,n+1$. Докажи, дека збирот на сите позитивни делители на бројот n е делив со 24.

Решение. Ако $24\,|\,n+1$, тогаш $n=24k-1$, за некој природен број k. Нека a и b се комплементарни делители на бројот n, т.е. $ab=n=24k-1$. Тогаш броевите a и b не се деливи со 2 и со 3, бидејќи десната страна не последното равенство не е делива со 2 и со 3. Да го разгледаме производот

$$a(a+b)=a^2+ab=a^2-1+24k=(a-1)(a+1)+24k\,.$$

Бројот a не е делив со 2, па затоа броевите $a-1$ и $a+1$ се последователни парни броеви и нивниот произво е делив со 8. Од друга страна, еден од броевите $a-1,a,a+1$ е делив со 3, а како бројот a не е делив со 3, заклучуваме дека производот $(a-1)(a+1)$ е делив и со 3. Според тоа, $24\,|\,a(a+b)$. Од $\mathrm{NZD}(24,a)=1$ следува $24\,|\,a+b$, што значи дека збирот на комплементарните делители е делив со 24.

Ако n не е точен квадрат, тогаш ги комбинираме позитивните делители на бројот n кои се помали од $\sqrt{n}$ со нивните комплементарни делители кои се поголеми од $\sqrt{n}$ и добиваме дека во овој случај збирот на сите позитивни делители на бројот n е делив со 24. Ако n е точен квадрат, т.е. $a^2=24k-1$, тогаш од претходните разгледувања следува дека $8\,|\,(a-1)(a+1)=24k-2$, што е противречност.

32. За природниот број n ќе велиме дека е *лош*. Ако не може да се претстави во облик $n=\frac{x^2-1}{y^2-1}$ за некои природни броеви x,y. Докажи, дека множеството лоши броеви е бесконечно.

Решение. Доволно е да докажеме, дека секој број од видот $n=p^2$, каде p е непарен прост број е лош. Нека го препоставиме спротивното, т.е. $(y^2-1)p^2=x^2-1$ за некои природни броеви x и y. Тогаш само еден од броевите $x+1$ и $x-1$ е делив со p.

Ако $p \mid x+1$, тогаш $p^2 \mid x+1$, т.е. $x = kp^2 - 1$, за некој природен број k. Затоа

$$y^2 = \tfrac{x+1}{p^2}(x-1)+1 = k(kp^2-2)+1 = k^2p^2 - 2k + 1.$$

Но,

$$k^2p^2 > k^2p^2 - 2k + 1 > k^2p^2 - 2kp + 1 = (kp-1)^2,$$

што не е можно.

Ако $p \mid x-1$, аналогно добиваме

$$x = kp^2 + 1,\ y^2 = k^2p^2 + 2k + 1 \text{ и } (kp)^2 < y^2 < (kp+1)^2,$$

што повторно не е можно.

33. Нека n е парен природен број кој нема множител точен квадрат поголем од 1, k е цел број, а p е прост број таков што $p < 2\sqrt{n}$, p не е делител на n и p е делител на $n+k^2$. Докажи, дека постојат различни природни броеви a,b,c такви што $n = ab+bc+ca$.

Решение. Бидејќи n е парен број, $p \neq 2$ и исто така p не е делител на k. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $0 < k < p$. За $a = k$ и $b = p - k$ од равенството $n = ab+bc+ca$ следува

$$c = \tfrac{n-k(p-k)}{p} = \tfrac{n+k^2}{p} - k.$$

Според тоа, c е цел број и останува да докажеме дека $c > 0$ и $c \neq a,b$. Од $\frac{n}{k} + k \geq 2\sqrt{n} > p$, следува $n + k^2 > pk$, па затоа $c > 0$.

Ако $c = a$, тогаш $\frac{n+k^2}{p} - k = k$, т.е. $n = k(2p-k)$. Бидејќи n е парен, добиваме дека и k е парен, па затоа $4 \mid n$, што противречи на условот дека n нема множител точен квадрат поголем од 1. Ако $c = b$, тогаш $n = p^2 - k^2$ и повторно бидејќи n е парен, а p е непарен следува дека k е непарен. Сега, $n = p^2 - k^2$ е делив со 4, што е противречност.

Според тоа, a,b,c се различни природни броеви за кои важи равенството $n = ab+bc+ca$.

34. Докажи дека ако n е непарен природен број, тогаш бројот

$$a_k = 1^n + 2^n + \ldots + k^n$$

е делив со $\frac{1}{2}k(k+1)$ за секој природен број k.

Решение. Нека k е парен број. Тогаш:

$$\begin{aligned} 1^n + 2^n + \ldots + (\tfrac{k}{2})^n + (\tfrac{k}{2}+1)^n + \ldots + k^n &= (1^n + k^n) + (2^n + (k-1)^n) + \ldots + ((\tfrac{k}{2})^n + (\tfrac{k}{2}+1)^n) \\ &= (k+1)b_1 + (k+1)b_2 + \ldots + (k+1)b_{\frac{k}{2}} \\ &= (k+1)(b_1 + b_2 + \ldots + b_{\frac{k}{2}}) \end{aligned}$$

и

$$1^n+2^n+...+(\tfrac{k}{2})^n+(\tfrac{k}{2}+1)^n+...+k^n=$$
$$=(1^n+(k-1)^n)+(2^n+(k-2)^n)+...+((\tfrac{k}{2}-1)^n+(\tfrac{k}{2}+1)^n)+(\tfrac{k}{2})^n+k^n$$
$$=kc_1+kc_2+...+kc_{\frac{k}{2}}+(\tfrac{k}{2})^n+k^n$$
$$=\tfrac{k}{2}(2c_1+2c_2+...+2c_{\frac{k}{2}}+(\tfrac{k}{2})^{n-1}+2k^{n-1})$$

па затоа тврдењето е точно. Слично, кога k е непарен број се докажува дека a_k се е делив со $\frac{k+1}{2}$ и со k.

35. Докажи дека за секој природен број n бројот $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ е делив со 23.

Решение. За $n=1$ добиваме

$$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}=5^3+2^5+2^2=161=7\cdot 23,$$

т.е. тврдењето од задачата е точно.

Нека $n=k$ е природен број за кој што е точно тврдењето на задачата, т.е. $5^{2k+1}+2^{k+4}+2^{k+1}=23M$, за некој $M\in\mathbb{N}$. За $n=k+1$ добиваме

$$5^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+4}+2^{(k+1)+1}=25\cdot 5^{2k+1}+2\cdot 2^{k+4}+2\cdot 2^{k+1}$$
$$=23\cdot 5^{2k+1}+2(5^{2k+1}+2^{k+4}+2^{k+1})$$
$$=23(5^{2k+1}+2M),$$

па затоа $23\,|\,5^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+4}+2^{(k+1)+1}$.

Конечно, од принципот за математичка индукција, следува дека

$$23\,|\,5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}, \text{ за секој природен број } n\in\mathbb{N}.$$

36. За секој природен број, бројот $5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$ е делив со 91. Докажи!

Решение. Ќе воведеме ознака

$$a_n=5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)=25^n+5^n-18^n-12^n,$$
$$b_n=25^{n-1}+25^{n-2}\cdot 18+...+25\cdot 18^{n-2}+18^{n-1},$$
$$c_n=12^{n-1}+12^{n-2}\cdot 5+...+12\cdot 5^{n-2}+5^{n-1},$$
$$d_n=25^{n-1}+25^{n-2}\cdot 12+...+25\cdot 12^{n-2}+12^{n-1} \text{ и}$$
$$e_n=18^{n-1}+18^{n-2}\cdot 5+...18\cdot 5^{n-2}+5^{n-1}$$

Имаме

$$a_n=25^n+5^n-18^n-12^n=(25^n-18^n)-(12^n-5^n)=$$
$$=(25-18)(25^{n-1}+25^{n-2}\cdot 18+...+25\cdot 18^{n-2}+18^{n-1})-$$
$$-(12-5)(12^{n-1}+12^{n-2}\cdot 5+...+12\cdot 5^{n-2}+5^{n-1})$$
$$=7(b_n+c_n)$$

односно $7\,|\,5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$.

Од друга страна

$$\begin{aligned} a_n &= 25^n+5^n-18^n-12^n=(25^n-12^n)-(18^n-5^n)= \\ &=(25-12)(25^{n-1}+25^{n-2}\cdot 12+...+25\cdot 12^{n-2}+12^{n-1})- \\ &\quad -(18-5)(18^{n-1}+18^{n-2}\cdot 5+...18\cdot 5^{n-2}+5^{n-1}) \\ &=13(d_n+e_n) \end{aligned}$$

односно $13\,|\,5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$

Конечно, од $\text{NZD}(7,13)=1$ следува $91=7\cdot 13\,|\,5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$.

37. Определи ги сите цели броеви a такви што $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}$ е рационален број.

Решение. Нека $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}=\frac{p}{q}$, каде $p,q\in\mathbb{N}$ и $\text{NZD}(p,q)=1$. Ако го квадрираме последното равенство последователно добиваме

$$\frac{9a+4}{a-6}=\frac{p^2}{q^2}$$

$$9aq^2+4q^2=ap^2-6p^2$$

$$a(9q^2-p^2)=-6p^2-4q^2$$

$$a=\frac{-6p^2-4q^2}{9q^2-p^2}$$

$$a=\frac{54q^2-6p^2-58q^2}{9q^2-p^2}$$

$$a=6-\frac{58q^2}{9q^2-p^2}.$$

Од $a\in\mathbb{Z}$ следува дека $9p^2-q^2\,|\,58q^2$. Понатаму, од $\text{NZD}(p,q)=1$, следува $\text{NZD}(p^2,q^2)=1$, па затоа $\text{NZD}(9q^2-p^2,q^2)=1$. Според тоа, $9p^2-q^2\,|\,58$, што значи дека $(3q-p)(3q+p)\,|\,58$, односно $(3q-p)(3q+p)\in\{1,2,29,58\}$. Решавајќи ги добиените системи равенки добиваме дека само решението на системот

$$\begin{cases} 3q-p=1 \\ 3q+p=29 \end{cases}$$

е во множеството природни броеви, т.е. $p=14, q=5$ и притоа $a=-44$.

За вака определениот цел број $a=-44$ важи $\frac{9a+4}{a-6}=\frac{400}{50}=9>0$, што значи дека тој е единствено решение на задачата.

38. Нека m, n и p се непарни броеви. Докажи дека $\sum\limits_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$ е делив со n .

Решение. За секој непарен број s и секои природни броеви a и b важи

$$a^s+b^s=(a+b)(a^{s-1}-a^{s-2}b+a^{-3}b^2-....-ab^{s-2}+b^{s-1}),$$

т.е. $a+b \mid a^s+b^s$. Понатаму, бројот на собироци во $\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$ е парен, па затоа

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)^p} [k^m+((n-1)^p-k+1)^m].$$

Од претходните разгледувања следува дека $(n-1)^p+1 \mid k^m+((n-1)^p-k+1)^m$, за $k=1,2,...,\frac{1}{2}(n-1)^p$. Понатаму, бидејќи p е непарен број, повоторно од претходните разгледувања следува дека $(n-1)+1=n$ е делител на $n \mid (n-1)^p+1$. Конечно,

$$n \mid (n-1)^p+1 \mid \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)^p} [k^m+((n-1)^p-k+1]^m = \sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m ,$$

што и требаше да се докаже.

39. Нека n е природен број. Ако a и b се природни броеви поголеми од 1 и такви што $ab=2^n-1$, докажи дека бројот $ab-(a-b)-1$ е од видот $2^{2m}k$, каде k е непарен природен број, а m е природен број.

Решение. Нека $a=2^r a_1-1$ и $b=2^s b_1+1$, каде a_1 и b_1 се непарни природни броеви и $r,s \geq 1$. Тогаш

$$2^n-1=ab=(2^r a_1-1)(2^s b_1+1)=2^{r+s}a_1b_1+2^r a_1-2^s b_1-1$$

па затоа $2^r \mid 2^s b_1$ и $2^s \mid 2^r a_1$, што е можно ако и само ако $r=s$. Според тоа,

$$ab-(a-b)-1=(a+1)(b-1)=2^{2r}a_1b_1,$$

каде a_1b_1 е непарен природен број.

40. Со $w(x)$ да го означиме најголемиот непарен делител на природниот број x. Ако a и b се заемно прости природни броеви такви што $a+b(w+1)$ и $b+w(a+1)$ се степени на бројот 2, докажи дека и броевите $a+1$ и $b+1$ исто така се степени на бројот 2.

Решение. Ќе ја користиме вообичаената ознака $2^r \parallel x$ ако $2^r \mid x$ и $2^{r+1} \nmid x$. Парот (a,b) кој ги задоволува условите ќе го нарекуваме $(k,l)-$*решение* ако $2^k \parallel a+1$ и $2^l \parallel b+1$.

Да разгледаме некое $(k,l)-$решение. Нека $a=2^k c-1$, $b=2^l d-1$ и

$$a+w(b+1)=2^k c+d-1=2^m \text{ и } b+w(a+1)=2^l d+c-1=2^n. \qquad (1)$$

Ако $c=1$, тогаш и $d=1$ (и обратно), па тогаш $\mathrm{NZD}(a,b)=\mathrm{NZD}(2^k-1,2^l-1)$. Нека претпоставиме дека $c,d>1$. Од (1) следува $2^k \parallel d-1=2^k b'$ и $2^l \parallel c-1=2^l a'$ за некои непарни броеви a',b', па со замена во (1) добиваме $2^l a'+b'+1=2^{m-k}$ и

$2^k b'+a'+1=2^{n-l}$. Оттука повторно $2^k \parallel a'+1$ и $2^l \parallel b'+1$, па претходните равенки даваат

$$a'+w(b'+1)=a'+\frac{b'+1}{2^l}=2^{m-k-l} \text{ и } b'+w(a'+1)=2^{n-k-l} .$$

Според тоа, парот $(a',b')=(\frac{a+1-2^k}{2^{k+l}},\frac{b+1-2^l}{2^{k+l}})$ исто така е $(k,l)-$решение и притоа важи $a'<a, b'<b$. Дефинираме низи $\{a_n\},\{b_n\}$ со

$a_1=a, b_1=b$ и $a_{n+1}=\frac{a_n+1-2^k}{2^{k+l}}, b_{n+1}=\frac{b_n+1-2^l}{2^{k+l}}$.

Од претходните разгледувања следува дека секој пар (a_i,b_i) е $(k,l)-$решение и $a_n=2^k-1, b_n=2^l-1$, за некој n . Оттука со едноставна индукција наоѓаме

$$a=\frac{2^{n(k+l)}-1}{2^{k+l}-1}(2^k-1) ,\ b=\frac{2^{n(k+l)}-1}{2^{k+l}-1}(2^l-1) .$$

Но, $\text{NZD}(a,b)=1$, па затоа мора да е $n=1$, т.е. $a=2^k-1, b=2^l-1$, што и требаше да се докаже.

41. Најди ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ е квадрат на прост број.

Решение. Нека $\frac{a^2(b-a)}{b+a}=p^2, a,b\in\mathbb{N}$ и p е прост број. Имаме $b=\frac{a(a^2+p^2)}{a^2-p^2}\in\mathbb{N}$. Ќе разгледаме два случаи:

1) Ако $\text{NZD}(a,p)=1$, тогаш $\text{NZD}(a^2+p^2,a^2-p^2)\mid 2$ и $\text{NZD}(a^2-p^2,a)=1$ од каде следува дека задачата нема решение бидејќи $a^2-p^2>2$, па b не е природен број.
2) Ако $\text{NZD}(a,p)\neq 1$, тогаш $a=kp, k\in\mathbb{N}$, па затоа

$$b=\frac{kp\cdot p^2(k^2+1)}{p^2(k^2-1)}=\frac{kp(k^2+1)}{k^2-1} .$$

Од $b\in\mathbb{N}$ следува $\text{NZD}(k^2+1,k^2-1)\mid 2$ и $\text{NZD}(k^2-1,k)=1$, што значи дека $(k^2-1)\mid 2p$, односно $k^2-1\in\{1,2,p,2p\}$.

- Ако $k^2-1=1$, тогаш $k^2=2$, што не е можно.
- Ако $k^2-1=2$, тогаш $k^2=3$, што не е можно.
- Ако $k^2-1=p$, тогаш $(k-1)(k+1)=p$, од каде добиваме $k=2, p=3$, па затоа $a=kp=6, b=10$.
- Ако $k^2-1=2p$, тогаш $(k-1)(k+1)=2p$. Бидејќи $k-1$ и $k+1$ се со иста парност и бидејќи десната страна е делива со 2, заклучуваме дека $k-1$ и $k+1$ се последователни парни броеви, па затоа еден од нив е делив со 4, а другиот со 2. Според тоа, левата страна е делива со 8, а десната не се дели со 8, што значи дека во овој случај задачата нема решение.

Конечно, единствено решение е $(a,b)=(6,10)$.

42. Дадени се цел број $k\geq 3$ и низа $\{a_n\}$, за која $a_k=2k$ и

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}+1, & \text{ако } a_{n-1} \text{ и } n \text{ се заемно прости}\\ 2n, & \text{во спротивен случај,}\end{cases}$$

за секој $n>k$. Докажи, дека бројот a_n-a_{n-1} е прост за бесконечно многу броеви n.

Решение. Нека $a_l=2l$ за некој $l\geq k$ и да испитаме што станува со низата малку после a_l. Лесно се гледа, дека ако p е најмалиот прост делител на $l-1$ (таков p постои, бидејќи според условот $l-1\geq k-1\geq 2$), тогаш

$$\text{NZD}(l-1,i)=\begin{cases} 1, \text{ако } 1\leq i<p,\\ p, \text{ако } i=p.\end{cases}$$

Според тоа,

$$\text{NZD}(2l+i-2,l+i-1)=\begin{cases} 1, \text{ако } 1\leq i<p,\\ p, \text{ако } i=p,\end{cases}$$

што значи дека

$$a_{l+i-1}=\begin{cases} 2l+i-1, & \text{ако } 1\leq i<p,\\ 2l+2p-2, & \text{ако } i=p.\end{cases}$$

Според тоа, $a_{l+p-2}=2l+p-2$ и $a_{l+p-1}=2(l+p-1)$, па затоа

$$a_{l+p-1}-a_{l+p-2}=2(l+p-1)-(2l+p-2)=p$$

е прост број. Освен тоа, од претходните разгледувања следува дека $a_l=2l$ за бесконечно многу вредности на l. Според тоа, постојат бесконечно многу $l\geq k$ за кои $a_l=2l$ и $a_{l+p-1}-a_{l+p-2}=p$ е најмалиот прост делител на $l-1$.

43. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството

$$a^3+4a=b^2.$$

Докажи, дека бројот a е од видот $2t^2, t\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека u^2 е најголемиот точен квадрат кој е делител на a и нека $a=qu^2$, при што сите прости множители на q се различни. Тогаш

$$qu^2(q^2u^4+4)=b^2$$

па затоа $u^2\,|\,b^2$, од каде заклучуваме дека $u\,|\,b$. Нека $b=ru$. Ако замениме во последното равенство добиваме $q(q^2u^4+4)=r^2$. Бидејќи сите прости множители на q се различни, од $q\,|\,r^2$ следува дека $q\,|\,r$, што значи $q^2\,|\,r^2$, т.е. $q\,|\,q^2u^4+4$. Според тоа, $q=4$, па затоа $q=1$ или $q=2$. За $q=1$ важи $u^4+4=r^2$, што не е можно, бидејќи не постојат два точни квадрати кои се разликуваат за 4. Значи, $q=2$, што и требаше да се докаже.

44. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1}-2^{n-1}$.

Решение. Нека $x,y\in\mathbb{N}$. Ако $x\mid y$, тогаш $3^x-2^x\mid 3^y-2^y$, па затоа бројот n ќе го побараме во облик 3^s-2^s. За да важи $3^s-2^s\mid 3^{n-1}-2^{n-1}$, доволно е да важи $s\mid n-1$, т.е. доволно е да важи $s\mid 3^s-2^s-1$. Нека $s=2^t$. Бидејќи за секој природен број t важи $t\le 2^t$, добоваме $s\mid 2^s$. Значи доволно е $2^t=s\mid 3^s-1=3^{2^t}-1$. Последното ќе го докажеме со математичка индукција. За $t=1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $2^t\mid 3^{2^t}-1$. Имаме,

$$3^{2^{t+1}}-1=(3^{2^t}-1)(3^{2^t}+1).$$

Според индуктивната претпоставка првиот множител на десната страна на последното равенство се дели со 2^t, а вториот множител е парен, добиваме дека $2^{t+1}\mid 3^{2^{t+1}}-1$, па од принципот на математичка индукција следува дека $2^t\mid 3^{2^t}-1$, за секој природен број t. Значи, за бројот $n=3^{2^t}-2^{2^t}$ важи $n\mid 3^{n-1}-2^{n-1}$. Меѓутоа, за $t\ge 2$ важи

$$3^{2^t}-2^{2^t}=(3^{2^{t-1}}-2^{2^{t-1}})(3^{2^{t-1}}+2^{2^{t-1}})$$

и очигледно тоа е сложен број. Според тоа, постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1}-2^{n-1}$.

45. Нека n е природен број. Докажи, дека од множеството $\{1,2,3,4,...,2^n\}$ може да избереме најмалку $2^{n-1}+n$ броеви такви што за секои два избрани броеви x и y бројот $x+y$ не е делител на xy.

Решение. Од множеството $\{1,2,3,4,...,2^n\}$ ги избереме непарните броеви $1,3,5,...,2^n-1$ и сите степени на бројот $2,4,8,...,2^n$.

Можни се три случаи.

Случај 1. Ако $x=2a-1$ и $y=2b-1$, тогаш

$$x+y=(2a-1)+(2b-1)=2(a+b-1)$$

е парен број, а

$$xy=(2a-1)(2b-1)=2(2ab-a-b)-1$$

е непарен број. Според тоа $x+y\nmid xy$.

Случај 2. Ако $x=2^k$ и $y=2^m$, при што $k<m$, тогаш

$$x+y=2^k+2^m=2^k(2^{m-k}+1)\text{, а } xy=2^{k+m}.$$

Бројот $x+y$ има непарен делител, а xy нема непарен делител, па затоа $x+y\nmid xy$.

Случај 3. Ако $x=2^k$ и $y=2b-1$, тогаш $x+y=2^k+2b-1>2b-1$ е непарен број. Бројот $x+y=2(2^{k-1}+b)-1$ е непарен број, а најголемиот непарен делител на $xy=2^k(2b-1)$ е $2b-1$. Според тоа $x+y\nmid xy$.

Значи, од множеството $\{1,2,3,4,...,2^n\}$ може да се изберат $2^{n-1}+n$ елементи $1,3,5,...,2^n-1$, $2,4,8,...,2^n$ за кои е исполнет условот од задачата.

46. Определи ја максималната вредност за k таква што меѓу k избрани елементи од множеството $\{1,2,3,....,2n\}$ не постојат два броја такви што едниот од нив е делител на другиот.

Решение. Секој природен број може да се претстави во облик $2^a c$ каде $a\in\mathbb{N}$ и $c\in\mathbb{N}$ е непарен број.

Нека $a_1,a_2,...,a_k$ се природни броеви од множеството $\{1,2,3,....,2n\}$. Секој од нив може да се запише во облик $a_i=2^{n_i}b_i$, каде b_i е непарен и $1\le b_i\le 2n-1$.

Ако $k\ge n+1$, тогаш според принципот на Дирихле постојат i,j, $1\le i<j\le k$ такви што $b_i=b_j=b$. Можни се два случаи.

Случај 1. $n_i>n_j$. Во овој случај $a_j=2^{n_j}b_j=2^{n_j}b\,|\,2^{n_i}b=2^{n_i}b_i=a_i$.

Случај 2. $n_i<n_j$. Во овој случај $a_i=2^{n_i}b_i=2^{n_i}b\,|\,2^{n_j}b=2^{n_j}b_j=a_j$.

Според тоа, за максималната вредност на k имаме $k\le n$. Ако избереме било кои k, $1<k\le n$ броеви $a_1,a_2,...,a_k$ од множеството $\{n+1,n+2,...,2n\}$, тогаш меѓу нив не постојат два броја такви што едниот е делител на другиот. Навистина, ако $n+p,n+l\in\{a_1,a_2,...,a_k\}$ и $n+p<n+l$, тогаш $1<\frac{n+l}{n+p}<\frac{2n}{n+p}<\frac{2n}{n+1}<2$, односно $\frac{n+l}{n+p}$ не е природен број.

Значи, најголема вредност е $k=n$.

47. Нека a,m и n се природни броеви, каде a е парен и $m<n$. Докажи, дека еден од броевите $a^m+1,a^{m+1}+1,a^{m+2}+1,...,a^{m+n}+1$ е заемно прост со секој од останатите броеви.

Решение. Со k да го означиме најголемиот степен на бројот 2 кој е делител на некој од броевите $m,m+1,...,n$. Нека претпоставиме дека постојат два броја кои се деливи со 2^k. Овие броеви можеме да ги запишеме во видот $2^k t_1$ и $2^k t_2$, каде $t_1<t_2$ се непарни броеви. Но, тогаш бројот $2^k(t_1+1)<2^k t_2$ е делив со 2^{k+1}, што противречи на изборот на k.

Според тоа, постои број r, $m\le r\le n$ кој е делив со 2^k и сите други броеви не се деливи со 2^k. Ќе докажеме дека бројот a^r+1 е заемно прост со секој од останатите броеви. Нека p е прост делител на a^r+1. Бидејќи a е парен, добиваме дека p е непарен и тогаш p не е делител на a^r-1. Ако l е степенот на a по модул p, тогаш l е делител на $2r$ (бидејќи $a^{2r}-1$ е делив со p), но не е делител на r (бидејќи a^r-1 не е делив со p). Според тоа, l е делив со 2^{k+1}.

Нека претпоставиме дека p е делител на a^s+1 за $r \neq s$. Тоа значи дека l е делител на $2s$, т.е. 2^k е делител на s, што е противречност.

Докажавме, дека секој прост делител на a^s+1 не е делител на ниту еден од останатите броеви, т.е. бројот a^r+1 го има саканото својство.

48. Нека $a > 1$ е дадени природен број. Низата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е определена со

$$a_1 = a,\ a_2 = a,\ a_{n+2} = aa_{n+1} - a_n, \text{ за } n \geq 1.$$

Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви такви што секој од нив е делител на барем еден член од дадената низа.

Решение. Со индукција по m ќе докажеме дека за секои два природни броја n и $m \geq 2$ важи

$$a_{n+m} = a_m a_{n+1} - a_{m-1} a_n . \tag{1}$$

Ако за некој $m \geq 2$ равенството важи за секој n, тогаш

$$\begin{aligned} a_{m+1+n} = a_{m(n+1)} &= a_m a_{n+2} - a_{m-1} a_{n+1} \\ &= a_m (aa_{n+1} - a_n) - a_{m-1} a_{n+1} \\ &= (aa_m - a_{m-1}) a_{n+1} - a_m a_n \\ &= a_{m+1} a_{n+1} - a_m a_n , \end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

Од рекурентната зависност следува $\text{NZD}(a_n, a_{n-1}) = 1$ за секој $n \geq 2$. Сега од (1) следува дека $\text{NZD}(a_{n+m}, a_m) = \text{NZD}(a_m, a_n)$. Оттука со индукција следува дека за секои два броја m и n важи $\text{NZD}(a_m, a_n) = a_{\text{NZD}(m,n)}$. Сега задачата следува непосредно. Ако $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ е бесконечна низа од по парови заемно прости природни броеви, тогаш

$$\text{NZD}(a_{n_i}, a_{n_j}) = a_{\text{NZD}(n_i, n_j)} = a \quad = 1 ,$$

т.е. $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ се по парови заемно прости броеви, па затоа прости броеви кои се нивни делители има бесконечно многу.

49. Докажи, дека за секој природен број $a \geq 4$ постојат бесконечно многу природни броеви n кои се делители на $a^n - 1$, но не се деливи со квадрат на прост број.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека $p \geq 3$ е непарен делител на бројот b. Тогаш постои непарен прост број q таков што $q \mid (b+1)^p - 1$, но $q \nmid b$.

Доказ. Ако $b = pc$, тогаш

$$\begin{aligned} (b+1)^p - 1 &= b((b+1)^{p-1} + (b+1)^{p-2} + ... + (b+1) + 1) \\ &= b(Bb^2 + \tfrac{p(p-1)}{2} b + p) \\ &= bp(b(Bc + \tfrac{p-1}{2}) + 1) \\ &= bpd, \end{aligned}$$

и останува да избереме прост делител q на d. Да забележиме дека d е непарен, бидејќи ако b е парен, тогаш $d = bK + 1$ е непарен, а ако b е непарен, тогаш $(b+1)^p - 1$ е непарен, па затоа d е непарен. Јасно, $q \mid (b+1)^p - 1$, но $q \nmid b$. ■

Сега, ќе докажеме дека ако $a \neq 2^k + 1$, тогаш постои низа $p_1, p_2, ...$ од непарни прости броеви таква што ако $p_0 = 1$ и ако $P_n = a^{p_0 p_1 \cdots p_n} - 1$, тогаш $p_1 \mid a - 1$ и $p_{n+1} \mid P_n$, но $p_{n+1} \nmid P_{n-1}$, $n \geq 1$.

Нека p_1 е непарен прост делител на $a-1$ и нека веќе сме ги избрале броевите $p_1, p_2, ..., p_k$. Ако ја примениме лемата за $b = P_k$ и $p = p_k$, наоѓаме непарен прост број p_{k+1} кој е делител на P_k, но не е делител на P_{k-1}.

Понатаму, бидејќи P_{k-1} е делив со броевите $p_1, p_2, ..., p_k$, но не е делив со p_{k+1}, заклучуваме дека p_{k+1} е различен од броевите $p_1, p_2, ..., p_k$. Според тоа, броевите од видот $p_1 p_2 ... p_k$ го имаат саканото својство од условот на задачата.

Ако $a = 2^l + 1$, $l \geq 2$, тогаш $a^2 \neq 2^m + 1$ и осатнува да ги помножиме со 2 најдените броеви за бројот a^2.

50. Нека a, b и c се природни броеви такви што барем еден од нив е заемно прост со останатите два. Докажи, дека постојат природни броеви x, y и z такви што $x^a = y^b + z^c$.

Решение. 1) Нека $\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(a,c) = 1$. Тогаш $\mathrm{NZD}(a,bc) = 1$ и затоа постојат цели броеви u и v такви што $ua + vbc = 1$. Според тоа, a е делител на $-vbc + 1$. Ако $k \geq 1$ е природен број таков што a е делител на $-v - k$, тогаш a е делител на $kbc + 1$, т.е. $kbc + 1 = at$. Тогаш за $x = 2^t$, $y = 2^{kc}$, $z = 2^{kb}$ имаме

$$y^b + z^c = 2^{kbc} + 2^{kbc} = 2^{kbc+1} = (2^t)^a = x^a.$$

2) Нека $\mathrm{NZD}(c,b) = \mathrm{NZD}(c,a) = 1$. Тогаш $\mathrm{NZD}(c,ab) = 1$ и како во 1) следува дека постои природен број k таков што c е делител на $kab + 1$, т.е. $kab + 1 = ct$. Тогаш за $x = 2(2^a - 1)^{kb}$, $y = (2^a - 1)^{ka}$, $z = (2^a - 1)^t$ имаме

$$x^a - y^b = 2^a (2^a - 1)^{kab} - (^a - 1)^{kab} = (2^a - 1)^{kab+1} = z^c.$$

51. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $a \mid b^2, b \mid a^2$ и $a + 1 \mid b^2 + 1$.

Решение. Нека $b^2 = ca$. Од условот на задачата следува $b^2 = ca \mid a^4$ и $a + 1 \mid ca + 1$, а тоа е еквивалелнтно со $c \mid a^3$ и $a + 1 \mid c - 1$. Нека $c = d(a+1) + 1$, $d \in \mathbb{N}_0$. Од $a^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, a+1)$ следува $\frac{a^3}{c} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, a+1)$, т.е. $\frac{a^3}{c} = e(a+1) - 1$, за некој $e \in \mathbb{N}$. Според тоа, $a^3 = (e(a+1) - 1)(d(a+1) + 1)$, од каде после множењето и скратувањето со $a+1$ добиваме

$$a^2 - a + 1 = de(a+1) + (e-d) .$$

Оттука добиваме $e - d \equiv a^2 - a + 1 \equiv 3 (\operatorname{mod} a+1)$, па затоа

$$e - d = k(a+1) + 3 ,\ de = a - 2 - k,\ k \in \mathbb{Z} . \qquad (1)$$

Можни се следниве три случаи:

1) $k \notin \{-1, 0\}$. Во овој случај од (1) следува $de < |e-d| - 1$, што е можно само за $d = 0$. Сега $c = 1$ и $b^2 = a$, па затоа $(a,b) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{N}$.

2) $k = -1$. Од (1) следува $a = d + 1$. Сега $c = a^2$ и $b^2 = a^3$, па затоа $(a,b) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{N}$.

3) $k = 0$. Од (1) следува $a = d^2 + 3d + 2$. Сега

$$c = d(a+1) + 1 = (d+1)^3 \text{ и } b^2 = ca = (d+1)^4 (d+2) .$$

Значи, $d + 2 = t^2$, за некој $t \in \mathbb{N}$, па затоа $(a,b) = (t^2(t^2-1), t(t^2-1)^2),\ t \ge 2$.

52. Нека $p > 2$ е прост број таков што $3 \mid p-2$. Докажи, дека најмногу $p-1$ елементи на множеството

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z}, 0 \le x, y \le p-1\}$$

се деливи со p.

Решение. Од $p \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$ следува дека броевите $0^3, 1^3, ..., (p-1)^3$ даваат различни одстаоци при делење со p. Навистина, ако $a^3 \equiv b^3 (\operatorname{mod} p)$, тогаш со степенување на $\frac{p-2}{3}$ добиваме $a^{p-2} \equiv b^{p-2} (\operatorname{mod} p)$. Но, $a^{p-1} \equiv b^{p-1} (\operatorname{mod} p)$, па затоа $a \equiv b (\operatorname{mod} p)$. Според тоа, за секој $y \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ постои точно еден елемент $s_y = y^2 - x^3 - 1 \in S$ делив со p. Меѓутоа, $s_1 = 1^2 - 0^3 - 1 = 0 = 3^2 - 2^3 - 1 = s_3$, па затоа меѓу елементите $s_0, s_1, ..., s_{p-1}$ има најмногу $p-1$ различни.

53. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, ...$ е дефинирана со

$$a_1 = c, a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3 ,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k \ge 1$ и $m \ge 2$ такви што бројот $a_k^2 + c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

Решение. За $k > 1$ од рекурентната врска добиваме

$$a_k^2 + c^3 = a_{k+1} - a_k = a_k^2 + a_k - a_{k-1}^2 - a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1} + 1) . \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека $d \mid a_k - a_{k-1}$ и $d \mid a_k + a_{k-1} + 1$. Тогаш $d \mid 2a_k + 1$ и $d \mid 2a_{k-1} + 1$. Но, од рекурентната релација следува

$$2(2a_k + 1) = (2a_{k-1} + 1)^2 + 4c^3 + 1 ,$$

па затоа $d \mid 4c^3 + 1$, а оттука следува дека $d \mid 2a_n + 1$, за секој $n < k$. Според тоа, $d \mid 2a_1 + 1 = 2c + 1$. Меѓутоа, тогаш $d \mid 2(4c^3 + 1) - (2c+1)(4c^2 - 2c + 1) = 1$, т.е. $d = 1$.

Сега ако $a_{k+1}-a_k$ е $m-$ти степен, од (1) следува дека и a_k-a_{k-1} е $m-$ти степен. Постапката ја продолжуваме е заклучуваме дека $a_2-a_1=c^2(c+1)$ е $m-$ти степен, па од $\text{NZD}(c^2,c+1)=1$ следува дека c^2 и $c+1$ се $m-$ти степени. Меѓутоа, c не може да биде $m-$ти степен, па затоа m мора да биде парен број и уште повеќе $m=2$. Значи, $c+1$ е точен квадрат. Конечно, ако $c+1$ е точен квадрат, тогаш и $c^2(c+1)=a_1^2+c^3$ е точен квадрат.

54. Определи го најголемиот природен број n за кој постои множество природни броеви $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ такво што

1) броевите a_i, $i=1,2,...,n$ се сложени,
2) броевите a_i, $i=1,2,...,n$ се по парови заемно прости,
3) $1<a_i\le(3n+1)^2$, $i=1,2,...,n$.

Решение. За секој $j=1,2,...,n$ со q_j да го означиме најмалиот прост делител на a_j. Нека $q=\max\limits_{1\le i\le n} q_i$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека тој максимум се достигнува за $i=1$, т.е. $q=q_1$. Очигледно,

$$(3n+1)^2\ge a_1\ge q_1^2\ge p_n^2,$$

каде p_n е $n-$тиот прост број. Затоа треба да важи $p_n\le 3n+1$. Лесно се докажува, на пример со индукција, дека $p_n>3n+1$ за $n\ge15$. Затоа $n\le14$. На пример, множество кое ги има саканите својства и содржи 14 елементи е множеството $\{2^2,3^2,5^2,...,p_{14}^2\}$. Според тоа, најголемиот природен број со саканите својства е бројот $n=14$.

55. За природниот број n ќе велиме дека е специјален ако ако постојат природни броеви a,b,c и d такви што $n=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.
б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.

Решение. а) Ако земеме $a=nc, b=nd$ добиваме дека $\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}=n^3\frac{c^3+2d^3}{c^3+2d^3}=n^3$, што значи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот n^3 е специјален.

б) Нека претпоставиме дека $2014=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$, за некои природни броеви a,b,c и d, т.е. дека $a^3+2b^3=2\cdot19\cdot53(c^3+2d^3)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\text{NZD}(a,b,c,d)=1$. Имаме $x^3\equiv0,\pm1,\pm7,\pm8(\text{mod}19)$, па затоа $a^3+2b^3\equiv0(\text{mod}19)$ ако и само ако $19\,|\,a,b$. Но, тогаш од $19^3\,|\,a^3+2b^3$ следува дека $19^2\,|\,c^3+2d^3$, од каде следува $19\,|\,c,d$, што противречи на $\text{NZD}(a,b,c,d)=1$.

56. Да се докаже дека за секој природен број $k>1$, збирот $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k}$, не е природен број.

Решение. Нека n е најголемиот природен број за кој 2^n е делител на некој од броевите $2,3,4,...,k$. Ако 2^n е делител на два од тие броеви, тогаш тие броеви се од облик $2^n p$ и $2^n q$ за p и q непарни броеви. Бидејќи меѓу секои два непарни природни броеви постои парен број, следува дека меѓу $2^n p$ и $2^n q$, па значи и помеѓу $2,3,4,...,k$, постои природен број од облик $2^n r$ за r парен број. Според тоа 2^{n+1} е делител на некој од броевите $2,3,4,...,k$. Значи, постои само еден број од броевите $2,3,4,...,k$ кој е делив со 2^n. Нека m е тој број. Најмалиот заеднички содржател на броевите $2,3,4,...,k$ е од облик $2^n s$, каде што s е непарен број. Нека $x_i = \frac{2^n s}{i}$, за $i = 2,3,4,...,k$. Тогаш x_i е парен број за секој $i \neq m$ и x_m е непарен. Дадениот збир е

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k}=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{2^n s}=\frac{A}{B},$$

каде што A е непарен, а B е парен природен број. Според тоа, тој збир не е природен број.

57. Нека n е сложен природен број и нека $d_1, d_2, ..., d_m$ се сите негови делители. Докажи, дека

$$\frac{2}{\log n^m}\sum_{k=1}^{m}\log d_k = 1.$$

Решение. Да забележиме дека делителите на бројот n можеме да ги групираме во парови чиј производ е еднаков на n. Без ограничување на општоста нека $1 = d_1 < d_2 < ... < d_m = n$. Тогаш

$$d_1 d_m = n,\ d_2 d_{m-1} = m, ...,\ d_k d_{m+1-k} = n, ...,\ d_m d_1 = n.$$

Ако ги помножиме последните равенства добиваме

$$d_1^2 d_2^2 d_3^2 ... d_m^2 = n^m.$$

Според тоа,

$$\frac{2}{\log n^m}\sum_{k=1}^{m}\log d_k = \frac{2}{\log n^m}\log(d_1 d_2 ... d_m) = \frac{1}{\log n^m}\log(d_1^2 d_2^2 d_3^2 ... d_m^2) = \frac{1}{\log n^m}\log n^m = 1.$$

58. Определи ги сите природни броеви n за кои $8f(n^2) = 27f(n)$, каде со $f(n)$ е означен бројот на сите различни природни делители на n.

Решение. Очигледно $n \neq 1$ и нека $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ е каноничното разложување на n. Тогаш даденото равенство можеме да го запишеме во видот

$$\frac{2a_1+1}{a_1+1}\cdot\frac{2a_2+1}{a_2+1}\cdot...\cdot\frac{2a_r+1}{a_r+1} = (\tfrac{3}{2})^3. \qquad (1)$$

Понатаму, $\frac{3}{2} \leq \frac{2a_i+1}{a_i+1} < 2$ за секој a_i при што знак за равенство на левата страна важи само кога $a_i = 1$. Тогаш од (1) следува дека $2^r > (\frac{3}{2})^3 \geq (\frac{3}{2})^r$, од каде заклучуваме дека $2 \le r \le 3$.

За $r=3$ имаме $a_i =1, i=1,2,3$, од што го добиваме решението $n = p_1 p_2 p_3$ каде p_1, p_2 и p_3 се различни прости броеви.

Нека $r=2$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 \ge a_2$, од каде следува $\frac{2a_1+1}{a_1+1} \ge \frac{2a_2+1}{a_2+1}$. Тогаш од (1) добиваме

$$\frac{2(2a_2+1)}{a_2+1} > \frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} = (\tfrac{3}{2})^3 = \frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} \ge (\frac{2a_2+1}{a_2+1})^2 .$$

Од последните неравенства лесно следува дека $3 \le a_2 \le 5$. Во секој од случаите $a_2 = 3,4,5$ добиваме линеарна равенка по a_1 при што ги добиваме решенијата $(a_1, a_2) = (13,3)$ и $(7,4)$, т.е. $n = p_1^{13} p_2^3$ и $n = p_1^7 p_2^4$, каде p_1 и p_2 се различни прости броеви.

59. За еден природен број ќе велиме дека е *силен*, ако е делив со квадратот на секој свој прост делител (за бројот 1 ќе сметаме дека е силен). Бројот на силните делители на еден број ќе го нарекуваме *сила* на тој број. Колку последователни природни броеви најмногу можеме да избереме така што ниту еден од нив да нема сила која е делива со

а) 2, б) 3 и в) 2015?

Решение. Еден природен број е силен ако секој негов прост делитеч е барем на втор степен. Ако каноничното разложување на еден број е $p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$, тогаш неговата сила е еднаква на $s_1 s_2 ... s_k$, бидејќи за степенот на неговиот делител p_k има s_k можни избори (0,2,..., s_k).

а) Ако избереме 8 последователни броеви, тогаш некој од нив ќе биде делив со 2^2, но нема да биде делив со 2^3, па така неговата сила ќе биде делива со 2. Постојат 7 последователни природни броеви, секој од кои има сила која не е делива со 2, на пример 29, 30, 31, 32, 33, 34 и 35.

б) Ако избереме 16 последователни броеви, некој од нив ќе биде делив со 2^3, но нема да биде делив со 2^4, па така неговата моќ ќе биде делива со 3. Постојат 15 последователни природни броеви, секој од кои кои има сила која не е делива со 3, на пример 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 и 23.

в) Ако избереме $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5$ последователни броеви, тогаш меѓу нив има број m од видот $m = 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 A$, каде при делење со 30 бројот A дава остаток 1, 7, 13, 17, 23 или 29. Тогаш A не е делив со 2, 3 и 5, па така моќта на m е делива со $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.

Од друга страна интервалот $(31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5, 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5)$ содржи $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5 - 1$ последователни природни броеви. Нека претпоставиме дека меѓу нив постои природен број n чија моќ е 2015. Бидејќи $11^5 > 37 \cdot 5^5$, бројот n не може да е од видот $2^{31} \cdot 3^{13} p^5$, каде p е прост број поголем од 7. Од друга страна, $5 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 < 31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$ и $11 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 > 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$, па затоа n не може да е делив со $2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$. Исто така, бидејќи $3^{18} > 2^{18} \cdot 37$, бројот n не може да е од видот $3^{31}\cdot 2^{13}\cdot p^5$, каде $p\ge 5$.

Сите од останатите можности за добивање на сила 2015 доведуваат до значително поголеми броеви. Значи, можеме да избереме $2^{32}\cdot 3^{14}\cdot 5^5-1$ броеви.

60. Позитивни рационални броеви a и b се запишани како децимални броеви. Познато е дека најмалата периода и на двете дропки е со должина од 30 цифри, а во децималниот запис на бројот $a-b$ најмалата периода е со должина од 15 цифри. Кој е најмалиот природен број k за кој најмалиот период во децималниот запис на бројот $a+kb$ исто така може да е со должина од 15 цифри?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека броевите $a,b,a-b$ се често периодични, т.е. периодите започнуваат одма по децималната запирка. Навистина, множењето со степен на бројот 10 не ја менува периодата.

Ќе го искористиме следново познато тврдење: децималниот запис на рационален број r е чисто периодичен со периода T (не задолжително минимална) ако и само ако r е од видот $\frac{m}{10^T-1}$, за некој цел број m.

Во случајов имаме $a=\frac{m}{10^{30}-1}$ и $b=\frac{n}{10^{30}-1}$, за некои цели броеви m и n. Освен тоа, броевите $a-b=\frac{m-n}{10^{30}-1}$ и $a+kb=\frac{m+kn}{10^{30}-1}$ се децимални броеви со периоди 15, т.е. можат да бидат запишани како обични дропки со именители $10^{15}-1$. Тогаш, така може да се запише и нивната разлика $(k+1)b=\frac{(k+1)n}{10^{30}-1}$. Според тоа, бројот $(k+1)n$ се дели со 10^5+1, а бројот n го нема тоа својство, бидејќи во спротивно бројот b ќе има периода 15. Заклучуваме дека бројот $k+1$ се дели со некој прост делител на бројот $10^{15}+1$. Најмалиот таков делител е 7. Значи, $k+1\ge 7$, т.е. $k\ge 6$.

Еден пример за броеви, кои го задоволуваат условот при $k=6$, се добива, ако $a-b=\frac{1}{10^{15}-1}$ и $a+6b=\frac{2}{10^{15}-1}$. Тогаш $a=\frac{8}{7(10^{15}-1)}$ и $b=\frac{1}{7(10^{15}-1)}$. Јасно, најмалите периоди на $a-b$ и $a+6b$ се со должини 15. На читателот му оставаме за вежба да провери дека, најмалите периоди на a и b се со должини 30.

61. Нека a_0 и a_n се различни делители на природниот број $m>1$, а низата природни броеви $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ е таква што важи

$$a_{i+1}=|a_i\pm a_{i-1}|,\text{ за } 0<i<n.$$

Ако $\mathrm{NZD}(a_0,a_1,...,a_n)=1$, докажи дека низата содржи член кој е помал од $\sqrt{m}$.

Решение. Да ги разгледаме два најмали (различни) членови на низата p и q. Ако $\min\{p,q\}=1$, тврдењето тривијално важи. Затоа нека претпоставиме дека $p,q>1$.

Лема 1. Постојат индекси k и l за кои $a_k=p, a_l=q$ и $|k-l|\le 2$.

Доказ. Нека $a_k=p, a_l=q$, $k<l$. Да претпоставиме дека $r=l-k>2$. Со индукција по r ќе докажеме дека за некој $i, k<i<l$ важи $a_i\in\{p,q\}$. Бидејќи

$a_{k+3} \neq |a_{k+2} - a_{k+1}| = p$, добиваме $a_{k+3} = a_{k+1} + a_{k+2}$. Слично, $a_{l-3} = a_{l-1} + a_{l-2}$. Нека $a_m = \max\limits_{p<i<q} a_i$. Јасно, $k+2 < m < l-2$, т.е. $l-k \geq 6$, а исто така

$$a_{m+2} = a_m - a_{m+1} = a_{m-1} \text{ и } a_{m+1} = a_m - a_{m-1} = a_{m-2}.$$

Според тоа, низата $\{a_i^{'}\}$ дефинирана со $a_i^{'} = a_i$, за $i < m$ и $a_i^{'} = a_{i+3}$, за $i \geq m$ ги задоволува условите на задачата. Притоа важи $a_k^{'} = p$ и $a_{l-3}^{'} = q$, па од индуктивната претпоставка (бидејќи $(l-3)-k \geq 3$) важи $a_i^{'} \in \{p,q\}$, за некој $i, (k < i < l-3)$. Тогаш $a_i \in \{p,q\}$ или $a_{i+3} \in \{p,q\}$, со што доказот е завршен. ■

Лема 2. За секој i, $(0 \leq i \leq n)$ постојат $x_i, y_i \in \mathbb{N}_0$ такви што $a_i = x_i p + y_i q$ и $\text{NZD}(x_i, y_i) = 1$.

Доказ. Ги разгледуваме векторите $v_k = (1,0)$ и $v_l = (0,1)$ и за секој i дефинираме

$$v_{i+2} = \varepsilon_i v_i + \varepsilon_i^{'} v_{i+1} \text{ ако } a_{i+2} = \varepsilon_i a_i + \varepsilon_i^{'} a_{i+1}, \ (\varepsilon_i, \varepsilon_i^{'} \in \{-1,1\}).$$

Со едноставна индукција се добива

$$a_i = x_i p + y_i q. \tag{1}$$

Бидејќи

$$x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1} = x_{i+1}(\varepsilon_i y_i + \varepsilon_i^{'} y_{i+1}) - (\varepsilon_i x_i + \varepsilon_i^{'} x_{i+1})y_{i+1} = -\varepsilon_i (x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i)$$

и слично

$$x_i y_{i+2} - x_{i+2}y_i = \varepsilon_i^{'}(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i)$$

имаме

$$x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i, x_i y_{i+2} - x_{i+2}y_i \in \{-1,1\}, \text{ за } 0 \leq i \leq n \tag{2}$$

па затоа $\text{NZD}(x_i, y_i) = 1$. Останува уште да докажеме дека $x_i, y_i \geq 0$ за секој i. Нека претпоставиме дека $x_i < 0$, за некој $i < k$ (случајот $y_i < 0$ и/или $i > l$ е аналоген) и да го разгледаме најголемиот таков i. Од $a_i > 0$ и (1) следува $y_i > 0$. Од (2) и

$$x_i y_{i+1}, x_i y_{i+2} \leq 0 \leq x_{i+1}y_i, x_{i+2}y_i$$

следува дека $v_{i+1}, v_{i+2} \in \{(0,1),(1,0)\}$, а тогаш мора да биде $v_i = \pm(1,-1)$, т.е. $a_i = |p-q|$. Меѓутоа, бидејќи p и q се заемно прости броеви поголеми од 1, важи $\max\{p,q\} > |p-q| \notin \{p,q\}$, што противречи на изборот на p и q. ■

Нека $m = da_0 = ea_n$. Според лема 2 важи $m = dx_0 p + dy_0 q = ex_n p + ey_n q$, при што $\text{NZD}(dx_0, dy_0) \neq \text{NZD}(ex_n, ey_n)$, бидејќи заради $a_0 \neq a_n$ важи $\frac{x_0}{y_0} \neq \frac{x_n}{y_n}$. Оттука следува дека $p \,|\, (dy_0 - ey_n)$, па затоа $dy_0 > p$ или $ey_n > p$. Конечно, $m > pq$, па затоа $\min\{p,q\} < \sqrt{m}$.

4.2. КОНГРУЕНЦИИ И МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. Дали постои природен број за кој збирот на цифрите на неговиот квадрат е:
а) 80; б) 81 ?

Решение. а) Имаме $a \equiv S(a) \pmod 3$ за секој природен број a (каде со $S(a)$ е означен збирот на цифрите на бројот a). Бидејќи квадрат на природен број може да дава само остаток 0 или 1 по модул 3, а $a^2 \equiv 80 \equiv 2 \pmod 3$ добиваме дека не постои полн квадрат со збир на цифри 80.

б) Постои. Таков е на пример 111111111.

2. Определи ги сите цели броеви n за кои постои цел број m таков што n^2+n-1 е делител и на $14m+5$ и на $20m-3$.

Решение. Од условот на задачата следува дека n^2+n-1 е делител на

$$10(14m+5)-7(20m-3)=71.$$

Бидејќи $n^2+n-1=(n+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}>-2$ и 71 е прост број, можни се три случаи $n^2+n-1=-1$, 1 или 71. Во првиот и вториот случај $n=-1,0,1$ и 2 (тврдењето важи за секој цел број m). Во третиот случај решенија на равенката $n^2+n-1=71$ се $n=-9$ и $n=8$. Тогаш $14m+5 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 71)$, после множењето со 5 е еквивалентно со $m \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 71)$, а $20m-3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 71)$ после множењето со 32 е еквивалентно со $m \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 71)$. Според тоа, сите броеви кои при делење со 71 даваат остаток 25 го задоволуваат условот на задачата.

Конечно, $n=-9,-1,0,1,2,8$ се решенија на задачата.

3. Определи го најмалиот природен број M за кој бројот 2012 може да се запише како збир на кубови на M цели броеви.

Решение. Нека бројот 2012 е запишан како збир на кубови на M цели броеви. Лесно се проверува дека за произволен цел број x важи

$$x^3 \equiv 0,1 \text{ или } -1 (\mathrm{mod}\, 9).$$

Од друга страна $2012 \equiv 9 (\mathrm{mod}\, 9)$, па затоа $M \geq 4$. Но, едно можно претставување на 2012 како збир на четири кубови е

$$2012=(-4)^3+5^3+(-25)^3+26^3,$$

па затоа $M=4$.

4. Нека $P(x)=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{30}x^5-\frac{82}{63}x^3+\frac{32}{35}x$. Докажи дека за секој цел број x важи $P(x)\in\mathbb{Z}$.

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$P(x)=\frac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 9}.$$

Сега броителот содржи 2, 5, 7 и 9 последователни цели броеви па е делив со 2, 5, 7 и 9. Значи $P(x)\in\mathbb{Z}$ за секој цел број x.

Втор начин. Ќе го трансформираме дадениот израз во обликот

$$P(x)=x\frac{x^8-30x^6+273x^4-820x^2+576}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 9}.$$

Броевите во именителот се по парови заемно прости, па $P(x)$ ќе биде цел број за секој цел број x ако $x\,Q(x)$ е делив со 2, 7, 7 и 9, каде

$$Q(x)=x^8-30x^6+273x^4-820x^2+576.$$

Ќе ги разгледаме поодделно сите четири случаи.

1° Деливост со 2. Ако $2\,|\,x$, тогаш, јасно $2\,|\,xQ(x)$. Ако, пак, 2 не го дели x, тогаш $x\equiv 1(\operatorname{mod}2)$. За $Q(x)$ имаме $Q(x)\equiv 1-30+273-820+576\equiv 0(\operatorname{mod}2)$ (притоа и $Q(1)=0$), односно $2\,|\,Q(x)$, па и $2\,|\,xQ(x)$.

2° Деливост со 5. Ако $5\,|\,x$, тогаш е јасно. Затоа нека 5 не го дели x. Можни се слениве случаи:

1) $x\equiv \pm 1(\operatorname{mod}5)$ и тогаш $Q(x)\equiv 1-30+273-820+576\equiv 0(\operatorname{mod}5)$,

2) $x\equiv \pm 2(\operatorname{mod}5)$ и тогаш $Q(x)\equiv 2^8-30\cdot 2^6+273\cdot 2^4-820\cdot 2^2+576\equiv 0(\operatorname{mod}5)$, па и овде $5\,|\,xQ(x)$.

3° Деливост со 7. Ако $7\,|\,x$ повторно следува заклучокот. Во спротивно имаме

1) $x\equiv \pm 1(\operatorname{mod}7)$ и тогаш $Q(x)\equiv 1-30+273-820+576\equiv 0(\operatorname{mod}7)$,

2) $x\equiv \pm 2(\operatorname{mod}7)$ и тогаш $Q(x)\equiv 2^8-30\cdot 2^6+273\cdot 2^4-820\cdot 2^2+576\equiv 0(\operatorname{mod}7)$, па и овде $7\,|\,xQ(x)$.

3) $x\equiv \pm 3(\operatorname{mod}7)$ и тогаш $Q(x)\equiv 3^8-30\cdot 3^6+273\cdot 3^4-820\cdot 3^2+576\equiv 0(\operatorname{mod}7)$, па и овде $7\,|\,xQ(x)$.

4° Деливост со 9. Ако $9\,|\,x$, јасно е. Во спротивно:

1) $x\equiv \pm 1(\operatorname{mod}9)$ и тогаш $Q(x)\equiv 1-30+273-820+576\equiv 0(\operatorname{mod}9)$,

2) $x\equiv \pm 2(\operatorname{mod}9)$ имаме $Q(x)\equiv 0(\operatorname{mod}9)$,па $9\,|\,xQ(x)$

3) $x\equiv \pm 3(\operatorname{mod}9)$, па како и претходно $Q(x)\equiv 0(\operatorname{mod}9)$,па $9\,|\,xQ(x)$,

4) $x\equiv \pm 4(\operatorname{mod}9)$, па заради $Q(4)=0$ имаме $Q(x)\equiv 0(\operatorname{mod}9)$ и $9\,|\,xQ(x)$.

Со тоа се исцрпени сите случаи па следува $630\,|\,xQ(x)$ за секој цел број x.

5. Даден е прост број $p>3$. Дали броевите $1,2,...,p-1$ можеме да ги поделиме (разбиеме) на две непразни множества така што збирот на броевите во едното и производот на броевите во другото множество да даваат ист остаток при делење со p?

Решение. Ќе докажеме дека постојат два ненулти остатоци a и b по модул p, такви што нивниот производ е конгруентен со збирот на останатите ненулти остатоци по модул p. За збирот на остатоците имаме

$$\frac{p(p-1)}{2}-a-b\equiv -(a+b)(\operatorname{mod}p),$$

па затоа нашиот услов е еквивалентен на

$$ab\equiv -(a+b)(\operatorname{mod}p),$$

т.е. на

$$(a+1)(b+1) \equiv 1 (\bmod p) .$$

Бидејќи $p > 3$ постојат ненулти остатоци m и n такви што $mn \equiv 1 (\bmod p)$ и $m \neq n$. Освен тоа, јасно е дека $m, n \not\equiv 1 (\bmod p)$, па затоа можеме да избереме $a = m-1$ и $b = n-1$.

Според тоа, бараното разбивање можеме да го направиме.

6. Нека a е природен број и p е прост број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $a^{p^n} + p^n$ има барем два различни прости делители.

Решение. Ако $p \mid a$, тогаш $a^{p^n} + p^n = p^n(pA+1)$, каде A е природен број и тврдењето очигледно важи. Затоа нека претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a, p) = 1$.

Нека p е непарен, $n = pk$ и $a^{p^{n-1}} = x,\ p^k = y$. Тогаш

$$a^{p^n} + p^n = x^p + y^p = (x+y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + ... - xy^{p-2} + y^{p-1})$$

и да претпоставиме дека овој број има не повеќе од еден прост делител, т.е. дека е еднаков на q^t за некој прост број q и некој природен број t. Очигледно $q \neq p$.

Од $q \mid x+y$ следува дека $x \equiv -y (\bmod q)$ и тогаш

$$x^{p-1} - x^{p-2}y + ... - xy^{p-2} + y^{p-1} \equiv py^{p-1} (\bmod q)$$

не е делив со q, што е противречност.

Нека $p = 2$ и $n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N},\ a^{2^{n-2}} = u,\ 2^k = v$. Тогаш

$$a^{2^n} + 2^n = u^4 + 4v^4 = (u^2 + 2uv + v^2)(u^2 - 2uv + v^2) .$$

Двата множители на десната страна се заемно прости и поголеми од 1, па значи имаат различни прости делители.

7. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви p од видот $4k-1,\ k \in \mathbb{N}$ такви што p е делител на $2^q - 1$ за некој прост број.

Решение. Нека $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата прости броеви. Да означиме $Q_n = 2^{q_n} - 1$. Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(Q_m, Q_n) = 1$, за $m \neq n$. Навистина, ако $d \in \mathbb{N}$ е делител на Q_m и Q_n, тогаш d е делител на $2^{\mathrm{NZD}(q_m, q_n)} - 1 = 2^1 - 1 = 1$, па затоа $d = 1$.

Не е можно сите прости делители на Q_n да се конгруентни со 1 по модул 4, бидејќи во тој случај ќе имаме $Q_n \equiv 1 (\bmod 4)$, што противречи на $Q_n = 2^{q_n} - 1 \equiv 3 (\bmod 4)$. Според тоа, Q_n има барем еден прост делител p_n од видот $p_n = 4k_n - 1,\ k_n \in \mathbb{N}$. Освен тоа, кога $m \neq n$, од $\mathrm{NZD}(Q_m, Q_n) = 1$ следува $p_n \neq p_m$. Така добивме бесконечна низа $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ од различни прости броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

8. Определи ги сите природни броеви n такви што $(n^3 + 39n - 2)n! + 17 \cdot 21^n + 5$

е точен квадрат.

Решение. Нека означиме $a_n=(n^3+39n-2)n!+17\cdot 21^n+5$.

Ако $n\geq 4$, тогаш $8\,|\,n!$. Уште повеќе, $a_n\equiv 5^n+5\ (\text{mod}\,8)$.

Ако n е парен број, тогаш $5^n\equiv 1\ (\text{mod}\,8)$, па $a_n\equiv 6(\text{mod}\,8)$. Но, сите точни квадрати имаат остатоци 0, 1 или 4 при делење со 8. Значи, ако $n\geq 4$ и n е парен, тогаш a_n не е точен квадрат.

Нека $n\geq 7$. Јасно $7\,|\,n!$. Тогаш $a_n\equiv 5\ (\text{mod}\,7)$. Од друга страна остатоците на точните квадрати при делење со 7 се 0,1,2 или 4. Значи, a_n не е точен квадрат за $n\geq 7$. Па, од претходната дискусија останува да провериме за $n=1$, $n=2$, $n=3$ и $n=5$.

Ако $n=5$, $a_5\equiv 2\cdot 1^5+5\equiv 2\ (\text{mod}\,5)$.

Бидејќи остатоците на точен квадрат при делење со 5 се 0, 1 или 4, a_5 не е точен квадрат.

За $n=3$, имаме $a_3\equiv 3\ (\text{mod}\,7)$, па a_3 не е точен квадрат.

За $n=2$, имаме $a_2\equiv 1+5\equiv 2\ (\text{mod}\,4)$, па a_2 не е точен квадрат.

За $n=1$, $a_1=(1+39-2)\cdot 1+17\cdot 21+5=400$.

Значи, само за $n=1$, a_n е точен квадрат.

9. Нека p е прост број и $a_1,a_2,...,a_{2p-1}$ се различни природни броеви од интервалот $[1,p^2]$ чиј збир е делив со p. Докажи, дека постојат природни броеви $b_1,b_2,...,b_{2p-1}$ такви што ниту еден од нив не е делив со p и за кои

1) Во записот на секој од нив во броен систем со основа p се среќаваат само цифрите 0 и 1,
2) Збирот $a_1b_1+a_2b_2+...+a_{2p-1}b_{2p-1}$ е делив со p^{2012}.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме за произволен природен број n. За таа цел прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако $x_1,x_2,...,x_{p-1}$ се природни броеви кои не се деливи со p, тогаш за секој r, $1\leq r\leq p-2$ можеме за избереме неколку од нив чиј збир при делење со p дава остаток r.

Доказ. Да ставиме $S_0=0$ и да претпоставиме дека сме нашле $k,0\leq k\leq p-2$ збирови $S_0,S_1,....,S_k$ во секој од кои учествуваат само броеви од $x_1,x_2,...,x_k$ и кои при делење со p даваат различни остатоци. Го додаваме бројот x_{k+1} и да ги разгледаме збировите $S_0+x_{k+1},S_1+x_{k+1},....,S_k+x_{k+1}$ кои при делење со p даваат различни остатоци. Ако претпоставиме дека тие остатоци се пермутација на $S_0,S_1,....,S_k$ и собереме почлено ќе добиеме $(k+1)x_{k+1}\equiv 0(\text{mod}\,p)$, што не е можно. Според тоа, добивме барем еден нов остаток и така по индукција ќе ги добиеме сите можни ненулти остатоци. Со тоа лемата е докажана. ■

Сега тврдењето следува по индукција. Бидејќи збирот на дадените броеви е делив со p, имаме база на индукцијата.

Нека претпоставиме дека постојат броеви $b_1, b_2, ..., b_{2p-1}$ кои ги задоволуваат условот и такви што $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{2p-1}b_{2p-1} = p^n A$ каде $n \geq 1$ и p не е делител на A. Бидејќи во интервалот $[1, p^2]$ има точно p броеви кои се деливи со p, добиваме дека меѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{2p-1}$ има барем $p-1$ кои не се деливи со p. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа се броевите $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$.

Согласно лемата, без ограничување на општоста можеме да земеме дека за броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ е точно дека збирот $a_1 + a_2 + ... + a_k + A$ е делив со p. Сега, ако ставиме $b_i^{'} = b_i + p^n, i = 1, 2, ..., k$ и $b_i^{'} = b_i, i = k+1, k+2, ..., 2p-1$, тогаш новите броеви го задоволуваат условот и $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{2p-1}b_{2p-1}$ е делив со p^{n+1}.

10. Определи го бројот на природните броеви a кои се помали од 2003 и за кои постои природен број n таков што $3^{2003} | n^3 + a$.

Решение. Ќе докажеме дека бараните броеви имаат еден од следниве облици $9k \pm 1$, $3^3(9k \pm 1)$ или $3^6(9k \pm 1)$.

Нека претпоставиме дека 3 не е делител на a. Бидејќи $n^3 \equiv 0, \pm 1 (\mathrm{mod}\, 9)$, заклучуваме дека $a \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 9)$.

Обратно, нека $a \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 9)$. Бидејќи $1^3 - 1$ и $2^3 + 1$ се деливи со 9, следува дека постои n таков што $3^s, s \geq 2$ е делител на $n^3 + a$ и 3^{s+1} не е делител на $n^3 + a$, т.е. $n^3 + a = 3^s t$, каде $3 \nmid t$. Ќе докажеме дека бројот $n_1 = n + 2 \cdot 3^{s-1} t$ е таков што $n_1^3 + a$ е делив со 3^{s+1}. Имаме

$$(n + 2 \cdot 3^{s-1} t)^3 + a = 3^s t(2n^2 + 1) + 4 \cdot 3^{2s-1} nt^2 + 8 \cdot 3^{3s-3} t^3.$$

Бидејќи 3 не е делител на n, заклучуваме дека $2n^2 + 1$ е делив со 3. Освен тоа $2s - 1 \geq s + 1$ и $3s - 3 \geq s + 1$, па затоа $n_1^3 + a$ е делив со 3^{s+1}. Продолжувајќи на истиот начин ќе добиеме дека постои природен број n_p таков што $3^{2003} | n_p^3 + a$.

Ако $a < 2003$ е делив со 3, тогаш $a = 3^s b$, каде $s \leq 6$. Тогаш 3 е делител на n, т.е. $n = 3^p n_0$, каде $p \geq 1$ и $3 \nmid n_0$. Ако $p \geq 3$, тогаш $3^9 | n^3$ и $3^9 \nmid a$, па затоа $3^{2003} \nmid n^3 + a$. Според тоа, $p = 1$ или $p = 2$, од каде следува дека $s = 3$ или $s = 6$, соодветно.

Во првиот случај добиваме дека $3^{2000} | n_0^3 + b$, каде $3 \nmid b$ и $27b < 2003$. Сега, како и претгходно заклучуваме дека $b \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 9)$.

Во вториот случај добиваме дека $3^{1997} | n_0^3 + b$, каде $3 \nmid b$ и $729b < 2003$. Сега како и претходно заклучуваме дека $b\equiv\pm1 (\mathrm{mod}\, 9)$.

Бројот на природните броеви $b\equiv\pm1 (\mathrm{mod}\, 9)$ такви што $b<2003, 27b<2003$ или $729b<2003$ е еднаков на $2\cdot 222+1=445, 2\cdot 8+1=17$ или 1, соодветно. Според тоа, постојат $445+17+1=463$ броеви со саканото својство.

11. Определи ги сите природни броеви m кои имаат точно три различни прости делители p, q и r, такви што:

а) $p-1\,|\,m$, $qr-1\,|\,m$, б) $q-1\nmid m$, $r-1\nmid m$, $3\nmid q+r$.

Решение. Бројот m можеме да го претставиме во облик $m=p^a q^b r^c$. Броевите q и r не можат да бидат 2, бидејќи $2-1=1$ е делител на секој природен број, од каде следува дека се непарни, то ест $qr-1$ е парен, па мора m да биде парен, т.е. $p=2$.

Од $\mathrm{NZD}(q,qr-1)=1=\mathrm{NZD}(r,qr-1)$ и $qr-1\,|\,m$, следува дека $qr-1\,|\,2^a$, од каде $qr-1=2^k$ за некој природен број $k\le a$. Ова значи дека бројот 2^k+1 има точно два делители. Бројот k може да се претстави во облик $k=2^t s$, каде t е најголемиот степен на 2 во k, а s е најголемиот непарен делител на k. Ако $s>1$, тогаш:

$$2^k+1=(2^{2^t})^s+1=(2^{2^t}+1)((2^{2^t})^{s-1}-(2^{2^t})^{s-2}+\ldots-(2^{2^t})+1).$$

Последното е можно само ако

$$q=2^{2^t}+1,\ r=(2^{2^t})^{s-1}-(2^{2^t})^{s-2}+\ldots-(2^{2^t})+1$$

или обратно, но тогаш $q-1=2^{2^t}\,|\,m$ или $p=2^{2^t}\,|\,m$, што противречи на условите на задачата.

Следува дека $s=1$, то ест $k=2^t$ е степен на 2 и $qr=2^{2^t}+1$, то ест $2^{2^t}+1$ е производ на два прости броеви. За $t=0$ имаме $2^{2^t}+1=3$ и ова очогледно не е случај, па затоа $t>1$. Од

$$2^{2^t}+1\equiv 2^{2\cdot 2^{t-1}}+1\equiv (2^2)^{2^{t-1}}+1\equiv 4^{2^{t-1}}+1\equiv 1^{2^{t-1}}+1\equiv 1+1\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3),$$

следува дека $3\nmid q$ и $3\nmid r$. Ако $q\equiv r (\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш $qr\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, па мора едниот да е конгруентен со еден, а другиот со два, но тогаш нивниот збир е делив со три, што противречи на последнит услов од задачата, т.е. број кој ги задоволува дадените услови не постои.

12. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 2009 и чиј збир на цифри е еднаков на 2009.

Решение. Бидејќи $2009=223\cdot 9+2$, бараниот број има барем 224 цифри. Ќе разгледуваме 224-цифрени броеви $x=\overline{c_{223}c_{222}\ldots c_1 c_0}$. Јасно е дека $c_{223}\ge 2$. Притоа, ако $c_{223}=2$, тогаш $c_{222}=c_{221}=\ldots=c_1=c_0=9$ и $x=3\cdot 10^{223}-1$, а овој број не е делив со $2009=7^2\cdot 41$, бидејќи $x\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Нека $c_{223}=3$. Тогаш $x=399...989...9=4\cdot 10^{223}-10^i-1$, за некој i. Бидејќи $10^5\equiv 1(\operatorname{mod} 41)$ имаме $10^i\equiv 1,10,18,16$ или $31(\operatorname{mod} 41)$, за $i=0,1,2,3,4(\operatorname{mod} 5)$, соодветно и оттука следува $x=4\cdot 10^{223}-10^i-1\equiv 22-10^i(\operatorname{mod} 41)$, т.е. x никогаш не е делив со 41.

Нека $c_{223}=4$. Меѓу цифрите $c_{222},c_{221},...,c_1,c_0$ се наожаат две осумки или една седумка, додека сите останати се деветки. Во секој случај

$$x=5\cdot 10^{223}-10^i-10^j-1\equiv 38-(10^i+10^j)(\operatorname{mod} 41).$$

Од претходните разгледувања имаме $10^i+10^j\equiv 38(\operatorname{mod} 41)$ ако и само ако $(i,j)\equiv(0,4)$ или $(4,0)(\operatorname{mod} 5)$. Притоа $i\neq j$ и $i,j\leq 220$.

Да ставиме $j=220$ и $i\equiv 4(\operatorname{mod} 5)$. Треба да избереме i, ако постои, така што

$$7^2\mid x=5\cdot 10^{223}-10^{220}-10^i-1\equiv 5\cdot 10^{13}-10^{10}-10^i-1\equiv 31-10^i(\operatorname{mod} 49).$$

Лесно се добива дека $10^i\equiv 31(\operatorname{mod} 49)$ ако и само ако $i\equiv 7(\operatorname{mod} 42)$, што заедно со $i\equiv 4(\operatorname{mod} 5)$ ја дава единствената можност $i=49$. Според тоа, бараниот број е

$$x=4998\underbrace{9...99}_{170}8\underbrace{9...99}_{49}.$$

13. За природниот број n велиме дека има својство P ако важи: Ако n е делител на a^n-1 за некој цел број a, тогаш и n^2 е делител на a^n-1.

а) Докажи дека секој прост број има својство P.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу сложени броеви кои го имаат својство P.

Решение. а) Нека $n=p$ е прост број и нека $p\mid a^p-1$. Од малата теорема на Ферма имаме $a^p\equiv a(\operatorname{mod} p)$, па затоа $1\equiv a^p\equiv a(\operatorname{mod} p)$. Според тоа, за секој природен број k важи $a^k\equiv 1(\operatorname{mod} p)$, па затоа $1+a+a^2+...+a^{p-1}\equiv 0(\operatorname{mod} p)$. Сега имаме $p\mid a-1$ и $p\mid 1+a+a^2+...+a^{p-1}$, од каде следува дека

$$p^2\mid (a-1)(1+a+a^2+...+a^{p-1})=a^p-1,$$

што и требаше да се докаже.

б) Нека $n=p_1p_2...p_k$ е производ на k различни прости броеви и нека $n\mid a^n-1$. Јасно, $p_i\mid (a^{\frac{n}{p_i}})^{p_i}-1$, па од а) следува дека $p_i^2\mid (a^{\frac{n}{p_i}})^{p_i}-1=a^n-1$. Но, броевите $p_1,p_2,...,p_k$ се заемно прости, па затоа

$$n^2=p_1^2p_2^2...p_k^2\mid= a^n-1.$$

Сега тврдењето на задачата следува од бесконечноста на множеството просsi броеви.

14. Нека $p_1,p_2\geq 5$ се прости броеви за кои важи $6\mid p_1+p_2$. Докажи дека

$$A=1^{p_1p_2+1}+2^{p_1p_2+2}+3^{p_1p_2+3}+4^{p_1p_2+4}+5^{p_1p_2+5}+6^{p_1p_2+6}$$

е сложен број.

Решение. Бидејќи секој прост број поголем од три е од облик $6k\pm1$ и како $6\,|\,p_1+p_2$, заклучуваме дека едниот број е од облик $6m-1$, а другиот е од облик $6n+1$. Значи, $p_1p_2\equiv-1(\bmod 6)$, т.е. $p_1p_2+1=6s$. Имаме

$$1^{p_1p_2+1}+6^{p_1p_2+6}\equiv1^{p_1p_2+1}+(-1)^{6s+5}\equiv1-1\equiv0(\bmod 7),$$

а од малата теорема на Ферма за $a\in\{2,3,4,5,6\}$ добиваме

$$\begin{aligned}2^{p_1p_2+2}+3^{p_1p_2+3}+4^{p_1p_2+4}+5^{p_1p_2+5}&=2^{6s+1}+3^{6s+2}+4^{6s+3}+5^{6s+4}\\&=2\cdot(2^6)^s+9\cdot(3^6)^s+64\cdot(4^6)^s+625\cdot(5^6)^s\\&\equiv2+9+64+625\equiv0(\bmod 7)\end{aligned}$$

Конечно, од претходноте разгледувања следува дека $7\,|\,A$ и како $A>7$ заклучуваме дека A е сложен број.

15. Нека $a,b,c,...,k$ се природни броеви такви што

$$a\,|\,2^b-1,\, b\,|\,2^c-1,...,k\,|\,2^a-1.$$

Докажи дека $a=b=c=...=k=1$.

Решение. Нека p е најмал прост делител на 2^b-1 и нека претпоставиме дека $b>1$. Јасно, $2^b\equiv1(\bmod p)$. Од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1}\equiv1(\bmod p)$.

Ако $A=\mathrm{NZD}(b,p-1)$, тогаш $2^A\equiv1(\bmod p)$. Од $A\,|\,p-1$ следува $A\le p-1<p$, а од $A\,|\,b$ следува дека $A\,|\,2^c-1$. Ако q е прост делител на A добиваме дека постои прост делител $q<p$ на 2^c-1. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека постои прост делител r на 2^b-1 и притоа важи $r<...<q<p$, што противречи на претпоставката дека p е најмал прост делител на 2^{b-1}.

Конечно, од добиената противречност следува $b=1$. Сега од $a\,|\,2^b-1$ заклучуваме $a=1$, од што последователно следува $k=1$ итн.

4.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Најди ги целобројните решенија на равенката $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.

Решение. *Прв начин.* Изразите во корените треба да се ненегативни па $x\ge\frac{1}{5},\, y\ge\frac{1}{5}$. Но x и y треба да се цели броеви па $x\ge1,\, y\ge1$. Исто така треба $\sqrt{x-\frac{1}{5}}\le\sqrt{5}$ и $\sqrt{y-\frac{1}{5}}\le\sqrt{5}$, односно $x-\frac{1}{5}\le5$ и $y-\frac{1}{5}\le5$. Но x и y се цели броеви па $x\le5$ и $y\le5$. Сега да претпоставиме дека $x\le y$ (случајот $x\ge y$ ќе биде аналоген со претходниот). Нека $y=x+t$. Притоа $x\in\{1,2,3,4,5\}$ и $t\in\{0,1,...,5-x\}$. Ја добиваме равенката $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{x+t-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$ односно $\sqrt{x+t-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}$. Со двапати квадрирање и средување на добиените изрази последната равенка се трансформира во $x=\frac{t^2-10t+29}{20}$. Имајќи предвид дека $0\le t\le 4$ со проверка добиваме дека $20\,|\,t^2-10t+29$ само ако $t=1$. Тогаш $x=1$ и $y=2$. Значи добивме дека ако равенката има решенија тие мора да се $x=1, y=2$ или $x=2, y=1$ (случајот $x\ge y$). Со проверка добиваме дека тие се навистина решенија на почетната равенка.

Втор начин. На ист начин како во првиот начин на решавање доаѓаме до заклучокот $1\le x\le 5$ и $1\le y\le 5$. Потоа проверуваме дали паровите (x,y) каде $x,y\in\{1,2,3,4,5\}$ се решенија на равенката. Притоа заради симетричноста на x и y во равенката доволно е да ги провериме случаите кога $x\le y$. Добиваме дека решение е само парот $(1,2)$. Заради симетричноста на x и y решение ќе биде и парот $(2,1)$.

Трет начин. На ист начин како во претходните решенија изведуваме закучок дека $x\ge 1$ и $y\ge 1$. Значи $x+y\ge 2$. Ако ја квадрираме почетната равенка добиваме $2\sqrt{(x-\frac{1}{5})(y-\frac{1}{5})}=-(x+y)+\frac{27}{5}$, па бидејќи левата страна е позитивна мора да е и десната. Оттука следува дека $x+y\le\frac{27}{5}$, односно $x+y\le 5$. Добивме $2\le x+y\le 5$. Со проверка на сите случаи, т.е. за $x+y=2, x+y=3, x+y=4,$ $x+y=5$ и за сите ненегативни цели броеви што можат да ги примат x и y во тие случаи, добиваме дека единствени вредности на x и y кои се и решенија на равенката се $(1,2)$ и $(2,1)$.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xyz+yzt+xzt+xyt=xyzt+3.$$

Решение. По делење на равенката со $xyzt$ добиваме $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1+\frac{3}{xyzt}$. Заради симетрија, без губење од општост, претпоставуваме дека

$$x\le y\le z\le t \qquad (1)$$

од каде следува $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}\ge\frac{1}{t}$. Добиваме $\frac{4}{x}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1+\frac{3}{xyzt}>1$, од каде следува $x<4$.

Случај 1. Нека $x=3$. Тогаш равенката е од облик

$$3yz+yzt+3zt+3yt=3yzt+3,$$

односно $3(yz+zt+yt)=2yzt+3$. По делење на оваа равенка со yzt добиваме

$$3(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=2+\frac{3}{xyzt}>2,\ \frac{9}{y}>2,$$

од каде $y\le 4$. Можни вредности за y се 3 и 4.

а) За $y=4$ добиваме

$$3(4z+zt+4t)=8zt+3, 12(z+t)=5zt+3, 12(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=5+\frac{3}{zt}>5, \frac{24}{z}>5,$$

од каде $z\le 4$. Од (1) следува $z=4$ и равенката го добива обликот $12(4+t)=20t+3,$ односно $8t=45$, па t не е природен број.

б) За $y=3$, добиваме

$$3(3z+zt+3t)=6zt+3,\ 3(z+t)=zt+1, 3(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{1}{zx}>1,\ \frac{6}{z}>1, z<6 .$$

Можни вредности за z се $3,4,5$.

Нека $z=3$. Тогаш $3(3+t)=3t+1$ што не е можно.

Ако $z=4$, тогаш $3(4+t)=4t+1,\quad t=11$.

Ако $z=5$, тогаш $3(5+t)=5t+1, t=7$.

Решенија се четворките $(3,3,4,11)$, $(3,3,5,7)$.

Случај 2. Нека $x=2$. Тогаш равенката е од облик

$$2yz+yzt+2zt+2yt=2yzt+3,$$

т.е.

$$2(yz+zt+yt)=yzt+3 .... \qquad (2)$$

Тогаш секој од броевите y,z,t е непарен. По делење на оваа равенка со yzt добиваме $2(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{3}{xyzt}>1$ од каде $\frac{6}{y}>1$, односно $y<6$.

а) Ако $y=5$ тогаш (2) е од облик $2(5z+zt+5t)=5zt+3$, т.е. $10(z+t)=3zt+3$. Оттука $10(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=3+\frac{3}{zt}>3$ значи $\frac{1}{z}>\frac{3}{20}$, односно $z\le 6$. Единствена можност е $z=5$. Добиваме $10(5+t)=15t+3$, односно $5t=47$ од каде t не е природен број.

б) Ако $y=3$, (2) е од облик $2(3z+zt+3t)=3zt+3$, односно $6(z+t)=zt+3$. Тогаш $6(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{3}{zt}>1$, од каде $\frac{12}{z}>1$, односно $z<12$. Можности за z се $3,5,7,9,11$.

Ако $z=3$, тогаш $6(3+t)=3t+3$, од каде $3t=-15$, односно $t=-5\notin\mathbb{N}$.

Ако $z=5$, тогаш $6(5+t)=5t+3$, $t=-27\notin\mathbb{N}$.

Ако $z=7$, тогаш $6(7+t)=7t+3$, $t=39$.

Ако $z=9$, тогаш $6(9+t)=9t+3$, од каде $3t=51$, односно $t=17$.

Значи во овој случај решенија се четворките $(2,3,7,39)$, $(2,3,9,17)$.

Случај 3. Нека $x=1$. Тогаш равенката е од облик $yz+yzt+zt+yt=yzt+3$, односно $yz+zt+yt=3$. Од (1) добиваме $3yz\le 3$, односно $yz\le 1$, од каде $y=1$ и $z=1$. Тогаш $1+2t=3$, односно $t=1$. Решение е четворката $(1,1,1,1)$.

Конечно, решенија на почетната равенка се $(3,3,4,11)$, $(3,3,5,7)$, $(2,3,7,39)$, $(2,3,9,17)$, $(1,1,1,1)$ и сите нивни пермутации.

3. Најди двоцифрен број, таков што производот на тој број со неговата цифра на десетките е трицифрен број, кој што се запишува со цифрите на двоцифрениот број.

Решение. *Прв начин.* Ако двоцифрениот број е $\overline{xy}$, тогаш производот $\overline{xy}\cdot x$, може да биде еднаков на $\overline{xxx}$, $\overline{xxy}$, $\overline{xyx}$, $\overline{xyy}$, $\overline{xyy}$, $\overline{yxx}$, $\overline{yxy}$, $\overline{yyx}$ или $\overline{yyy}$. Но имајќи го предвид очигледното неравенство $\overline{xy}<100$, т.е. $\overline{xy}\cdot x<100x$, заклучуваме дека x не може да биде цифрата на стотките. Затоа ги разгледуваме само преостанатите четири можности.

1) Ако $\overline{xy}\cdot x=\overline{yxx}$, тогаш $10x^2+xy=100y+11x$, т.е.

$$10(x^2-10y)=x(11-y) \qquad (1)$$

Десната страна на равенката (1) ќе биде делива со 10 само ако $x=5$ или $11-y=5$. Ако $x=5$, тогаш $10(25-10y)=5(11-y)$, т.е. $19y=39$, што не е можно. Ако $11-y=5$, т.е. ако $y=6$, тогаш $10(x^2-60)=5x$, т.е. $2(x^2-60)=x$. Бидејќи x е цифра, последната равенка е можна само ако $x^2-60>0$, т.е. $x\geq 8$. Значи, $x\in\{8,9\}$. Со проверка добиваме дека $x=8$.

2) Равенката $\overline{xy}\cdot x=\overline{yxy}$ ја запишуваме во видот $\overline{xy}\cdot x=100y+\overline{xy}$, т.е. $\overline{xy}(x-1)=100y$, која очигледно нема решение, бидејќи левата страна не може да биде деллива со 100.

3) Равенката $\overline{xy}\cdot x=\overline{yyx}$ ја трансформираме во видот

$$x(y-1)=10(11y-x^2) \qquad (2)$$

Левата страна на равенката (2) ќе биде делива со 10 само ако $x=5$ или $y-1=5$. Ако $x=5$, тогаш $5(y-1)=10(11y-25)$, односно $21y=49$, што не е можно. Ако $y-1=5$, т.е. $y=6$, тогаш од (2) добиваме

$$5x=10(66-x^2)\text{, т.е. } x=2(66-x^2)\,.$$

Но, последната равенка нема целобројни решенија.

4) Равенката $\overline{xy}\cdot x=\overline{yyy}$ ја запишуваме во видот $\overline{xy}\cdot y=3\cdot 37\cdot y$, од што заклучуваме дека $\overline{xy}\in\{37,74\}$. Но, очигледно овие броеви не го задоволуваат условот од задачата.

Значи, единствено решение е бројот 86.

Втор начин. Од условот $\overline{xy}\cdot x=n$ следува дека n е трицифрен број, чии цифри се x или y. Ќе докажеме дека цифрата на стотките на бројот n може да биде само y. Очигледно е дека $\overline{xy}<100$, т.е. $\overline{xy}\cdot x<100x$, па следува дека x не може да биде цифра на стотките на бројот n. Значи, ако постои таков број n, тогаш неговата цифра на стотките е y. Од горното неравенство следува дека $y<x$. Понатаму, бидејќи за $x\leq 3$, следува $(10x+y)\cdot y<10y$, заклучуваме дека $x>3$. Бројот $\overline{xy}\cdot x=10x^2+xy$ треба да завршува или на x или на y. Тоа, пак значи дека производот xy треба да завршува или на x или на y. Имајќи ги предвид условите $x>3$ и $x>y$, тоа е можно само за броевите 53, 62. 64, 75. 86 и 95. Со проверка се заклучува дека барањата на задачата ги задоволува само бројот 86.

4. Реши ја во $\mathbb{Z}$ равенката

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}\,.$$

Решение. Ако $x=0$, тогаш $y=\frac{7}{3}$, т.е. равенката нема целобројно решение. Значи $x\neq 0$ и аналогно $y\neq 0$. За $x\cdot y\neq 0$ имаме

$$3x^2 - 3xy + 3y^2 = 7x + 7y$$

$$3x^2 - (3y+7)x + 3y^2 - 7y = 0.$$

Равенката ќе има реални решенија, ако $D \geq 0$.

$$D = (3y-7)^2 - 12(3y^2 - 7y) = -27y^2 + 126y + 49 \geq 0$$

Оттука $y \in [\frac{21-14\sqrt{3}}{9}, \frac{21+14\sqrt{3}}{9}]$. Од $y \in \mathbb{Z}$ и $y \neq 0$,следува $y \in \{1,2,3,4,5\}$. Треба $D = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

1° Ако $y = 1$, тогаш $D = -27 + 126 + 49 = 148 \neq k^2$.

2° Ако $y = 2$, тогаш $D = 193 \neq k^2$.

3° Ако $y = 3$, тогаш $D = 184 \neq k^2$.

4° Ако $y = 4$, тогаш $D = 121 = 11^2$.

5° Ако $y = 5$, тогаш $D = 4 = 2^2$.

Ако $y = 4$, тогаш од равенката $3x^2 - 19x - 20 = 0$ наоѓаме $x_1 = \frac{4}{3}$ и $x_2 = 5$, па едно решение е парот $(5,4)$. Слично, за $y = 5$ добиваме $x = 4$.

Следствено, множеството решенија е $\{(5,4),(4,5)\}$.

5. Најди ги сите цели броеви m и n за кои важи $(n-m)^2 = \frac{4nm}{n+m-1}$.

Решение. *Прв начин.* Најпрво да забележиме дека ако равенството важи за парот (m,n) тогаш важи и за парот (n,m) затоа што равенството може да се запише и во обликот $(n-m)^2 = \frac{4nm}{n+m-1}$. Сега $m+n-1 \neq 0$, па множејќи го равенството со $m+n-1$ го добиваме равенството $(m+n)(m^2 - m - 2mn - n + n^2) = 0$, односно $(m+n)((m-n)^2 - m - n) = 0$. Оттука $m+n = 0$ или $(m-n)^2 = m+n$.

- За $m+n=0$ добиваме $m = -n$ па во овој случај деденото равенство важи за сите парови $(k,-k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- За $(m-n)^2 = m+n$ имаме $m+n \geq 0$. Да ставиме $m-n = s$. Тогаш $m+n = s^2$, па добиваме $m = \frac{s(s+1)}{2}, n = \frac{s(s-1)}{2}$. Притоа заради $m+n-1 \neq 0$ добиваме $s \neq \pm 1$. Значи во овој случај равенството важи кога едниот од броевите m,n е од облик $\frac{s(s-1)}{2}$ а другиот $\frac{s(s+1)}{2}$ за $s \neq \pm 1$ (притоа $2 \mid s(s-1)$ и $2 \mid s(s+1)$ па $\frac{s(s-1)}{2}, \frac{s(s+1)}{2} \in \mathbb{Z}$). Конечно равенството е исполнето ако

$$(m,n) \in \left\{ \{(k,-k), (\frac{s(s-1)}{2}, \frac{s(s+1)}{2}) \mid k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}\} \right\}.$$

Втор начин. Исто како при првиот начин на решавање се доаѓа до равенството $(m+n)(m^2 - m - 2mn - n + n^2) = 0$ и оттука:

1) За $m+n=0$ добиваме $m = -n$ па во овој случај деденото равенство важи за сите парови $(k,-k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Равенството $(m-n)^2=m+n$ го трансформираме во $n^2-(2m+1)n+(m^2-m)=0$. Последната равенка да ја разгледаме како квадратна равенка по n. Според тоа постојат цели броеви кои го исполнуваат равенството $(m-n)^2=m+n$ ако и само ако

$(2m+1)^2-4(m^2-m)=8m+1$

е квадрат на цел број т.е. ако $8m+1=k^2$, $k\in\mathbb{Z}$. Оттука $8\,|\,(k^2-1)$, па $k=8r\pm 1$ или $k=8r\pm 3$.

Ако $k=8r+1$ тогаш $8m+1=(8r+1)^2$ па $m=2r(4r+1)$. Заменувајќи го m во $n^2-(2m+1)n+(m^2-m)=0$ и решавајќи ја равенката по n добиваме две можности за n а тоа се $n_1=8r^2+6r+1$ и $n_2=8r^2-2r$.

Аналогно постапуваме и за случаите $k=8r-1$, $k=8r+3$ и $k=8r-3$ и ги добиваме соодветните облици за n и m.

Конечно паровите броеви (m,n) за кои важи равенството се добиените во 1. и 2.

6. Нека p е прост број. Определи ги сите цели броеви x и y такви што

$$(2x+y)^3=p^2x(x+y)^2.$$

Решение. Нека $2x+y=A$ и $x+y=B$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $A^3=p^2B^2(A-B)$, од каде следува дека $p\,|\,A$. Нека $A=pA_1$, каде A_1 е цел број. Тогаш $pA_1^3=B^2(pA_1-B)$, од каде следува дека $p\,|\,B$ (во спротивно левата страна не е делива со p). Нека $B=pB_1$, каде B_1 е цел број. Тогаш ја добиваме равенката $A_1^3=B_1^2(pA_1-B_1)$, која е од ист вид како равенката $A^3=p^2B^2(A-B)$, па затоа можеме да ја продолжиме постапката. Јасно, ако $A\neq 0$ постапката продолжува бесконечно, т.е. A треба да биде произволен број пати делив со p, што не е можно. Според тоа, $A=B=0$, од каде добиваме $x=y=0$.

7. Во множеството прости броеви реши ја равенката $pqr=5(p+q+r)$.

Решение. Ќе претпоставиме дека $p\neq q\neq r\neq p$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $p<q<r$. Бидејќи 5 е прост број, некој од броевите p,q,r е еднаков на 5. Секој од случаите $p=5$, $q=5$, $r=5$ ќе го разгледаме одделно.

а) Ако $p=5$, тогаш равенката го добива обликот $5qr=5(5+q+r)$, која што можеме да ја запишеме во облик

$$(q-1)(r-1)=6=1\cdot 6=2\cdot 3.$$

При тоа, можни се следните случаи:

$$\begin{cases}q-1=1\\ r-1=6\end{cases}\qquad \begin{cases}q-1=2\\ r-1=3\end{cases}\qquad \begin{cases}q-1=3\\ r-1=2\end{cases}\qquad \begin{cases}q-1=6\\ r-1=1.\end{cases}$$

Решение на првиот систем е $q=2$, $r=7$, кое не го задоволува условот $p<q$. Во овој случај равенката нема решение. Решение на вториот систем е $q=3$, $r=4$

кое не ги исполнува условите $p<q$ и r е прост број. Решение на третиот систем е $q=4$, $r=3$ кое не ги исполнува условите q е прост број и $p<r$. Решение на четвртиот систем е $q=7$, $r=2$ кое не го исполнува условот $p<r$. Значи, во овој случај равенката нема решение.

б) Ако $q=5$, тогаш равенката го добива обликот $5pr=5(p+5+r)$, која што можеме да ја запишеме во облик

$$(p-1)(r-1)=6=3\cdot 2=1\cdot 6.$$

Слично како и под а) ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases} p-1=1 \\ r-1=6 \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=2 \\ r-1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=3 \\ r-1=2 \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=6 \\ r-1=1. \end{cases}$$

Првиот систем има решение $p=7>5=q$ и $r=2<5=q$ што е спротивно на претпоставката. Вториот систем има решение $p=4$, $r=3$ кое не е решение на равенката бидејќи p не е прост број. Третиот систем има решение $p=3$ и $r=4$ кое не е решение на почетната равенка, бидејќи r не е прост број. Четвртиот систем има решение $p=2$ и $r=7$ кое е решение на почетната равенка.

в) Ако $r=5$, тогаш равенката го добива обликот

$$5pq=5(p+q+5),$$

која како и во претходните случаи може да се запише во облик $(p-1)(q-1)=6$. Во овој случај како и под а) не може да се најде решение на равенката кое ги исполнува горните претпоставки.

Во останатите случаи, т.е. кога два од простите броеви се еднакви меѓу себе, доведуваат до квадратни равенки кои немаат решенија во множеството прости броеви. Ист е и случајот кога сите три се еднакви меѓу себе.

Ако решенијата ги разгледуваме како подредени тројки (p,q,r) равенката има шест решенија и тоа $(2,5,7)$, $(2,7,5)$, $(5,2,7)$, $(5,7,2)$, $(7,2,5)$ и $(7,5,2)$.

8. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3=(x-y)(3xy+1).$$

Решение. *Прв начин*. Ако ставиме $x=y+z$, после смената во дадената равенка ја добиваме равенката

$$z(z^2-1)=(-y)^3. \qquad (1)$$

Ако $z>1$, тогаш $-y>0$. Бидејќи броевите z и z^2-1 се заемно прости, следува дека $z=a^3$ и $z^2-1=b^3$, каде $a,b\in\mathbb{N}$. Оттука добиваме $(a^2)^3-b^3=1$, што не е можно (докажи!). Ако $z<-1$, ставаме $t=-z$ и (1) го прима видот $t(t^2-1)=y^3$, па според претходно изнесеното повторно немаме решение. Според тоа, $z=0$, $z=\pm 1$, $y=0$ и добиваме дека решенија на дадената равенка се $(x,y)=(0,0), (1,0)$, $(-1,0)$.

Втор начин. Нека $x\neq 0, x\neq y$. Бидејќи броевите x и $3xy+1$ се заемно прости добиваме, дека x е делител на $x-y$, т.е. x е делител на y. Ставаме $x=ky$, каде

$k \in \mathbb{Z}$. Заменуваме во дадената равенка и добиваме $(1-k)(3ky^2+1)=x^2$. Ако $k>1$ или $k<0$, десњата страна на последната равенка е негативна, што не е можно. За $k=0,1$ ги добиваме решенијата $(x,y)=(0,0),(1,0),(-1,0)$.

9. Определи ги сите природни броеви m и n такви тшо

$$(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3. \qquad (1)$$

Решение. Нека m и n се природни броеви кои го задоволуваат условот (1), кој е еквивалентне на условот

$$(m^2+n+n^2+m)^2-(m^2+n-n^2-m)^2=8(m-n)^3$$

т.е. на условот

$$(m^2+n+n^2+m)^2=(m-n)^2[8(m-n)+(m+n-1)^2].$$

Од последното равенство следува дека $8(m-n)+(m+n-1)^2$ е точен квадрат. Но, $m>n$, па затоа $(m+n-1+2s)^2=8(m-n)+(m+n-1)^2$, за некој природен број s. Тогаш $s(m+n-1+s)=2(m-n)$ и бидејќи $m+n-1+s>m-n$, заклучуваме дека $s<2$. Според тоа, $s=1$ и оттука следува дека $m=3n$. Но, сега левата страна на (1) е поголема од $m^3=27n^3$, додека десната страна е еднаква на $16n^3$, што е противречност. Според тоа, не постојат природни броеви кои го задоволуваат условот (1).

10. Докажи дека равенката

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30,$$

нема решение во множеството на целите броеви.

Решение. Нека $a=x-y,\ b=y-z,\ c=z-x$. Тогаш $a+b+c=0$ и:

$$30=a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-a-b)^3=-3a^2b-3ab^2=-3ab(a+b)=3abc.$$

Дадената равенка се сведува на системот

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ abc=10 \end{cases}$$

Оттука следува дека $a,b,c\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Без губење од општоста може да претпоставиме дека $|a|\ge|b|\ge|c|$, па оттука лесно се гледа дека системот нема решение во множеството на целите броеви.

11. Определи го најмалиот природен број n за кој постојат природни броеви a,b и c, ниту еден од кои не е точен квадрат и такви што

$$a^3+b^3+c^3-3abc=2013^n.$$

Решение. Лесно се докажува дека левата страна на даденото равенство е делива со 9, што значи дека равенката нема решение за $n=1$.
Нека $n=2$. Имаме

$$2013^2=(3\cdot11\cdot61)^2,\ 3^2=2^3+1^3 \text{ и } 11\cdot61=8^3+4^3+1^3+3\cdot8\cdot4\cdot1.$$

Ќе искористиме и дека

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)=u^3+v^3+w^3-3uvw,$$

каде $u=ax+by+cz,\ v=ay+bz+cx,\ w=az+bx+cy$. Ако го примениме ова равенство прво за $(8,4,-1)$ и $(4,8,-1)$, а потоа за добиената тројка $(65,0,56)$ и $(2,1,0)$ добиваме

$$65^3+56^3=(11\cdot 61)^2 \text{ и } 130^3+177^3+56^3-3\cdot 130\cdot 177\cdot 56=2013^2.$$

12. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $a-b$ е прост број и ab е квадрат на природен број.

Решение. Нека p е прост број таков што $a-b=p$ и нека $ab=k^2$, каде $a,\ b,\ k\in\mathbb{N}$. Ако во $ab=k^2$ замениме $a=b+p$ добиваме $(b+p)b=k^2$. Последната равенка ќе ја помножиме со 4 и истата можеме да ја запишеме во обликот

$$(2b+p)^2-4k^2=p^2 \Leftrightarrow (2b+p-2k)(2b+p+2k)=p^2.$$

Но, $2b+p+2k>2b+p-2k$ и од тоа што p е прост број, добиваме дека

$$2b+p+2k=p^2 \text{ и } 2b+p-2k=1.$$

Собирајќи ги последните две равенки добиваме

$$4b+2p=p^2+1, \text{ т.е. } b=(\tfrac{p-1}{2})^2,$$

па според тоа $a=b+p=(\frac{p+1}{2})^2$.

Конечно, за секој непарен прост број p подредениот пар природни броеви $(a,b)=((\frac{p+1}{2})^2,(\frac{p-1}{2})^2)$ ги задоволува условите на задачата.

13. Докажи, дека равенката $m^2=n^5-4$ нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Од условот следува дека n е природен број и $n\geq 2$, т.е. доволно е да бараме решенија во множеството рприодни броеви. Лесно се проверува дека можните остатоци на квадрат на еден природен број при делење со 11 се 0, 1, 3, 4, 5 и 9, т.е. $m^2\equiv 0,1,3,4,5,9(\text{mod}11)$. Аналогно $n^5\equiv 0,1,10(\text{mod}11)$, па затоа $n^5-4\equiv 6,7,8(\text{mod}11)$. Од горните конгруенции следува дека $m^2\not\equiv n^5-4(\text{mod}11)$, што значи дека дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

14. Докажи дека равенката $x^n+y^n=z^n$, $n\in N$ нема решенија во множеството природни броеви, такви што $z\leq n$.

Решение. Нека $x\leq y$. Тогаш важи $z>y$, $z>x$ и

$$x^n=z^n-y^n=(z-y)(z^{n-1}+z^{n-2}y+\ldots+zy^{n-2}+y^{n-1})>(z-y)nx^{n-1}\geq nx^{n-1},$$

односно $x\geq n$, па $z>n$, што противречи на условот на задачата.

15. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот p^2-p+1 е точен куб.

Решение. Равенката $p^2-p+1=b^3$ можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1)=(b-1)(b^2+b+1).$$

Од $b<p$ следува дека $p\,|\,b^2+b+1$, т.е. $b^2+b+1=kp$ и $p-1=k(b-1)$, за некој цел број p. Уште повеќе $k\geq 3$ бидејќи b^2+b+1 е непарен број. Според тоа $p=kb-k+1$ и

$$b^2+b+1-kp=b^2-(k^2-1)b+(k^2-k+1)=0 \qquad (1)$$

што е квадратна равенка по b. Нејзината дискриминаната

$$D=(k^2-1)^2-4(k^2-k+1)=k^4-6k^2+4k-3$$

мора да е точен квадрат. Сега од $(k^2-3)^2\leq D<(k^2-2)^2$, следува $D=(k^2-3)^2$, па затоа $k=3$. Конечно, од (1) следува $b=7$ и $p=19$ и тоа е единствено решение.

16. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2=0.$$

Решение. Јасно, едно решение на дадената равенка е $a=b=c=d=0$. Нека претпоставиме дека дадената равенка има некое дрго решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a,b,c,d)=1$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2(a^2+5b^2)=(2c+d)^2+5d^2. \qquad (1)$$

Ќе разгледуваме конгруенции по модул 5. Притоа да забележиме дека за секој $p\in\mathbb{Z}$ важи $p^2\equiv 0,1$ или $4(\mathrm{mod}\,5)$. Од (1) следува дека

$$2a^2\equiv(2c+d)^2(\mathrm{mod}\,5).$$

Ако $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $(2c+d)^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$ што е противречност.

Ако $a^2\equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $(2c+d)^2\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$ што е противречност.

Значи, $a^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ и тогаш $(2c+d)^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, од каде следува дека $a\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ и $2c+d\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$. Воведуваме замени $a=5x$ и $2c+d=5y$, со што ја добиваме равенката

$$2(5x^2+b^2)=5y^2+d^2.$$

На потполно ист начин како и претходно заклучуваме дека $b\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ и $d\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, а потоа од $2c+d=5y$ следува дека $c\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$. Според тоа, важи $5\,|\,\mathrm{NZD}(a,b,c,d)$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека единствено решение на почетната равенка е $a=b=c=d=0$.

17. Дали постои правоаголен триаголник чии должини на катетите се природни броеви, а неговата хипотенуза има должина 2016^{2017}.

Решение. Нека претпоставиме дека таков триаголник постои, т.е. дека постојат природни броеви a и b такви што

$$a^2+b^2=(2016^{2017})^2.$$

Бидејќи $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ од претходното равенство следува

$$a^2 + b^2 = 2^{20170} \cdot 3^{8068} \cdot 7^{4034}. \qquad (1)$$

При делење со 4 квадрат на природен број дава остаток 0 или 1, па како десната страна на последното равенство е делива со 4, добиваме дека броевите a и b се парни. Со аналогни размислувања добиваме дека двете страни на равенството треба да се деливи со 4^n, па како $2^{20170} = 4^{10085}$, заклучуваме дека $a = 2^{10085} m$, $b = 2^{10085} n$. Сега равенството (1) го добива обликот

$$m^2 + n^2 = 3^{8068} \cdot 7^{4034}. \qquad (2)$$

Значи, $3 \mid m^2 + n^2$, па оттука со едноставни разгледувања добиваме дека $3 \mid m$ и $3 \mid n$, од што на потполно иста начин ако и погоре добиваме дека $m = 3^{4034} u$, $n = 3^{4034} v$. Сега равенството (2) го добива обликот

$$u^2 + v^2 = 7^{4034}.$$

Аналогно заклучуваме дека $u = 7^{2017} s$, $v = 7^{2017} t$, па затоа од последнот равенство добиваме $s^2 + t^2 = 1$, што не е можно во множеството природни броеви. Според тоа, не постои правоаголен триаголник со саканото својство.

18. Во множеството на природни броеви реши ја равенката

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336$$

Решение. Да забележиме дека ако една подредена тројка е решение на равенката тогаш и секоја нејзина пермутација е решение. Нека x, y и z е решение во $\mathbb{N}$ на равенката. Ќе докажеме дека $x \neq y \neq z \neq x$. Нека $x = y$. Можни се следниве случаи.

1) $x = z$ 2) $x > z$ 3) $z = x + 1$ 4) $z > x + 1$

Случај 1. Ако $x = z$, тогаш $2^x + 2^y + 2^z = 3 \cdot 2^x$ но 2336 не е делив со 3.

Случај 2. Ако $x > z$, тогаш $x = z + k$, $k \in N$, па имаме

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^z (2 \cdot 2^k + 1) = 2336 = 2^5 \cdot 73,$$

но 73 не е од облик $2 \cdot 2^k + 1$.

Случај 3. Ако $z = x + 1$, тогаш $2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+2}$ не е делив со 73, а 2336 е делив.

Случај 4. Ако $z > x + 1$, тогаш $z = x + m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, па

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+1}(1 + 2^m) = 2336 = 2^5 \cdot 73,$$

но 73 не може да се претстави како $1 + 2^m$.

Значи, можеме без губење на општоста да претпоставиме дека $x < y < z$. Тоа значи дека $y = x + n$ и $z = x + n + h$, $n, h \in \mathbb{N}$, па имаме

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^x (1 + 2^n (1 + 2^h)) = 2336 = 2^5 \cdot 73,$$

од каде следува $x = 5$, $y = 8$ и $z = 11$.

Конечно, решенија на равенката се сите пермутации на подредената тројка $(5, 8, 11)$.

19. Равенката $2^{x+1}+y^2=z^2$ да се реши во множеството прости броеви.

Решение. Равенката ќе ја трансформираме во обликот $2^{x+1}=z^2-y^2$, т.е. во обликот $2^{x+1}=(z-y)(z+y)$. Од последната равенка, јасно е дека $z-y=2^k$ и $z+y=2^{x-k+1}$, $0\le k<x-k+1$, каде што k е некој цел број. Од системот равенки

$$\begin{cases} z-y=2^k \\ z+y=2^{x-k+1} \end{cases}$$

добиваме $z=2^{k-1}+2^{x-k}$, $y=2^{x-k}-2^{k-1}$. Ако $k-1\ge 1$, тогаш броевите z и y, $y<z$ се два парни броја и тие не може да бидат истовремено прости. Заради тоа $k-1=0$, т. е. $k=1$. Во тој случај $z=2^{x-1}+1$, $y=2^{x-1}-1$.

Кога x е природен број, тогаш броевите $2^{x-1}-1$, 2^{x-1}, $2^{x+1}+1$ се три последователни природни броеви. Заради тоа еден од нив е број кој е делив со 3. Бидејќи 2^{x-1} е парен број, еден од броевите $2^{x-1}-1$, $2^{x+1}+1$ е делив со 3. Според тоа, $3\,|\,(2^{x-1}-1)$ или $3\,|\,(2^{x-1}+1)$.

Бројот $2^{x-1}+1$ е прост и делив со 3, ако $2^{x-1}+1=3$, т. е. $x-1=1$. Во овој случај $y=2^{x-1}-1=1$, кој не е прост број. Значи, овој случај не е можен.

Бројот $2^{x-1}-1$ е прост и делив со 3, ако $2^{x-1}-1=3$, т. е. $x-1=2$, $x=3$. Во овој случај $x=3, y=3, z=5$, и тоа е единствено решение.

20. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$(y^3+xy-1)(x^2+x-y)=(x^3-xy+1)(y^2+x-y).$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во обликот

$$x-y=\tfrac{x^2-1}{x^2+x-y}+\tfrac{y^2-1}{y^2+x-y},$$

при што случаите $x^2+x=y$ и/или $y^2+y=x$ се елементарни и треба оделно да се разгедаат. Ако $y=x$, тогаш $x^2=1$, од каде ги добиваме решенијата $(1,1)$ и $(-1,-1)$. За $|x|\le 1$ и/или $|y|\le 1$ ги добиваме уште и решенијата $(0,0), (0,1)$, $(-1,0), (1,2)$ и $(-2,-1)$. Сега, нека $|x|,|y|\ge 2$ и $x\ne y$.

Нека $k=x-y>0$, $k=\frac{x^2-1}{x^2+k}+\frac{y^2-1}{y^2+k}$. Очигледно и двете дропки се меѓу 0 и 1, што значи, дека $k=1$ и $\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{y^2-1}{y^2+1}=1$. Но, сега и двете дропки се од интервалот $(\frac{1}{2},1)$ што е противречност.

Нека $t=y-x>0$ и да ја запишеме равенката во видот

$$t+2=\tfrac{t-1}{t-x^2}+\tfrac{t-1}{t-y^2}.$$

Ако истовремено $t > x^2$ и $t > y^2$, тогаш $2(y-x) = 2t > x^2 + y^2$, па затоа $(x+1)^2 + (y-1)^2 < 2$, што не е можно бидејќи $|x|,|y| \geq 2$. Според тоа, една од дропките помала или еднаква на нула. Но очигледно другата е помала или еднаква на $t-1$, што значи дека нивниот збир е помал или еднаков на $t-1$, што е противречност.

21. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$3^{2a+1}b^2 + 1 = 2^c .$$

Решение. Да го разгледаме прво случајот $a \geq 0$. Јасно $c \geq 0$ при што $c = 0$ повлекува $b = 0$. Добиваме дека решенија се $(a,0,0)$ за произволен ненегативен цел број a. Од равенството $3^{2a+1}b^2 + 1 = 2^c$ следува дека b е непарен цел број. Левата страна можеме да ја запишеме во обликот

$$3^{2a+1}b^2 + 1 = (3^{2a+1} + 1)b^2 - (b-1)(b+1) .$$

За десната страна од последното равенство забележиме дека $(b-1)(b+1)$ е делив со 8, а $(3^{2a+1} + 1)b^2$ е делив со 4 но не и со 8. Затоа $2^c = 4$, т.е. $c = 2$. Но, тогаш $3^{2a+1}b^2 = 3$, па $a = 0$ и $b = \pm 1$.

Да го разгледаме сега случајот $a < 0$. Повторно $c \geq 0$ при што $c = 0$ повлекува $b = 0$ и тогаш a може да е произволен негативен цел број. Затоа да се ограничиме на случајот $c > 0$. Доволно е да го разгледаме случајот $b > 0$. Ставајќи $d = -a$, диофантовата равенка од условот на задачата го добива обликот

$$(2^c - 1)3^{2d-1} = b^2 ,$$

при што b, c и d се природни броеви. Значи b е делив со 3, од што следува дека c е парен број.

Од досега изнесеното следува дека $b = 3^d x$, $c = 2y$, за некои природни броеви x и y. Диофантовата равенка се сведува до обликот

$$4^{y-1} + 4^{y-2} + \cdots + 1 = x^2 .$$

Според тоа, $x = y = 1$. Имено, за $y \geq 2$ добивме дека $x^2 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$, што не е можно. Значи во овој случај единствените решенија се $(a, 3^{-a}, 2)$, каде a е произволен негативен цел број.

Множеството M од сите решенија на дадената диофантова равенка е

$$M = \{(a,0,0) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(a, \pm 3^{-a}, 2) \mid a \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\} .$$

22. Во множеството цели ненегативни броеви реши ја равенката

$$7^x - 2 \cdot 5^y = -1 .$$

Решение. За $y \leq 3$ ги добиваме решенијата (0,0) и (2,2). Нека $y > 3$. Разгледувајќи ги остатоците по модул 4 заклучуваме дека x е парен, а разгледувајќи ги остатоците по моул 3 заклучуваме дека y е парен.

Значи, $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ x_1, y_1 \in \mathbb{N},\ y_1 > 1$. Од таблицата на остатоците

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$49^n \pmod{125}$	49	26	24	51	–1	–49	–26	–24	–51	1

заклучуваме дека мора да важи $x_1 = 10x_2 + 5,\ x_2 \in \mathbb{N}$.

Сега равенката го добива видот

$$49^{10x_2+5} + 1 = 2 \cdot 25^{y_1}\text{, т.е. } (49^5)^{2x_2+1} + 1 = 2 \cdot 25^{y_1},$$

од каде следува дека бројот $49^5 + 1 = (49+1)(49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1)$ мора да е делител на бројот $2 \cdot 25^{y_1}$. Значи, $49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1$ треба да е степен на бројот 25, што не е точно, бидејќи

$$49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1 \equiv (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Значи, единствени решенија на дадената равенка се (0,0) и (2,2).

23. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$(2^{2015} + 1)^x + 2^{2015} = 2^y + 1.$$

Решение. Јасно, за $x \le 1$ решенија на дадената равенка се $(0, 2015)$ и $(1, 2016)$.

Нека $x > 1$. Од $3 \mid 2^{2015} + 1$ следува

$$(2^{2015} + 1)^x + 2^{2015} \equiv 2^{2015} \equiv 5 \pmod 9,$$

па затоа $2^y \equiv 4 \pmod 9$, од каде добиваме дека $y = 6k + 2$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Сега, по модул 13 имаме

$$2^{2015} \equiv 7 \pmod{13} \text{ и } 2^y = (2^6)^k \cdot 2^2 \equiv \pm 4 \pmod{13},$$

па така добиваме $8^x + 6 \equiv \pm 4 \pmod{13}$. Меѓутоа, 8^x дава еден од остатоците 1, 5, 8, 12 по модул 13, па затоа последната конгруенција не е можна.

24. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Решение. Сведуваме по модул 11 и добиваме $x^5 + 4^y \equiv 0 \pmod{11}$, при што важи $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$, па мора да важи $4^y \equiv \pm 1 \pmod{11}$. Конгруенцијата $4^y \equiv -1 \pmod{11}$ не важи за ниту еден y, а додека конгруенцијата $4^y \equiv 1 \pmod{11}$ важи ако и само ако $5 \mid y$.

Воведуваме смена $t = 4^{\frac{y}{5}}$ и ја добиваме равенката $x^5 + t^5 = A \cdot B = 2013^z$, каде $\mathrm{NZD}(x,t) = 1$, $A = x + t$ и $B = x^4 - x^3 t + x^2 t^2 - x t^3 + t^4$. Понатаму, од

$$B = A(x^3 - 2x^2 t + 3x t^2 - 4t^3) + 5t^4$$

следува дека $\mathrm{NZD}(A,B) = \mathrm{NZD}(A, 5t^4) \mid 5$. Меѓутоа, $5 \nmid 2013^z$, па затоа мора да важи $\mathrm{NZD}(A,B) = 1$. Според тоа, $A = a^z$ и $B = b^z$, за некои природни бореви a и b такви што $ab = 2013$. Од друга страна, од неравенството $\frac{1}{16}A^4 \le B \le A^4$, кое се докажува со едноставна примена на неравенствата меѓу средините, добиваме

$\frac{1}{16}a^4 \le b \le a^4$, т.е. $\frac{1}{16}a^5 \le ab = 2013 \le a^5$. Оттука следува $5 \le a \le 8$, што не е можно бидејќи 2013 нема делители во интервалот $[5,8]$.

25. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3^x - 5^y = z^2.$$

Решение. Прво да забележиме дека $2\,|\,z$, па затоа

$$4\,|\,z^2 = 3^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 (\operatorname{mod} 4),$$

од каде следува дека x е парен број, т.е. $x = 2k$. Сега равенката го добива видот

$$(3^k - z)(3^k + z) = 5^y,$$

па затоа $3^k - z = 5^n$ и $3^k + z = 5^{y-n}$, за некој цел број $n \ge 0$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $5^n + 5^{y-n} = 2 \cdot 3^k$ и бидејќи $2 \cdot 3^k$ не е делив со 5, следува дека $n = 0$, односно

$$1 + 5^y = 2 \cdot 3^k.$$

Нека претпоставиме дека $k \ge 2$. Тогаш $9\,|\,5^y + 1$, од каде следува $y \equiv 3 (\operatorname{mod} 6)$. Но, тогаш $2 \cdot 3^k = 5^y + 1 \equiv 5^3 + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 7)$, што не е можно. Според тоа, $k \le 1$, од каде следува дека единствено решение на дадената равенка е $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

26. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$x^y - y^x = xy^2 - 19.$$

Решение. Од малата теорема на Ферма следува $x^y \equiv x (\operatorname{mod} y)$, па од дадената равенка добиваме $x \equiv -19 (\operatorname{mod} y)$, т.е. $y\,|\,x + 19$. Слично, со сведување по модул x дпбиваме $x\,|\,y - 19$. Бидејќи равенката нема решение за $x = y$, од овде следува дека $xy\,|\,x - y + 19$. Притоа $x - y + 19 = 0$ не е можно, бидејќи тогаш x мора да биде парен, т.е. $x = 2$, но тогаш $y = 21$ не е прост број. Значи,

$$xy \le |x - y + 19| < x + y + 19, \text{ т.е. } (x-1)(y-1) < 20.$$

Останува да испитаме неколку случаи:

1) $x = 2, y \le 19$; 2) $x = 3, y \le 7$; 3) $y = 3, 5 \le x \le 7$ 4) $y = 2, 5 \le x \le 19$.

Со непосредна проверка наоѓаме дека $(2,3)$ и $(2,7)$ се единствени решенија на дадената равенка.

27. Докажи дека постојат бесконечно многу подредени двојки од цели броеви (x, y) кои се решенија на равенката $(x-1)^x = x(1-y) - 1$.

Решение. Равенката ја доведуваме во обликот

$$(x-1)^x + xy - (x-1) = 0. \tag{1}$$

Нека p е произволен прост број. Бидејќи $\operatorname{NZD}(p, p-1) = 1$, користејќи ја малата теорема на Ферма се добива $(p-1)^p \equiv (p-1) \ (\operatorname{mod} p)$. Значи, за произволен прост број p, постои природен број k_p така што

$$(p-1)^p = k_p p + (p-1)\ . \tag{2}$$

За $x = p$ и користејќи го (2), равенката (1) се сведува на

$$k_p p + (p-1) + py - (p-1) = 0\,,$$

односно се добива

$$p(k_p + y) = 0\ . \tag{3}$$

Од $p \neq 0$ следува $k_p + y = 0$, односно $y = -k_p$. Значи секој подреден пар $(p, -k_p)$, каде p е прост број, а k_p се добива со горенаведената конструкција е решение на равенката (1). Од бесконечноста на множеството на прости броеви следува дека постојат бесконечно парови што ја задоволуваат равенката.

28. Нека $a, b \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажи, дека ако равенката $a^k x - b^k y = a - b$ има решение подреден пар (x, y) од последователни цели броеви, тогаш $|a-b|$ е точен $k-$ти степен.

Решение. Нека равенката има решение од видот $(x, x+1)$. Тогаш

$$a - b = a^k x - b^k (x+1)$$

$$b^k = (a-b)[-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})]. \tag{1}$$

Нека претпоставиме дека броевите $a-b$ и $-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$ имаат заеднички прост делител p. Тогаш $p\,|\,b^k$, па затоа $p\,|\,b$. Но, $p\,|\,a-b$, што значи дека $p\,|\,a$. Сега, од $p\,|\,a$, $p\,|\,b$ и $p\,|-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$ следува $p\,|\,1$, што е противречност. Значи, $a-b$ и $-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + b^{k-1})$ се заемно прости, па од (1) следува дека секој од овие два броја е $k-$ти степен со точност до знак.

29. Да се најдат сите парови природни броеви (m, n) такви што $m^n - n^m = 3$.

Решение. На почеток да забележиме дека m и n се со различна парност. Ако m и n се со иста парност, тогаш $m^n - n^m$ е парен број, па не може да е еднаков на 3.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. Нека m е непарен а n е парен број. Тогаш $m^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, од каде добиваме

$$n^m = m^n - 3 \equiv 1 - 3 = -2 \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)\ . \tag{1}$$

Од друга страна $n = 2k$ и ако $m > 1$, тогаш $n^m = (2k)^m = 2^m k^m$ и

$$n^m - 2 = 2^m k^m - 2 = 2(2^{m-1} k^m - 1) \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)\,,$$

што противречи на (1). Значи $m = 1$, па според тоа $m^n = 1 - n^m \leq 0 < 3$. Значи, во овој случај равенката нема решение.

Случај 2. Нека m е парен а n е непарен, т.е. $m = 2p$ и $n = 2k+1$ каде k и p се природни броеви. Тогаш

$$n^m-1=(2k+1)^{2p}-1=[(2k+1)^2]^p-1^p$$
$$=[(2k+1)^2-1][(2k+1)^{2(p-1)}+(2k+1)^{2(p-2)}+...+(2k+1)^2+1]$$
$$=4k(k+1)B$$

Значи, $n^m\equiv 1(\bmod 8)$ од каде што добиваме

$$m^n=3+n^m\equiv 3+1(\bmod 8)\equiv 4(\bmod 8)\,. \qquad (2)$$

Ќе покажеме дека $n=1$. Ако $n>2$, тогаш

$$m^n-4=(2p)^n-4=2^n p^n-4=4(2^{n-2}p^n-1)\not\equiv 0(\bmod 8)\,.$$

Од добиената противречност со (2) следува $n\le 2$ и бидејќи n е непарен добиваме $n=1$.

Сега јасно е дека $m=4$ и единствено решние на равенката е $m=4,\ n=1$.

30. Во множеството природни броеви реши ја равенката $m^{n^m}=n^{m^n}$.

Решение. Ако $(m,n)\in\{(k,k)\,|\,k\in\mathbb{N}\}$, тогаш важи $m^{n^m}=n^{m^n}$. Нека $m<n$. Со проверка се утврдува дека за $m=1,n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$; за $m=2,n=3$ и за $m=2,n=4$ важи $m^{n^m}<n^{m^n}$. Да ја разгледаме низата $a_n=\frac{2^n}{n^2}$, за $n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2,3,4\}$. Бидејќи $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n^2}{(n+1)^2}>1$, за $n\ge 3$, добиваме дека $\frac{2^n}{n^2}\ge\frac{2^5}{5^2}>1$, односно $2^n>n^2$. Според тоа за $m=2$ и $n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2,3,4\}$ важи $m^{n^m}<n^{m^n}$. Останува да го разгледаме случајот $3\le m<n$. За $k\in\mathbb{N}$ дефинираме низа $b_k=\frac{(m+k)^m}{m^{m+k}}$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$. Тогаш

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{(1+\frac{1}{m+k})^m}{m}<\frac{(1+\frac{1}{m})^m}{m}<\frac{3}{m}\le 1\,,$$

па за $3\le m<n$ се добива

$$\frac{n^m}{m^n}\le\frac{(m+1)^m}{m^{m+1}}=\frac{(1+\frac{1}{m})^m}{m}<\frac{3}{m}\le 1\,,$$

односно $n^m<m^n$. Од $m<n$ и последново неравенство следува $m^{n^m}<n^{n^m}<n^{m^n}$. Почетната равенка е симетрична во однос на m и n, па ако $n<m$ според горната дискусија следува дека $n^{m^n}<m^{n^m}$.

Значи, ако $n,m\in\mathbb{N}$, тогаш $n^{m^n}=m^{n^m}$ ако и само ако $m=n$.

31. Во множеството природни броеви реши ја равенката $n^3-3^m=2015$.

Решение. Имаме $2015=5\cdot 13\cdot 31$. Понатаму, од $3^3\equiv 1(\bmod 13)$ следува

$$3^{3k}\equiv 1(\bmod 13)\,,\ 3^{3k+1}\equiv 3(\bmod 13)\ \text{ и }\ 3^{3k+2}\equiv 9(\bmod 13)\,.$$

Од овие можности остаток за n^3 при делење со 13 е само 1, па затоа $m=3k$. Тогаш

$$5\cdot 13\cdot 31=n^3-(3^k)^3=(n-3^k)(n^2+3^k n+3^{2k})\,.$$

Од друга страна,

$$(n-3^k)^2 < n^2 + 3^k n + 3^{2k},$$

па затоа треба да ги провериме само случаите

$$n-3^k = 1,\ n^2 + 3^k n + 3^{2k} = 2015 \text{ и } n-3^k = 5, n^2 + 3^k n + 3^{2k} = 403.$$

Ако го изразиме n преку 3^k и замениме, добиваме квадратни равенки по n. Лесно се добива дека решение имаме само во вториот случај: $n=14, k=2$, што значи дека дадената равенка има единствено решение $n=14, m=6$

32. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$[\sqrt[4]{1}]+[\sqrt[4]{2}]+...+[\sqrt[4]{n}] = \tfrac{3}{2}n+1.$$

Решение. Нека $a_n = [\sqrt[4]{1}]+[\sqrt[4]{2}]+...+[\sqrt[4]{n}]$. Треба да ја решиме равенката

$$a_n = \tfrac{3}{2}n+1. \tag{1}$$

Да забележимке дека $[\sqrt[4]{k}]=1$ за $1 \le k < 16$. Затоа за $1 \le n \le 15$ важи $a_n = n$. Значи, меѓу овие броеви нема решенија на дадената равенка. Понатаму, $[\sqrt[4]{k}]=2$ за $16 \le k < 81$. Затоа за $16 \le n \le 80$ важи $a_n = 15+2(n-15) = 2n-15$. Според тоа, за $16 \le n \le 80$ равенката (1) има решение ако $2n-15 = \tfrac{3}{2}n+1$, од каде добиваме $n=32$ и тоа е единствено решение на задачата. Други, поголеми решенија нема бидејќи по $n=81$ кога бројот n се зголемува за 1, вредноста на левата страна се зголемува најмалку за 3, а вредноста на десната страна се зголемува за $\frac{3}{2}$, па затоа левата страна ќе биде се поголема од десната.

33. Определи ги сите цели броеви x, за кои $\log_2(x^2-4x-1)$ е исто така цел број.

Решение. Цели броеви x за кои изразот $\log_2(x^2-4x-1)$ е определен се:

$$x \in (-\infty, 2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}, +\infty) \cap \mathbb{Z}.$$

Нека n е цел број за кој постои $x \in \mathbb{Z}$ така што

$$\log_2(x^2-4x-1) = n.$$

Тогаш

$$x^2 - 4x - (1+2^n) = 0 \tag{1}$$

од каде добиваме $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5+2^n}$.

Бидејќи $x \in \mathbb{Z}$, постои $k \in \mathbb{Z}$ така што $5+2^n = k^2$. Значи, доволно е да ги определиме сите n за кои $5+2^n$ е полн квадрат. Ќе разгледаме неколку случаи.

а) Ако $n<0$, тогаш $2^n = k^2-5$, односно $1 = 2^{-n}(k^2-5)$. Бројот $2^{-n}(k^2-5)$ е парен, па според тоа последното равенство не е можно.

б) Ако $n=0$, тогаш $k^2=6$, т.е. $5+2^n$ не е полн квадрат. Значи и овој случај не е можен.

в) Ако $n>0$, тогаш $5+2^n$ е непарен, па затоа $k=2m-1$ за некој $m\in\mathbb{Z}$. Со алгебарски трансформации добиваме

$$m(m-1)=2^{n-2}+1. \qquad (2)$$

Ако $n=1$, тогаш $2^{n-2}+1$ е рационален број и равенството (2) не е можно за ниту еден $m\in\mathbb{Z}$. Ако $n>2$, тогаш $2^{n-2}+1$ е непарен број а $m(m-1)$ е парен, па равенство меѓу нив не е можно. Ако $n=2$, тогаш $5+2^2=9=3^2$. Со замена во (2) ја добиваме квадратната равенка $x^2-4x+5=0$ чии решенија се $x=-1$ и $x=5$. Не е тешко да се провери дека за најдените вредности за x, $\log_2(x^2-4x-1)$ е цел број и во двата случаи е еднаков на 2.

34. Најди ги сите природни броеви n за кои равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ има точно пет решенија (x,y) во множеството природни броеви.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$(x-n)(y-n)=n^2.$$

Ако n е прост број, тогаш делители на n^2 се $1,n$ и n^2. Тогаш можни се следните случаи:

$$\begin{cases}x-n=1\\ y-n=n^2\end{cases}\qquad \begin{cases}x-n=n\\ y-n=n\end{cases}\qquad \begin{cases}x-n=n^2\\ y-n=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-n=-1\\ y-n=-n^2\end{cases}\qquad \begin{cases}x-n=-n\\ y-n=-n\end{cases}\qquad \begin{cases}x-n=-n^2\\ y-n=-1.\end{cases}$$

Последните три системи немаат решенија во множеството природни броеви, а првите три системи имаат решенија:

$$x=n+1, y=n^2+n;\quad x=2n, y=2n;\quad x=n^2+n, y=n+1.$$

Значи, n не може да е прост број.

Нека n е сложен број кој има два различни прости множители p и q, т.е. $n=pq$. Равенката го добива обликот $(x-pq)(y-pq)=p^2q^2$.

Делители на бројот p^2q^2 се : $1, p, p^2, q, q^2, pq, p^2q, pq^2, p^2q^2$. Сега се обиваат следните системи:

$$\begin{cases}x-pq=1\\ y-pq=p^2q^2\end{cases}\qquad \begin{cases}x-pq=p\\ y-pq=pq^2\end{cases}\qquad \begin{cases}x-pq=p^2\\ y-pq=q^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-pq=q\\ y-pq=p^2q\end{cases}\qquad \begin{cases}x-pq=q^2\\ y-pq=p^2\end{cases}\qquad \begin{cases}x-pq=pq\\ y-pq=pq\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-pq=p^2q\\ y-pq=q\end{cases}\qquad \begin{cases}x-pq=pq^2\\ y-pq=p\end{cases}\qquad \begin{cases}x-pq=p^2q^2\\ y-pq=1\end{cases}$$

Сите имаат решение во множеството природни броеви. Значи, n не може да има два различни прости делители.

Аналогно се разгледува и случајот кога n има повеќе од различни прости делители.

Нека n е квадрат на прост број, т.е. $n = p^2$. Тогаш, делители на $n^2 = p^4$ се: $1, p, p^2, p^3, p^4$. Сега се можни следните системи:

$$\begin{cases} x - p^2 = 1 \\ y - p^2 = p^4 \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = p \\ y - p^2 = p^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = p^2 \\ y - p^2 = p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = p^3 \\ y - p^2 = p \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = p^4 \\ y - p^2 = 1 \end{cases}$$

кои имаат решенија

$x = p^2 + 1, y = p^4 + p^2$; $x = p^2 + p, y = p^3 + p^2$; $x = 2p^2, y = 2p^2$;

$x = p^3 + p^2, y = p^2 + p$; $x = p^4 + p^2, y = p^2 + 1$

Системите

$$\begin{cases} x - p^2 = -1 \\ y - p^2 = -p^4 \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = -p \\ y - p^2 = -p^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = -p^2 \\ y - p^2 = -p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = -p^3 \\ y - p^2 = -p \end{cases} \quad \begin{cases} x - p^2 = -p^4 \\ y - p^2 = -1 \end{cases}$$

немаат решение во множеството прирони броеви.

Аналогно се докажува дека случајот кога $n = p^k, k \geq 3$ не е можен.

Значи, бараното множество е $\{n \mid n = p^2$ и p е прост број$\}$.

III ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

1. Колку е $\sin(\alpha+\beta)$, ако $\sin\alpha+\sin\beta=a$ и $\cos\alpha+\cos\beta=b$.

Решение. Имаме

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Бидејќи

$$\sin\phi=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}},$$

добиваме дека

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\frac{a}{b}}{1+(\frac{a}{b})^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

2. Докажи, дека не постои природен број $n\geq 2$ таков што функцијата

$$f(x)=\cos(x\sqrt{1})+\cos(x\sqrt{2})+...+\cos(x\sqrt{n})$$

е периодична.

Решение. Нека претпоставиме дека за некој $n\geq 2$ функцијата $f(x)$ е периодична со период $T>0$, т.е. дека важи $f(x+T)=f(x)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Тогаш $f(T)=f(0)=n$. Но, за да биде

$$f(T)=\cos(T\sqrt{1})+\cos(T\sqrt{2})+...+\cos(T\sqrt{n})=n$$

мора да важи

$$\cos(T\sqrt{1})=\cos(T\sqrt{2})=...=\cos(T\sqrt{n})=1.$$

Оттука следува дека $T=2k\pi$ и $T\sqrt{2}=2l\pi$, каде $k,l\in\mathbb{N}$, па затоа важи $\sqrt{2}=\frac{l}{k}\in\mathbb{Q}$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои $n\geq 2$ таков што функцијата $f(x)$ е периодична.

3. Докажи дека $\sin 1^\circ$ е ирационален број.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека $\sin 1^\circ$ е рационален број и нека $\sin 1^\circ=\frac{p}{q}$, каде што p и q се цели броеви ($q\neq 0$). Тогаш и

$$\cos^2 1^\circ=1-\sin^2 1^\circ \text{ и } \cos 2^\circ=\cos^2 1^\circ-\sin^2 1^\circ,$$

ќе бидат рационални броеви. Слично добиваме дека $\cos 4^\circ=2\cos^2 2^\circ-1$, $\cos 8^\circ$ и $\cos^2 16^\circ$ се рационални броеви. Меѓутоа, од

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}&=\cos 30^\circ=\cos(32^\circ-2^\circ)=\cos 32^\circ\cos 2^\circ-\sin 2^\circ\sin 32^\circ\\&=(2\cos^2 16^\circ-1)\cos 2^\circ-2^6\cdot\cos 16^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\cos 2^\circ\cos^2 1^\circ\sin^2 1^\circ\end{aligned}$$

би имале дека рационален број е еднаков на ирационален број, што не е можно. Следува, $\sin 1^\circ$ е ирационален број.

4. Нека α е остар агол таков што важи $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Докажи, дека α не е од облик $r\pi$, каде r е рационален број.

Решение. Доволно е со индукција по n да докажеме дека $\mathrm{tg}\, n\alpha$ може да се прикаже во облик $\frac{p_n}{q_n}$, каде $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ се такви што $p_n \equiv 3(\mathrm{mod}\, 5)$, $q_n \equiv 4(\mathrm{mod}\, 5)$. Оттука следува дека $\mathrm{tg}\, n\alpha \neq 0$, т.е. $n\alpha \neq m\pi$, каде $m \in \mathbb{Z}$.

За $n=1$ имаме $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$, па тврдењето важи. Нека тврдењето важи за некој природен број n, т.е. нека постојат p_n, q_n со споменатите својства. Тогаш

$$\mathrm{tg}(n+1)\alpha=\frac{\mathrm{tg}\, n\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\, n\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{4p_n+3q_n}{4q_n-3p_n}.$$

Ако $p_{n+1}=2(4p_n+3q_n)$, $q_{n+1}=2(4q_n-3p_n)$, тогаш $p_{n+1}, q_{n+1}\in\mathbb{Z}$ и

$$p_{n+1}=2(4p_n+3q_n)\equiv 2(4\cdot 3+3\cdot 4)\equiv 3(\mathrm{mod}\, 5) \text{ и}$$
$$q_{n+1}=2(4q_n-3p_n)\equiv 2(4\cdot 4-3\cdot 3)\equiv 4(\mathrm{mod}\, 5),$$

со што доказот е завршен.

5. Пресметај $\sin 18^\circ$.

Решение. Имаме

$$\sin 72^\circ=2\sin 36^\circ\cos 36^\circ=4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ.$$

Но, $\sin 72^\circ=\cos 18^\circ$, па, значи,

$$4\sin 18^\circ\cos 36^\circ=1. \qquad (1)$$

Користејќи го идентитетот $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$, имаме

$$2\cos 36^\circ\sin 18^\circ=\sin 54^\circ-\sin 18^\circ=\cos 36^\circ-\sin 18^\circ,$$

т.е.

$$2(\cos 36^\circ-\sin 18^\circ)=1. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме: $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

6. Пресметај $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ ако $\sin x\cos x=0,4$.

Решение. Нека $A=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, тогаш

$$A^2=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}=\frac{1+2\cdot 0,4}{1-2\cdot 0,4}=9,$$

а оттука $A=\pm 3$.

7. Пресметај го остриот агол α (не користејќи таблици), ако се знае дека

$$\mathrm{ctg}\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

Решение. Имаме постапно

$$\text{ctg}\alpha = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\sin 60^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{2\sin\frac{105^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ}{2}}{2\sin\frac{15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ}{2}} = \text{ctg}\,\frac{15^\circ}{2}.$$

па $\alpha = 7^\circ 30'$.

8. Пресметај го аголот α ако е

$$\text{ctg}\alpha = 2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$
$$\text{ctg}2\alpha = 2+\sqrt{a}$$

каде што a,b,c се природни броеви, кои не се деливи со 4, а $\sqrt{a}$ и $\sqrt{bc}$ се ирационални броеви.

Решение. Со замена на $\text{ctg}\alpha$ и $\text{ctg}2\alpha$ во формулата

$$\text{ctg}2\alpha = \frac{\text{ctg}^2\alpha - 1}{2\text{ctg}\alpha}$$

добиваме $4\sqrt{a} - 2\sqrt{bc} = b+c-a-5$. Бидејќи $a,b,c \in \mathbb{N}$, тогаш разликата $4\sqrt{a} - \sqrt{bc}$ е цел број. Да претпоставиме дека таа разлика е различна од нула, т.е. $4\sqrt{a} = 2\sqrt{bc} + r$ ($r \neq 0$). Со квадрирање добиваме $16a = 4bc + r^2 + 4r\sqrt{bc}$, од каде што следува дека $\sqrt{bc}$ е рациоанлен број за $r \neq 0$, што е во спротивност со претпоставката дека $\sqrt{bc}$ е ирационален број. Значи, $r = 0$, па имаме

$$\begin{cases} 4\sqrt{a} = \sqrt{bc} \\ b+c = a+5 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad c(4-b) = 4(5-b).$$

Бидејќи $b \neq 0$ ($b \in \mathbb{N}$) и не е деллив со 4, добиваме

$$c = 4 + \frac{4}{4-b}$$

од каде што добиваме дека $b = 3$ или $b = 5$ или $b = 2$ или $b = 6$.

За b еднакво на 3 или 5, $a \notin \mathbb{N}$; за $b = 2$ добиваме $c = 6$ и $a = 3$, а за $b = 6$ добиваме $c = 2$ и $a = 3$. Овие тројки ги задоволуваат условите на задачата, па $\text{ctg}\alpha = 2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$ и $\text{ctg}2\alpha = 2+\sqrt{3}$, од каде што $2\alpha = \text{arctg}(2+\sqrt{3}) = 15^\circ$, т.е. $\alpha = 7{,}5^\circ$. (Види ја претходната задача.)

9. Одреди ја најмалата и најголемата вредност на функцијата

$$y = 3\sin x + 4\cos x.$$

Решение. Имаме

$$y = 3\sin x + 4\cos x = 5(\tfrac{3}{5}\sin x + \tfrac{4}{5}\cos x)$$
$$= 5(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) = 5\sin(x+\alpha).$$

Бидејќи $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, постои агол α таков што $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$. Следствено, $y_{\min} = -5$, $x+\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$ и $y_{\max} = 5$, $x+\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$.

10. Одреди ги максималната и минималната вредност на функцијата $f(x)=\sin^2 x+\sin x+1$. Во кои точки се достигнуваат?

Решение. Функцијата ја трансформираме на следниов начин

$$f(x)=\sin^2 x+\sin x+1=(\sin^2 x+\sin x+\tfrac{1}{4})-\tfrac{1}{4}+1=(\sin x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}.$$

Според тоа максималната вредност функцијата ќе ја достигне кога $\sin x+\frac{1}{2}$ е максимално, т.е. кога $\sin x=1$. Значи максимумот се достигнува во точките од множеството $\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ и тој изнесува $(1+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=3$. Минимумот ќе се достигне кога $(\sin x+\frac{1}{2})^2$ минимално, т.е. кога $\sin x+\frac{1}{2}=0$. Тој се достигнува во точките од множеството

$$\{-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

и тој изнесува $\frac{3}{4}$.

11. За броевите a и b е исполнето равенството $a^2+b^2=1$. Определи ја најголемата вредност за a^3b-b^3a.

Решение. Бидејќи $a^2+b^2=1$, постои $\alpha\in[0,2\pi)$ така што $a=\cos\alpha$ и $b=\sin\alpha$. Тогаш изразот a^3b-b^3a го добива обликот

$$a^3b-b^3a=\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

Според формулате за двоен агол $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, добиваме

$$a^3b-b^3a=\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\tfrac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

Изразот $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$ достигнува најголема вредност $\frac{1}{4}$, на пример за $\alpha=\frac{\pi}{8}$. Во тој случај

$$a=\cos\tfrac{\pi}{8}=\sqrt{\tfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\tfrac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$b=\sin\tfrac{\pi}{8}=\sqrt{\tfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\tfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

12. Најди ги сите вредности на k, за кои што функцијата

$$y(x)=k\cdot(2\sin x+\cos^2 x+1)$$

не прима поголеми вредности од 3.

Решение. За функцијата

$$f(x)=2\sin x+\cos^2 x+1=2\sin x+1-\sin^2 x+1$$

$$=-(\sin^2 x-2\sin x+1)+3=3-\left(\sin x-1\right)^2$$

имаме:

$$f_{\max}=f(\tfrac{\pi}{2})=3-(1-1)^2=3$$

$$f_{\min}=f(-\tfrac{\pi}{2})=3-(-1-1)^2=-1$$

Според условот треба $k\cdot f\left(x\right)\le 3$, тогаш:

1) за $k=0$ тврдењето е точно

2) за $k>0$ добиваме: $k\cdot f_{\max}\le 3,\ k\cdot 3\le 3,\ k\le 1.$ Па во овој случај: $0<k\le 1$.

3) за $k<0$ добиваме: $k\cdot f_{\min}\le 3,\ k(-1)\le 3,\ k\ge -3.$ Па во овој случај: $-3\le k<0$.

Конечно, добиваме дека $k\in[-3,1]$.

13. Ако $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$, тогаш $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Докажи!

Решение. Бидејќи $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ добиваме дека $\sin\alpha,\sin\beta,\cos\alpha,\ \cos\beta>0$. Равенството $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$ го запишуваме во следниот еквивалентен облик

$$(\sin\alpha-\cos\beta)\sin\alpha=(\cos\alpha-\cos\beta)\sin\beta.$$

Ако $\sin\alpha-\cos\beta>0$, тогаш и $\cos\alpha-\sin\beta>0$. Значи,

$$\sin\alpha>\cos\beta$$

$$\cos\alpha>\sin\beta.$$

Ако овие две равенства ги квадрираме и ги собереме добиваме $1>1$ што е противречност. Аналогно се исклучува и можноста да е $\sin\alpha-\cos\beta<0$. Затоа, единствена можност останува да е $\sin\alpha-\cos\beta=0$, а од ова следува дека $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

14. Определи ја најголемата вредност на изразот $\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$. За кои вредности на x таа се достигнува.

Решение. Тригонометриската функција $\cos x$ прима вредности во интервалот $[-1,1]$. На овој интервал тригонометриската функција $\sin$ монотоно расте. Според тоа, најголема вредност на првиот собирок $\sin(\cos x)$ е $\sin 1$ и таа се достигнува во точките во кои $\cos x=1$, т.е. во точките $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Најголема вредност на вториот собирок е 1 и таа се достигнува во точките во кои $\sin x=0$, т.е. во точките $x=l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.

Збирот на двата собироци ќе биде најголем ако постојат точки во кои и двата собироци достигнуваат најголема вредност. Пресек на множествата $\{2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ и $\{l\pi\,|\,l\in\mathbb{Z}\}$ е множеството $\{2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$. Во точките на ова множество изразот достигнува најголема вредност и таа е еднаква на $1+\sin 1$.

15. За кои вредности на реалните броеви a и b функцијата

$$f(x)=\frac{\sin^2 x+a\sin x+b}{\cos^2 x+a\cos x+b}$$

е константна, во нејзината дефинициона област?

Решение. Да претпоставиме дека $f(x)=k$, за секој x од дефинициона област. Да означиме $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогаш $k=\frac{bt^4+2at^3+(2b+4)t^2+2at+b}{(1-a+b)t^4+(2b-2)t^2+a+b+1}$, односно

$$(ka-(k-1)b-k)t^4+2at^3+2(-(k-1)b+k+2)t^2+2at-(ka+(k-1)b+k)=0$$

за секој $t \in \mathbb{R}$, освен можеби за оние t за кои

$$(1-a+b)t^4+(2b-2)t^2+a+b+1=0 .$$

Последното е можно ако

$$ka-(k-1)b-k=0\,,\ a=0\,,\ -(k-1)b+k+2=0 \text{ и } ka+(k-1)b+k=0 .$$

Заменувајќи $a=0$ во горните равенства добиваме дека $k=-1$ и $b=-\frac{1}{2}$. Значи за $a=0$ и $b=-\frac{1}{2}$ добиваме

$$f(x)=\frac{2\sin^2 x-1}{2\cos^2 x-1}=-\frac{\cos 2x}{\cos 2x}=-1, \text{ за секој } x\in\mathbb{R}\setminus\{\tfrac{(2k+1)\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\} .$$

16. Нека α е произволен агол, а β и γ се остри агли. Докажи дека постои агол x за кој $\sin x=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

Решение. Доволно е да докажеме дека $\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$ е вредност од интервалот $[-1,1]$, што ќе значи дека таа вредност соодветствува на вредност на $\sin x$ за некој агол x. Од условот на задачата, односно од тоа што β и γ се остри агли важат следниве неравенства: $\cos\beta>0,\ \cos\gamma>0$, а оттаму и $\cos\beta\cdot\cos\gamma>0$. Во исто време заради ограниченоста на функцијата $\cos x$ важи $\cos\alpha\le 1$. Ако го помножиме неравенството $\cos\alpha\le 1$ со $\cos\beta\cdot\cos\gamma>0$ добиваме

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\le\cos\beta\cdot\cos\gamma ,$$

односно

$$-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\ge-\cos\beta\cdot\cos\gamma . \tag{1}$$

Понатаму,

$$\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\cos(\beta-\gamma)\le 1,$$

па од (1) следува

$$0<\sin\beta\cdot\sin\gamma\le 1-\cos\beta\cdot\cos\gamma\le 1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma ,$$

а оттука

$$0<\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\le 1,$$

што и требаше да се докаже. Значи постои агол x за кој $\sin x=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

17. Определи ја најголемата вредност на функцијата

$$f(x)=\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-6x+21}+\cos 2\pi x$$

на интервалот $(0,\infty)$.

Решение. Најголема вредност на третиот собирок е 1 и таа се достигнува за секој цел број x. Понатаму, $\frac{x}{x^2+9}=\frac{1}{x+\frac{9}{x}}$ и ако искористиме дека $x+\frac{9}{3}\ge 2\sqrt{x\frac{9}{3}}=6$ добиваме $\frac{x}{x^2+9}=\frac{1}{x+\frac{9}{x}}\le\frac{1}{6}$. Во последново неравенство знак за равенство се достигнува за $x=\frac{9}{x}$, т.е. за $x=3$. Значи, најголема вредност на првиот собирок е $\frac{1}{6}$ и се достигнува за $x=3$. За вториот собирок имаме $\frac{1}{x^2-6x+21}=\frac{1}{(x-3)^2+12}\leq\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{12}$ се достигнува за $x=3$.

Според тоа, за $x=3$ сите три собироци достигнуваат најголема вредност и таа изнесува $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+1=\frac{5}{4}$.

18. Определи го множеството точки во рамнината за кои изразот $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ достигнува најголема вредност.

Решение. Изразот $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ можеме да го запишеме во облик

$$\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Постои $\alpha\in\mathbb{R}$ така што $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha$ и $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\alpha$. Сега, треба да го определиме максимумот на $\cos\alpha-\sin\alpha$. При тоа

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha-\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)=2\cos\tfrac{\pi}{4}\cos(\alpha+\tfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\alpha+\tfrac{\pi}{4}).$$

Најголема вредност за изразот се добива кога $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$. Според тоа, најголема вредност се добива за $\alpha=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Тогаш добиваме

$$\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=-x,\\ x>0,\\ y<0.\end{cases}.$$

Значи, множеството точки за кои се достигнува најголемата вредност на изразот се точките од правата $y=-x$ која лежи во четвртиот квадрант, со исклучок на точката $(0,0)$.

19. Определи ги сите реални броеви a и b така што за секој $x\in[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$ важи

$$\cos x=a\sqrt{1-\sin 2x}+b\sqrt{1+\sin 2x}.$$

Решение. Ако $x\in[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$, тогаш $\sin x<0$ и $\cos x<0$ па и $\sin x+\cos x<0$. На овој интервал функцијата $\operatorname{tg}x$ расте, па важи $\operatorname{tg}x\geq\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=1$, што е еквивалентно со $\sin x\leq\cos x$. Ако $x=\frac{3\pi}{2}$, тогаш $\sin x=-1<0=\cos x$, и $\sin x+\cos x<0$. Ако $x\in(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}]$, тогаш $\sin x<0$, $\cos x>0$, односно $\sin x<\cos x$ и $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\leq-1$, т.е. $\sin x\leq-\cos x$. Со тоа докажавме дека на интервалот $[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$ важи $\sin x+\cos x\leq 0$ и $\sin x-\cos x\leq 0$. Според тоа

$$\sqrt{1-\sin 2x}=|\sin x-\cos x|=\cos x-\sin x \text{ и}$$

$$\sqrt{1+\sin 2x}=|\sin x+\cos x|=-\sin x-\cos x.$$

Значи равенството од задачата се сведува на равенството

$$\cos x = (a-b)\cos x - (a+b)\sin x\,.$$

Последново равенство важи за секој $x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ ако и само ако

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=0 \end{cases}$$

т.е. ако и само ако $a=\frac{1}{2}$ и $b=-\frac{1}{2}$.

20. Да се докаже дека: ако сумата

$$a_1\cos(x+\alpha_1)+a_2\cos(x+\alpha_2)+...+a_n\cos(x+\alpha_n)$$

при $x=0$ и $x=x_1 \neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ е еднаква на нула, тогаш таа е нула за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Од условот на задачата, за $x=0$, добиваме

$$a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+...+a_n\cos\alpha_n=0 \qquad (1)$$

Нека $x_1\neq k\pi$; тогаш имаме

$$\begin{aligned} &a_1\cos(x_1+\alpha_1)+a_2\cos(x_1+\alpha_2)+...+a_n\cos(x_1+\alpha_n)=\\ &\quad=(a_1\cos\alpha_1+...+a_n\cos\alpha_n)\cos x_1-(a_1\sin\alpha_1+...+a_n\sin\alpha_n)\sin x_1\\ &\quad=-(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+...+a_n\sin\alpha_n)\sin x_1=0 \end{aligned}$$

Но $\sin x_1\neq 0$, од каде добиваме

$$a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+...+a_n\sin\alpha_n=0\,. \qquad (2)$$

Сега, за произволен реален број x, ќе имаме

$$\begin{aligned} &a_1\cos(x+\alpha_1)+a_2\cos(x+\alpha_2)+...+a_n\cos(x+\alpha_n)=\\ &\quad=(a_1\cos\alpha_1+...+a_n\cos\alpha_n)\cos x-(a_1\sin\alpha_1+...+a_n\sin\alpha_n)\sin x=0. \end{aligned}$$

21. Нека $a_1,a_2,....,a_n\in\mathbb{R}$ и нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција дефинирана со

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+...+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}\,.$$

Докажи дека, ако $f(x_1)=f(x_2)=0$, тогаш постои $m\in\mathbb{Z}$, така што $x_1-x_2=m\pi$.

Решение. Користејќи $\cos(a_i+x)=\cos a_i\cos x-\sin a_i\sin x$, функцијата ќе ја трансформираме во облик

$$f(x)=\cos x(\cos a_1+\frac{\cos a_2}{2}+....+\frac{\cos a_n}{2^{n-1}})-\sin x(\sin a_1+\frac{\sin a_2}{2}+...+\frac{\sin a_n}{2^{n-1}})$$

или уште повеќе $f(x)=A\cos x-B\sin x$, каде

$$A=\cos a_1+\frac{\cos a_2}{2}+....+\frac{\cos a_n}{2^{n-1}} \text{ и } B=\sin a_1+\frac{\sin a_2}{2}+...+\frac{\sin a_n}{2^{n-1}}\,.$$

Ќе покажеме дека $A^2+B^2\neq 0$.

Нека $A^2+B^2=0$. Тогаш $A=B=0$, па затоа $f(x)=0$ на целото множество реални броеви. Специјално за $x=-a_1$ добиваме

$$0=f(-a_1)=\cos 0+\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}+....+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}}\,,$$

односно

$$\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}+....+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}}=-1,$$

па затоа

$$1=|-1|=|\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}+....+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}}|\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $A^2+B^2\neq 0$ и функцијата може да ја запишеме во облик

$$f(x)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right).$$

Нека φ а гол таков што $\sin\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и $\cos\varphi=-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Тогаш

$$f(x)=\sqrt{A^2+B^2}(\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x)=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\varphi+x).$$

Ако сега $f(x_1)=f(x_2)=0$, ќе добиеме $\sin(\varphi+x_1)=0$ и $\sin(\varphi+x_2)=0$, од каде мора $\varphi+x_1=k\pi$ и $\varphi+x_2=j\pi$, за $k,j\in\mathbb{Z}$. Конечно $x_1-x_2=(k-j)\pi=m\pi$, каде $m=k-j\in\mathbb{Z}$, што и требаше да се докаже.

22. Нека $f(t)=\sqrt{1+t^2}-t$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x),$$

ако $x>0$, $y>0$, $z>0$ и важи $xy+yz+zx=1$.

Решение. Воведуваме смени

$$x=\operatorname{ctg}\alpha,\ y=\operatorname{ctg}\beta \text{ и } z=\operatorname{ctg}\gamma,$$

каде што $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$. Од условот на задачата, следува равенството

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

кое што е еквивалентно со равенството

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \tag{1}$$

Ќе докажеме дека $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Да забележиме, од $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$ следува дека $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma\neq 0$. Од (1) ги добиваме следните еквивалентни равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=0$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=0$$

$$\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma}=0 \tag{2}$$

Но, аглите $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$, па од (2) следува дека $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Со смената $x=\operatorname{ctg}\alpha$ и имајќи предвид дека $\sin\alpha>0$, функцијата го добива видот

$$f(x)=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогно се добива $f(y)=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $f(z)=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Конечно, ако искористиме дека $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, за вредноста на дадениот израз добиваме

$$\begin{aligned} f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x) &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \\ &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \\ &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}(1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \\ &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}(1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1. \end{aligned}$$

23. Нека $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ и $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Докажи, дека α не е од облик $r\pi$, каде r е рационален број.

Решение. Доволно е со индукција по n да докажеме дека $\operatorname{tg} n\alpha$ може да се прикаже во облик $\frac{p_n}{q_n}$, каде $p_n,q_n\in\mathbb{Z}$ се такви што $p_n\equiv 3(\operatorname{mod} 5)$, $q_n\equiv 4(\operatorname{mod} 5)$. Оттука следува дека $\operatorname{tg} n\alpha\neq 0$, т.е. $n\alpha\neq m\pi$, каде $m\in\mathbb{Z}$.

За $n=1$ имаме $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, па тврдењето важи. Нека тврдењето важи за некој природен број n, т.е. нека постојат p_n,q_n со споменатите својства. Тогаш

$$\operatorname{tg}(n+1)\alpha=\frac{\operatorname{tg} n\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} n\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4p_n+3q_n}{4q_n-3p_n}.$$

Ако $p_{n+1}=2(4p_n+3q_n)$, $q_{n+1}=2(4q_n-3p_n)$, тогаш $p_{n+1},q_{n+1}\in\mathbb{Z}$ и

$$p_{n+1}=2(4p_n+3q_n)\equiv 2(4\cdot 3+3\cdot 4)\equiv 3(\operatorname{mod} 5) \text{ и}$$

$$q_{n+1}=2(4q_n-3p_n)\equiv 2(4\cdot 4-3\cdot 3)\equiv 4(\operatorname{mod} 5),$$

со што доказот е завршен.

24. Дали може $f(x)\in(\frac{1}{9},\frac{3}{2})$, каде $f(x)=\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{ctg}2x$?

Решение. Дефиниционата област на функцијата е

$$D=\mathbb{R}\setminus((\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z})\cup\{\frac{(2k+1)\pi}{6}\mid k\in\mathbb{Z}\}).$$

За $x\in D$ функцијата $\operatorname{tg}x$ е дефинирана и $\operatorname{tg}^2 x\in(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},\infty)$. Од $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$ добиваме $f(x)=\frac{(3-\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg}^2 x)}{2(1-3\operatorname{tg}^2 x)}$. Значи, доволно е да ја разгледаме функцијата $g(a)=\frac{(3-a)(1-a)}{2(1-3a)}$ на множеството $(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},\infty)$. Ако $a\in(0,\frac{1}{3})$, тогаш $a^2+5a>0$, т.е $3-4a+a^2>3-9a$. Оттука следува $g(a)=\frac{(3-a)(1-a)}{2(1-3a)}>\frac{3}{2}$. Ако $a\in(\frac{1}{3},1)\cup(3,\infty)$, тогаш $g(a)<0$, а ако $a\in[1,3]$, тогаш $g(a)\leq\frac{1}{9}$. Значи $f(x)\notin(\frac{1}{9},\frac{1}{3})$, за секој $x\in D$.

25. Докажи, дека меѓу било кои четири броја од интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$ можеме да избереме два броја, да ги наречеме x и y, такви што

$$8\cos x\cos y\cos(x-y)+1>4(\cos^2 x+\cos^2 y).$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$8\cos x\cos y(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+1>4\cos^2 x+4\cos^2 y$$

$$8\cos^2 x\cos^2 y+8\cos x\cos y\sin x\sin y-4\cos^2 x-4\cos^2 y+1>0$$

$$8\cos^2 x\cos^2 y-4\cos^2 x-4\cos^2 y+2\sin 2x\sin 2y+1>0$$

$$2(4\cos^2 x\cos^2 y-2\cos^2 x-2\cos^2 y+1)+2\sin 2x\sin 2y-1>0$$

$$2(2\cos^2 x-1)(2\cos^2 y-1)+2\sin 2x\sin 2y-1>0$$

$$\cos 2x\cos 2y+\sin 2x\sin 2y>\frac{1}{2}$$

$$\cos(2x-2y)>\frac{1}{2}.$$

Според принципот на Дирихле во еден од интервалите $(0,\frac{\pi}{6}),[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}),(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ се наоѓаат два од четирите броја. Нека тоа се броевите x и y. Тогаш важи $|2x-2y|<\frac{\pi}{3}$ и $\cos(2x-2y)>\frac{1}{2}$, со што тврдењето е докажано.

26. Ако n е природен број, тогаш $\cos nx$ може да се изрази како полином по $\cos x$ од n-ти степен. Докажи!

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција. Притоа, ќе ги користиме формулите

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Од тригонометријата ни се познати формулите

$$\cos 1\cdot x=\cos x$$

$$\cos(2\cdot x)=2\cos^2 x-1$$

$$\cos(3\cdot x)=4\cos^3 x-3\cos x,$$

т.е. тврдењето е точно за $n=1$, $n=2$ и $n=3$.

Да претпоставиме дека $\cos nx$ може да се изрази како полином по $\cos x$ со степен n за секој $n=1,2,3,....,k$. Тогаш, за $\cos(k+1)x$ ќе имаме:

$$\cos(k+1)x=\cos kx\cdot\cos x-\sin kx\cdot\sin x$$

$$\cos(k+1)x=\cos kx\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cos(k-1)x+\frac{1}{2}\cos(k+1)x$$

$$(1-\frac{1}{2})\cos(k+1)x=\cos kx\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cos(k-1)x. \qquad (*)$$

Бидејќи по претпоставка, $\cos(k-1)x$ и $\cos kx$ можат да се изразат како полиноми по $\cos x$ со степени $k-1$ и k соодветно, следува дека според (*), и $\cos(k+1)x$ може да се изрази како полином по $\cos x$, со степен $k+1$.

Според принципот на математичка индукција следува дека тврдењето е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

27. Докажи, дека за секој природен број n бројот $\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^n}$ е ирационален.

Решение. Имаме

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x=4\cos^3 x-3\cos x\,,$$

па затоа

$$\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^{n-1}}=4\cos^3\frac{\pi}{2\cdot 3^n}-3\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\,. \qquad (*)$$

За $n=1$ бројот $\cos\frac{\pi}{2\cdot 3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ е ирационален. Нека $n\in\mathbb{N}$ е најмалиот број за кој $\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^n}$ е рационален. Тогаш од (*) следува дека бројот $\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^{n-1}}$ е рационален, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^{n-1}}$ е ирационален број за секој $n\in\mathbb{N}$.

28. Да се испита дали е рационален бројот

$$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}\,.$$

Решение. Бидејќи $\sin\frac{3\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и $\sin\frac{9\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{2}=1$, доволно е да се пресмета само производот $\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}$. Имаме:

$$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{2\pi}{18}\cdot\cos\frac{4\pi}{18}=\frac{2\cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{2\pi}{18}\cdot\cos\frac{4\pi}{18}}{2\cos\frac{\pi}{18}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{18}\cdot\cos\frac{2\pi}{18}\cdot\cos\frac{4\pi}{18}}{2\cos\frac{\pi}{18}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{18}\cdot\cos\frac{4\pi}{18}}{4\sin\frac{8\pi}{18}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{18}}{8\sin\frac{8\pi}{18}}=\frac{1}{8}.$$

Според тоа,

$$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}=\frac{1}{16}$$

и тоа е рационален број.

29. Дадени се позитивни броеви a,b и c. Определи ги тројки позитивни броеви (x,y,z) такви што

$$x+y+z=a+b+c \text{ и } 4xyz-a^2x-b^2y-c^2z=abc\,.$$

Решение. Втората равенка да ја запишеме во обликот $\frac{a^2}{yz}+\frac{b^2}{zx}+\frac{c^2}{xy}+\frac{abc}{xyz}=4$, т.е. во обликот $x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_1y_1z_1=4$, каде $x_1=\frac{a}{\sqrt{yz}},\ y_1=\frac{b}{\sqrt{zx}},\ z_1=\frac{c}{\sqrt{xy}}$. Јасно, $0<x_1,y_1,z_1<2$. Ако оваа равенка ја разгледуваме како квадратна по z_1, нејзината дискриминанта е $D=(4-x_1^2)(4-y_1^2)$, па затоа има смисла да земеме $x_1=2\sin u$ и $y_1=2\sin v$, $(0<u,v<\frac{\pi}{2})$. Добиваме

$$z_1=\frac{1}{2}(-x_1y_1+\sqrt{D})=2(\cos u\cos v-\sin u\sin v)=2\cos(u+v)\,.$$

Сега $a = 2\sqrt{yz}\sin u, b = 2\sqrt{xz}\sin v, c = 2\sqrt{xy}(\cos u\cos v - \sin u \sin v)$, па равенката $x + y + z = a + b + c$ го добива обликот

$$(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u)^2 + (\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z})^2 = 0,$$

од каде добиваме $\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \frac{1}{2}(y_1\sqrt{x} + x_1\sqrt{y}) = \frac{1}{2}(\frac{b}{\sqrt{z}} + \frac{a}{\sqrt{z}})$, односно $z = \frac{a+b}{2}$. Аналогно добиваме $x = \frac{b+c}{2}$ и $y = \frac{c+a}{2}$.

Навистина, подредената тројка $(x, y, z) = (\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2})$ ги задоволува двете равенки.

30. Нека $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ се реални корени на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$. Кои услови треба да ги исполнуваат p и q, за да важи $\alpha + \beta = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$.

Решение. Нека важи $\alpha + \beta = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$; тогаш $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$, т.е.

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} = \sqrt{3}. \qquad (1)$$

Со примена на Виетовите врски за решенијата на квадратната равенка, добиваме $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = -p$ и $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = q$, па, со замена во (1) се добива

$$p = (q-1)\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Покрај овој услов, дискриминантата на квадратната равенка мора да е ненегативна, т.е. мора $p^2 - 4q \ge 0$. Ако во овој услов, замениме p од (2), добиваме

$$3q^2 - 10q + 3 \ge 0.$$

Решението на ова неравенка е $q \le \frac{1}{3}$, т.е.

$$q \ge 3. \qquad (3)$$

Значи, p и q мора да ги задоволат условите (2) и (3).

Обратно, ако p и q ги задоволуваат условите (2) и (3), тогаш дискриминантата на квадратната равенка ќе биде позитивна и ќе постојат реални решенија коишто, секако, се еднакви на $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ за погодно избрани α и β. Но, според Виетовите врски, и со оглед на (2), се добива дека $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ го задоволуваат равенството (1), од каде што $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$, т.е. $\alpha + \beta = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$.

31. Пресметај го $\mathrm{tg}\, 3\alpha$ ако е познат $\sin 2\alpha$.

Решение. Прво, за секој реален број t важи

$$\begin{aligned} \sin 3t &= \sin(2t + t) = \sin 2t \cos t + \sin t \cos 2t \\ &= 2\sin t \cos^2 t + \sin t(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ &= 3\sin t \cos^2 t - \sin^3 t = 3\sin t(1 - \sin^2 t) - \sin^3 t \\ &= 3\sin t - 4\sin^3 t \end{aligned}$$

Да ставиме $t = 2\alpha$ и $b = \sin 2\alpha$. Тогаш од последното равенство имаме

$$\sin 6\alpha = 3b - 4b^3. \qquad (1)$$

Од друга страна за секој реален број y важи

$$\sin y = 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} = \frac{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin^2\frac{y}{2}+\cos^2\frac{y}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}}+1} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+1}.$$

Да ставиме $y = 6\alpha$ и $x = \operatorname{tg}3\alpha$. Од последното равенство добиваме

$$\sin 6\alpha = \frac{2x}{1+x^2}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{2x}{1+x^2} = 3b-4b^3$, односно $(3b-4b^3)x^2 - 2x + (3b-4b^3) = 0$. Оттука

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1-(3b-4b^3)^2}}{(3b-4b^3)} \text{ и } x_2 = \frac{1-\sqrt{1-(3b-4b^3)^2}}{(3b-4b^3)}.$$

Имајќи предвид дека $x = \operatorname{tg}3\alpha$ и $b = \sin 2\alpha$ ја добивме бараната врска меѓу $\operatorname{tg}3\alpha$ и $\sin 2\alpha$.

2. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ИДЕНТИТЕТИ

1. Докажи го идентитетот $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

Решение. Користејќи ги формулите за тригонометриски функции од двоен агол и основното тригонометриско равенство, добиваме:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

1. Ако $m^2+n^2=1,\ p^2+q^2=1$ и $mp+nq=0$, определи ја вредноста на

$$mn+pq.$$

Решение. Нека $m=\sin\alpha, n=\cos\alpha, p=\sin\beta, q=\cos\beta$. Тогаш

$$0 = mp+nq = \cos(\alpha-\beta).$$

Сега за $mn+pq$ имаме:

$$mn+pq = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 0$$

2. Ако е исполнето равенството $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d}$, докажи дека $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

Решение. Бидејќи $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c}$, т.е. $\cos x : \cos(x+2\varphi) = a : c$, добиваме дека

$$[\cos x + \cos(x+2\varphi)] : \cos(x+2\varphi) = (a+c) : c.$$

Од последното равенство следува

$$\frac{\cos x+\cos(x+2\varphi)}{a+c} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b}. \qquad (1)$$

Понатаму, $\cos x + \cos(x+2\varphi) = 2\cos\varphi\cdot\cos(x+\varphi)$, па затоа од (1) следува

$$\frac{2\cos\varphi\cos(x+\varphi)}{a+c}=\frac{\cos(x+\varphi)}{b}\text{, т.е. }\frac{a+c}{b}=2\cos\varphi.$$

Аналогно се докажува дека $\frac{b+d}{c}=2\cos\varphi$, од каде следува дека $\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$.

3. За реалните броеви $x,\ y\in(0,\pi)$ е исполнето равенството

$$\cos 2x\cos y-\cos 2y\cos x=\cos y-\cos x.$$

Докажи дека $x=y$.

Решение. Даденото равенство последоватечно е еквивалентно со равенствата

$$\cos y(1-\cos 2x)-\cos x(1-\cos 2y)=0$$

$$\cos y\sin^2 x-\cos x\sin^2 y=0$$

$$\cos y\cos^2 x-\cos x\cos^2 y=\cos y-\cos x.$$

$$\cos y\cos x(\cos x-\cos y)=\cos y-\cos x$$

$$(\cos y-\cos x)(\cos x\cos y+1)=0.$$

Но, $x,y\in(0,\pi)$, па затоа $\cos x\cos y+1>0$ и од последното равенство добиваме

$$\cos y-\cos x=0, \tag{1}$$

т.е. $\cos x=\cos y$. Функцијата $f(t)=\cos t$ на интервалот $(0,\pi)$ е монотоно опаѓачка, па равенството $\cos x=\cos y$ е можно само ако $x=y$.

4. Ако $\sin\alpha+\sin\beta=a$ и $\cos\alpha+\cos\beta=b$, тогаш

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\ \text{ и }\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Докажи!

Решение. Користејќи ги идентитетите $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ и $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, за $x=\alpha+\beta$ добиваме

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}},\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{1}$$

Доволно е да ја пресметаме вредноста на $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. Ако ги искористиме формулите за збир на два синуси,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

и збир на два коснуси,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

добиваме:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ако замениме во (1), добиваме:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\ \text{ и }\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{2ab}{b^2+a^2}.$$

5. Нека $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$ и $\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$ и $\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$. Докажи, дека

$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Решение. Од условот на задачата следува

$$\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}-1=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}-1=\frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}-1.$$

Воведуваме смена $\cos^2\alpha=t$ и ја добиваме равенката $t^2+t-1=0$ чии решенија се $t_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи $\cos^2\alpha\ge 0$, добиваме дека $\cos^2\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$. Бидејќи $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$, добиваме дека $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Аналогно се докажува дека $\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. Изрази го $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ преку m, каде $m=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$

Решение. Ако го квадрираме равенството $m=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$, добиваме

$$m^2=(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x})^2=\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}{(\sin x\cos x)^2}=\frac{1+2\sin x\cos x}{(\sin x\cos x)^2}. \quad (1)$$

Од друга страна

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

Според тоа, за да се пресмета $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$, доволно е да се пресмета вредноста на $\sin x\cos x$. Ако воведеме ознака $\sin x\cos x=t$ и замениме во (1), добиваме

$$m^2=\frac{4(1+2t)}{t^2},$$

$$m^2t^2-8t-4=0.$$

Од последната квадратна равенка добиваме

$$t_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{64+16m^2}}{2m^2}=\frac{4\pm2\sqrt{4+m^2}}{m^2}.$$

Значи, имаме две решенија

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{m^2}{4+2\sqrt{4+m^2}} \text{ и } \operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{m^2}{4-2\sqrt{4+m^2}}.$$

7. Одреди ги $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}y$ и $\operatorname{tg}z$, ако $\operatorname{tg}x:\operatorname{tg}y:\operatorname{tg}z=a:b:c$ и $x+y+z=\pi$. Притоа a, b, c, x, y, z се позитивни реални броеви.

Решение. Од $\operatorname{tg}x:\operatorname{tg}y:\operatorname{tg}z=a:b:c$, $x+y+z=\pi$ и a,b,c,x,y,z се позитивни реални броеви добиваме дека $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}y$, $\operatorname{tg}z>0$ (навистина ако два од тие броеви се негативни, на пример $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$, добиваме дека $x,y>\frac{\pi}{2}$ што не е можно. Исто така не е можно и трите броеви да се негативни како и само еден да е негативен заради $\operatorname{tg}x:\operatorname{tg}y:\operatorname{tg}z=a:b:c$). Нека сега $\operatorname{tg}x=ka$, $\operatorname{tg}y=kb$, $\operatorname{tg}z=kc$; $k>0$. Тогаш

$$\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}(\pi-(x+y))=-\operatorname{tg}(x+y)=-\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$$

и оттука $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z$. Со замена на $\operatorname{tg} x=ka$, $\operatorname{tg} y=kb$, $\operatorname{tg} z=kc$ во последното равенство добиваме $k(a+b+c)=k^3abc$, односно $k=\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}$. Значи

$$\operatorname{tg} x=a\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}},\ \operatorname{tg} y=b\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}\ \text{ и }\ \operatorname{tg} z=c\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}.$$

8. Поедностави го изразот $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

Решение. За $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ дадениот израз е еднаков на

$$\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2 a}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}=\frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}-\frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}.$$

За секој α важи $1+\sin\alpha\geq 0$ и $1-\sin\alpha\geq 0$. Затоа изразот го добива следниов облик $\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$. Ако $\alpha\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ тогаш $\cos\alpha>0$, па изразот е еднаков на $2\operatorname{tg}\alpha$. Ако, пак, $\alpha\notin[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$ тогаш тој е еднаков на $-2\operatorname{tg}\alpha$.

Изразот не е дефиниран за $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

9. Докажи го идентитетот $8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=1$.

Решение. *Прв начин.* Имајќи го предвид идентитетот $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$, имаме:

$$8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=4\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=2\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=1.$$

Втор начин. Ја користиме формулата $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$ и добиваме:

$$\begin{aligned}8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ&=4\cos 20^\circ[\cos 40^\circ+\cos 120^\circ]\\&=4\cos 20^\circ\cos 40^\circ+4\cos 20^\circ\cos 120^\circ\\&=4\cos 20^\circ\cos 40^\circ+4\cos 20^\circ(-\sin 30^\circ)\\&=2(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ)-2\cos 20^\circ\\&=2\cos 60^\circ=2\cdot 0,5=1.\end{aligned}$$

10. Докажи дека важи $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Решение. Со помош на тригонометриски трансформации добиваме

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\tfrac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ=\tfrac{1}{2}(\cos 20^\circ\sin 80^\circ-\cos 60^\circ\sin 80^\circ)$$
$$=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-\tfrac{1}{2}\sin 80^\circ)=\tfrac{1}{4}((\sin 100^\circ-\sin 80^\circ)+\tfrac{\sqrt{3}}{2})=\tfrac{\sqrt{3}}{8}$$

што требаше и да се докаже.

11. Пресметај ја вредноста на изразот

$$a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta),$$

ако $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ се решенијата на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$.

Решение. Ако $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ се решенијата на равенката $ax^2+bx+c=0$, тогаш точни се равенствата

$$a\operatorname{tg}^2\alpha+b\operatorname{tg}\alpha+c=0,\ a\operatorname{tg}^2\beta+b\operatorname{tg}\beta+c=0,\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\tfrac{b}{a},\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\tfrac{c}{a}$$

Затоа

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\frac{b}{c-a}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}a\sin^2(\alpha+\beta)&+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)=\\&=\cos^2(\alpha+\beta)[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c]\\&=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c]\\&=\frac{1}{1+(\frac{b}{c-a})^2}[a(\frac{b}{c-a})^2+b\frac{b}{c-a}+c]\\&=\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\,\frac{ab^2+b^2c-b^2a+c(c-a)^2}{(c-a)^2}=c.\end{aligned}$$

12. Нека $\sin x\cos x\neq 0$ и $a_1b+ab_1\neq 0$, каде $a_1,b,a,b_1\in\mathbb{R}$, и

$$\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}=\frac{a_1}{b_1},\qquad \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}=\frac{a}{b}.$$

Докажи дека

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa_1+bb_1}{ab_1+ba_1}.$$

Решение. Користејќи ги адиционите формули за $\sin(x-y)$ и $\cos(x-y)$, со елементарни трансформации дадените равенства може да се запишат во облик

$$b_1(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha)=a_1(\cos x\cos\beta+\sin x\sin\beta),$$

$$b(\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha)=a(\sin x\cos\beta-\cos x\sin\beta).$$

Двете последни равенства може да се преуредат на слениот начин:

$$\sin x(b\cos\alpha-a\cos\beta)=\cos x(b\sin\alpha-a\sin\beta),$$

$$\cos x(b_1\cos\alpha-a_1\cos\beta)=\sin x(a_1\sin\beta-b_1\sin\alpha).$$

Ако двете равенства ги помножиме, добиваме

$$\begin{aligned}\sin x\cos x(b_1\cos\alpha-a_1\cos\beta)(b\cos\alpha-a\cos\beta)&=\\=\sin x\cos x(a_1\sin\beta-b_1\sin\alpha)(b\sin\alpha-a\sin\beta)&.\end{aligned}$$

Од условот $\sin x\cos x\neq 0$, ако скратиме, добиваме

$$(b_1\cos\alpha-a_1\cos\beta)(b\cos\alpha-a\cos\beta)=(a_1\sin\beta-b_1\sin\alpha)(b\sin\alpha-a\sin\beta).$$

Ако во последното равенство се ослободиме од загради, и добиеното равенство го преуредиме, имаме

$$a_1a(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+b_1b(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=(ba_1+ab_1)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta),$$

$$a_1a+b_1b=(ba_1+ab_1)\cos(\alpha-\beta),$$

што и требаше да се докаже.

13. Докажи дека

$$\cos\tfrac{\pi}{5}+\cos\tfrac{3\pi}{5}=\tfrac{1}{2}.$$

Решение. Имаме

$$\cos\tfrac{\pi}{5}+\cos\tfrac{3\pi}{5}=2\cos(\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{5}+\tfrac{3\pi}{5}))\cos(\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{5}-\tfrac{3\pi}{5}))=2\cos\tfrac{\pi}{5}\cos\tfrac{2\pi}{5}$$

$$=2\sin\tfrac{\pi}{5}\cos\tfrac{\pi}{5}\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}.$$

14. Ако за острите агли α, β и γ важи $\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$ и $\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$, докажи дека $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Решение. Од дадените равенства добиваме

$$\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}-1=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}-1=\frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}-1.$$

Одтука $\cos^4\alpha+\cos^2\alpha-1=0$, т.е. $\cos^2\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, па од $\cos^2\alpha\geq 0$, следува $\cos^2\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Од тука $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$, и бидејќи α е остар агол, следува дека $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Аналогно се добива $\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

15. а) Докажи, дека

$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-x)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+x).$$

б) Пресметај

$$\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ.$$

Решение. а) Имаме

$$\operatorname{tg}3x=\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}=\frac{\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}}=\frac{\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-\operatorname{tg}^2x}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}}=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}$$

и

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-x)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+x)=\operatorname{tg}x\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{tg}60^\circ}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}x}$$

$$=\operatorname{tg}x\cdot\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}$$

$$=\operatorname{tg}x\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}.$$

Конечно, од еднаквоста на десните страна на двете низи равенства следува бараното равенство.

б) Ако во равенството под а) ставиме $x = 60^\circ$ добиваме

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$$

$$\operatorname{tg}^2 60^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$$

$$3 = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ.$$

16. Ако $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=1.$$

Решение. Од равенствата

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}-\gamma)=\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

добиваме $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$. Оттука следува

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=1.$$

17. Аглите α,β и γ се такви што $\beta=\alpha+60^\circ$ и $\gamma=\beta+60^\circ$. Докажи дека вредност на изразот

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha$$

не зависи од α,β и γ.

Решение. Воведуваме ознака $\operatorname{tg}\alpha=a$. Имаме

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+60^\circ)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}60^\circ}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}60^\circ}=\frac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+120^\circ)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}120^\circ}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}120^\circ}=\frac{a-\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}.$$

па затоа

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha &= a\frac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}+\frac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}\frac{a-\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}+a\frac{a-\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}\\ &=\frac{a^2+a\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}+\frac{a^2-3}{1-3a^2}+\frac{a^2-a\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}\\ &=\frac{(a^2+a\sqrt{3})(1+a\sqrt{3})+(a^2-a\sqrt{3})(1-a\sqrt{3})}{1-3a^2}+\frac{a^2-3}{1-3a^2}\\ &=\frac{8a^2}{1-3a^2}+\frac{a^2-3}{1-3a^2}=\frac{-3(1-3a^2)}{1-3a^2}=-3,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

18. Докажи го равенсвото:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+\frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}.$$

Решение. Имаме:

$$\sin 1^\circ\left(\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+\frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}\right)=$$

$$=\frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}$$

$$=\frac{\sin(1^\circ-0^\circ)}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{\sin(2^\circ-1^\circ)}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+\frac{\sin(89^\circ-88^\circ)}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}$$

$$=\frac{\sin 1^\circ \cos 0^\circ - \cos 1^\circ \sin 0^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{\sin 2^\circ \cos 1^\circ - \cos 2^\circ \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+\frac{\sin 89^\circ \cos 88^\circ - \cos 89^\circ \sin 88^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}$$

$$=\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}0^\circ+\operatorname{tg}2^\circ-\operatorname{tg}1^\circ+\ldots+\operatorname{tg}89^\circ-\operatorname{tg}88^\circ$$

$$=\operatorname{tg}89^\circ-\operatorname{tg}0^\circ=\operatorname{tg}89^\circ=\operatorname{ctg}1^\circ=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ},$$

од каде се добива бараното равенство.

19. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}-\ldots-\frac{\cos 3nx}{\cos nx}.$$

Решение. Користејќи ја адиционата теорема

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

добиваме

$$A=\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}-\ldots-\frac{\cos 3nx}{\cos nx}$$

$$=[\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}]+[\frac{\sin 6x}{\sin 2x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}]+\ldots+[\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3nx}{\cos nx}]$$

$$=\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}+\frac{\sin 6x\cos 2x-\cos 6x\sin 2x}{\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx\cos nx-\cos 3nx\sin nx}{\sin nx\cos nx}$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}+\frac{\sin(6x-2x)}{\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin(3nx-nx)}{\sin nx\cos nx}=$$

$$=\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}2\sin x\cos x}+\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}2\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}2\sin nx\cos nx}=\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}+\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 4x}+\ldots+\frac{\sin 2nx}{\frac{1}{2}\sin 2nx}$$

$$=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n}=2n.$$

20. Пресметај го за произволен агол α, збирот

$$\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+1^\circ)+\ldots.+\sin^2(\alpha+179^\circ).$$

Решение. Користејќи ги идентитетите

$$\sin(\alpha+90^\circ)=\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+91^\circ)=\cos(\alpha+1^\circ)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin(\alpha+179^\circ)=\cos(\alpha+89^\circ)$$

за збирот, ќе го означиме со S, добиваме

$$S=\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+1^\circ)+\ldots.+\sin^2(\alpha+179^\circ)$$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2(\alpha+1^\circ)+\cos^2(\alpha+1^\circ))+\ldots.+(\sin^2(\alpha+89^\circ)+\cos^2(\alpha+89^\circ))$$

$$=1+1+1+\ldots+1=90.$$

21. Да се пресмета

$$A=(2\cos x-1)(2\cos 2x-1)\ldots(2\cos 2^{n-1}x-1).$$

Решение. Нека $\cos x\neq-\frac{1}{2}$. Тогаш левата и десната страна на равенството ќе ги помножиме со $2\cos x+1$, и притоа ќе ги користиме равенствата

$$4\cos^2 x-1=4\cos^2 x-2+1=4\cos^2 x-2\cos^2 x-2\sin^2 x+1$$
$$=2(\cos^2 x-\sin^2 x)+1=2\cos 2x+1,$$

или

$$4\cos^2 ax-1=2\cos^2 2ax+1,$$

па ќе имаме:

$$(2\cos x+1)A=(4\cos^2 x-1)(2\cos 2x-1)...(2\cos 2^{n-1}x-1)$$
$$=(2\cos 2x+1)(2\cos 2x-1)...(2\cos 2^{n-1}x-1)$$
$$=(4\cos^2 2x-1)(2\cos 4x-1)....(2\cos 2^{n-1}x-1)=...=2\cos 2^n x-1$$

од каде што следува $A=\frac{2\cos 2^n x}{2\cos x+1}$.

Ако $\cos x=-\frac{1}{2}$, тогаш $A=(-2)^n$.

22. Докажи, дека за секој природен број n важи

$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=0.$$

Решение. Да означиме $S_n=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$. Последното равенство го множиме со $2\sin\frac{\pi}{2n}\neq 0$ и добиваме

$$2\sin\frac{\pi}{2n}S_n=2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{n}+...+2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$
$$=\sin(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}-\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n})+$$
$$+...+\sin(\frac{\pi}{2n}-\frac{(n-1)\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n})$$
$$=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}-\sin\frac{3\pi}{2n}+\sin\frac{5\pi}{2n}+...-\sin\frac{(2n-3)\pi}{2n}+\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$
$$=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin(\pi-\frac{\pi}{2n})=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}=0.$$

Според тоа, $2\sin\frac{\pi}{2n}S_n=0$ и бидејќи $2\sin\frac{\pi}{2n}\neq 0$ добиваме дека $S_n=0$, што и требаше да се докаже

23. Докажи, дека

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^3 kx=\frac{3\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{4\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{3(n+1)}{2}x\cdot\sin\frac{3n}{2}x}{4\sin\frac{3x}{2}},$$

за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{2m\pi}{3}\mid m\in\mathbb{Z}\}$.

Решение. Ако $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$, тогаш важи

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin k\alpha\sin\frac{\alpha}{2}==\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2}-\cos\frac{(2k+1)\alpha}{2})$$
$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Одовде и од равенството $4\sin^3\alpha=3\sin\alpha-\sin 3\alpha$ следува бараното равенство.

24. Докажи дека

$$S=\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2+\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3+...+\operatorname{tg}a_n\operatorname{tg}a_{n+1}=\frac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\cos a_1\cos a_{n+1}\operatorname{tg}\alpha}-n,$$

каде што $a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1}$ се последователни членови на артиметичка прогресија со разлика α.

Решение.Имаме

$$\operatorname{tg}(a_{k+1}-a_k)=\frac{\operatorname{tg}a_{k+1}-\operatorname{tg}a_k}{1+\operatorname{tg}a_{k+1}\operatorname{tg}a_k},\ k=1,2,3,...,n,$$

т.е.

$$\operatorname{tg}a_{k+1}\operatorname{tg}a_k=\frac{\operatorname{tg}a_{k+1}-\operatorname{tg}a_k}{\operatorname{tg}\alpha}-1,\ k=1,2,3,...,n.$$

Собирајќи ги овие равенства за k од 1 до n добиваме

$$S=\frac{\operatorname{tg}a_{k+1}-\operatorname{tg}a_1}{\operatorname{tg}\alpha}-n=\frac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\cos a_1\cos a_{n+1}\operatorname{tg}\alpha}-n.$$

25. Докажи, дека

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+2^2\operatorname{tg}2^2\alpha+...+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha,\qquad(1)$$

за секој $n\in\mathbb{N}$ и за секој $\alpha\in\mathbb{R}$.

Решение. Лесно се докажува дека $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=2\operatorname{ctg}2x$, за секој $x\in\mathbb{R}$, т.е.

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}2x,\text{ за секој } x\in\mathbb{R}.\qquad(2)$$

Сега, ако во (2) последователно ставиме $x=\alpha,2\alpha,2^2\alpha,...,2^n\alpha$ и добиените равенства ги помножиме со $1,2,2^2,...,2^n$, соодветно, ги добиваме равенствата

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha\\
&2\operatorname{tg}2\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha-2^2\operatorname{ctg}2^2\alpha\\
&2^2\operatorname{tg}2^2\alpha=2^2\operatorname{ctg}2^2\alpha-2^3\operatorname{ctg}2^3\alpha\\
&2^3\operatorname{tg}2^3\alpha=2^3\operatorname{ctg}2^3\alpha-2^4\operatorname{ctg}2^4\alpha\\
&...\\
&2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha.
\end{aligned}$$

Конечно, ако ги собереме горните равенства, добиваме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ и за секој $\alpha\in\mathbb{R}$ важи (1)

26. Докажи, дека за секој природен број n поголем од 1 важи

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}3x+...+\operatorname{tg}(nx-x)\cdot\operatorname{tg}nx=\frac{\operatorname{tg}nx}{\operatorname{tg}x}-n\qquad(1)$$

за секој x за кој сите собирци се дефинирани и $\operatorname{tg}x\neq 0$.

Решение. Ќе користиме математичка индукција.

За $n=2$ имаме

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}\text{ и}$$

$$\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x}-2=\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}^2x)}-2=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2x}-2=\frac{2-2+2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x},$$

т.е. равенството (1) важи. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи

$$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}3x+\ldots+\operatorname{tg}(kx-x)\cdot\operatorname{tg}kx=\frac{\operatorname{tg}kx}{\operatorname{tg}x}-k\ .$$

Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}3x+\ldots+\operatorname{tg}(kx-x)\cdot\operatorname{tg}kx+\operatorname{tg}kx\cdot\operatorname{tg}(kx+x)=\\
&=\frac{\operatorname{tg}kx}{\operatorname{tg}x}-k+\operatorname{tg}kx\cdot\operatorname{tg}(kx+x)\\
&=\frac{1}{\operatorname{tg}x}(\operatorname{tg}kx+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}kx\cdot\operatorname{tg}(kx+x))-(k+1)\\
&=\frac{\operatorname{tg}(kx+x)}{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\operatorname{tg}kx+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}(kx+x)}+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}kx\right)-(k+1)\\
&=\frac{\operatorname{tg}(kx+x)}{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\operatorname{tg}kx+\operatorname{tg}x}{\frac{\operatorname{tg}kx+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}kx\cdot\operatorname{tg}x}}+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}kx\right)-(k+1)\\
&=\frac{\operatorname{tg}(kx+x)}{\operatorname{tg}x}-(k+1),\end{aligned}$$

т.е. равенството (1) важи.
Конечно, од принципот на математичка индукција следува точноста на тврдењето.

27. Пресметај го збирот $S=S_1+S_2$, каде што S_1 и S_2 се зададени со

$$S_1=\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}1^\circ}2}+\frac{2}{\log_{\operatorname{tg}2^\circ}2^2}+\ldots+\frac{44}{\log_{\operatorname{tg}44^\circ}2^{44}}\quad \text{и}$$

$$S_2=\frac{46}{\log_{\operatorname{tg}46^\circ}2^{46}}+\frac{47}{\log_{\operatorname{tg}47^\circ}2^{47}}+\ldots+\frac{89}{\log_{\operatorname{tg}89^\circ}2^{89}}$$

Решение. Користејќи го својството за логаритми $\log_x a^k=k\log_x a$, збирот

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\
&=\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}1^\circ}2}+\frac{2}{\log_{\operatorname{tg}2^\circ}2^2}+\ldots+\frac{44}{\log_{\operatorname{tg}44^\circ}2^{44}}+\frac{46}{\log_{\operatorname{tg}46^\circ}2^{46}}+\frac{47}{\log_{\operatorname{tg}47^\circ}2^{47}}+\ldots+\frac{89}{\log_{\operatorname{tg}89^\circ}2^{89}}\\
&=\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}1^\circ}2}+\frac{2}{2\log_{\operatorname{tg}2^\circ}2}+\ldots+\frac{44}{44\log_{\operatorname{tg}44^\circ}2}+\frac{46}{46\log_{\operatorname{tg}46^\circ}2}+\frac{47}{47\log_{\operatorname{tg}47^\circ}2}+\ldots+\frac{89}{89\log_{\operatorname{tg}89^\circ}2}\\
&=\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}1^\circ}2}+\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}2^\circ}2}+\ldots+\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}44^\circ}2}+\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}46^\circ}2}+\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}47^\circ}2}+\ldots+\frac{1}{\log_{\operatorname{tg}89^\circ}2}.\end{aligned}$$

Користејќи го својството $\frac{1}{\log_x a}=\log_a x$, збирот го доведуваме до облик

$$\begin{aligned}S&=\log_2\operatorname{tg}1^\circ+\ldots+\log_2\operatorname{tg}44^\circ+\log_2\operatorname{tg}46^\circ+\ldots+\log_2\operatorname{tg}89^\circ\\
&=\log_2\operatorname{tg}1^\circ+\log_2\operatorname{tg}89^\circ+\log_2\operatorname{tg}2^\circ+\log_2\operatorname{tg}88^\circ+\ldots+\log_2\operatorname{tg}44^\circ+\log_2\operatorname{tg}46^\circ\\
&=\log_2(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ)+\log_2(\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ)+\ldots+\log_2(\operatorname{tg}44^\circ\cdot\operatorname{tg}46^\circ)\\
&=\log_2(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{ctg}1^\circ)+\log_2(\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{ctg}2^\circ)+\ldots+\log_2(\operatorname{tg}44^\circ\cdot\operatorname{ctg}44^\circ)\\
&=44\log_2 1=0.\end{aligned}$$

28. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}5^\circ\ .$$

Решение. Последователно добиваме

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}5^\circ \operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}20^\circ \operatorname{tg}65^\circ + \operatorname{tg}65^\circ \operatorname{tg}5^\circ &= \operatorname{tg}5^\circ \operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}20^\circ \operatorname{tg}(90^\circ - 25^\circ) + \operatorname{tg}(90^\circ - 25^\circ)\operatorname{tg}5^\circ \\
&= \operatorname{tg}5^\circ \operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{ctg}25^\circ(\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}5^\circ) \\
&= \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}\left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}\right) \\
&= \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}\,\frac{\sin 20^\circ \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} \\
&= \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}\,\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} \\
&= \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ - \cos 25^\circ) + \cos 25^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)} = 1
\end{aligned}
$$

29. Да се пресметаат изразите:

а) $\log \operatorname{tg}1^\circ + \log \operatorname{tg}2^\circ + \log \operatorname{tg}3^\circ + \ldots + \log \operatorname{tg}88^\circ + \log \operatorname{tg}89^\circ$

б) $\log \operatorname{tg}1^\circ \cdot \log \operatorname{tg}2^\circ \cdot \log \operatorname{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \log \operatorname{tg}88^\circ \cdot \log \operatorname{tg}89^\circ$.

Решение.

а) Нека дадениот израз го означиме со A. Користејќи го својството за збир на логаритми:

$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_n = \log(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)$, добиваме

$$
\begin{aligned}
A &= \log(\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}88^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ) \\
&= \log[(\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ)(\operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}88^\circ)(\operatorname{tg}3^\circ \cdot \operatorname{tg}87^\circ)\ldots\cdot(\operatorname{tg}44^\circ \cdot \operatorname{tg}46^\circ)\cdot \operatorname{tg}45^\circ] \\
&= \log[(\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{ctg}1^\circ)(\operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{ctg}2^\circ)(\operatorname{tg}3^\circ \cdot \operatorname{ctg}3^\circ)\ldots\cdot(\operatorname{tg}44^\circ \cdot \operatorname{ctg}44^\circ)\cdot \operatorname{tg}45^\circ] \\
&= \log[1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1] = 0
\end{aligned}
$$

б) Да го означиме изразот со B. Користејќи дека $\log \operatorname{tg}45^\circ = \log 1 = 0$, добиваме $B = 0$.

30. Определи ги сите вредности што може да ги прими изразот

$$\cos\frac{n\pi}{7} + \cos\frac{3n\pi}{7} + \cos\frac{5n\pi}{7},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Од $\cos k\pi = (-1)^k$, за секој $k \in \mathbb{Z}$, за $n = 7k$ добиваме

$$\cos\frac{n\pi}{7} + \cos\frac{3n\pi}{7} + \cos\frac{5n\pi}{7} = (-1)^n + (-1)^{3n} + (-1)^{5n} = 3(-1)^n.$$

Ако $7 \nmid n$ имаме

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{n\pi}{7} + \cos\frac{3n\pi}{7} + \cos\frac{5n\pi}{7} &= \frac{1}{2\sin\frac{n\pi}{7}}\left(2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7} + 2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{3n\pi}{7} + 2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{5n\pi}{7}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{n\pi}{7}}\left(\sin\frac{2n\pi}{7} + \sin\frac{4n\pi}{7} - \sin\frac{2n\pi}{7} + \sin\frac{6n\pi}{7} - \sin\frac{4n\pi}{7}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{6n\pi}{7}}{2\sin\frac{n\pi}{7}} = \frac{\sin(n\pi - \frac{n\pi}{7})}{2\sin\frac{n\pi}{7}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2}
\end{aligned}
$$

Значи,

$$\{\cos\frac{n\pi}{7}+\cos\frac{3n\pi}{7}+\cos\frac{5n\pi}{7}\mid n\in\mathbb{Z}\}=\{-3,3,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\}.$$

31. Пресметај ја вредноста на збирот

$$\sum_{n=1}^{2018}\operatorname{tg}n\operatorname{tg}(n+1).$$

Решение. Од $\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$ следува $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}(x-y)}-1$. Ако во последното равенство ставиме $x=n+1$ и $y=n$ добиваме

$$\operatorname{tg}(n+1)\operatorname{tg}n=\frac{\operatorname{tg}(n+1)-\operatorname{tg}n}{\operatorname{tg}1}-1.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2018}\operatorname{tg}n\operatorname{tg}(n+1)&=\frac{\operatorname{tg}2-\operatorname{tg}1}{\operatorname{tg}1}-1+\frac{\operatorname{tg}3-\operatorname{tg}1}{\operatorname{tg}1}-1+\ldots+\frac{\operatorname{tg}2019-\operatorname{tg}2018}{\operatorname{tg}1}-1\\&=\frac{\operatorname{tg}2019-\operatorname{tg}1}{\operatorname{tg}1}-2018=\frac{\operatorname{tg}2019}{\operatorname{tg}1}-2019.\end{aligned}$$

32. Пресметај го производот

$$(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)\ldots(1+\operatorname{tg}44^\circ)(1+\operatorname{tg}45^\circ).$$

Решение. Имаме

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta.$$

Затоа, ако $\alpha+\beta=45^\circ$, тогаш $1=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$, што значи

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha))=1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=2.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}&(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)\ldots(1+\operatorname{tg}44^\circ)(1+\operatorname{tg}45^\circ)=\\&\quad=(1+\operatorname{tg}45^\circ)\cdot(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}44^\circ)\cdot(1+\operatorname{tg}2^\circ)(1+\operatorname{tg}43^\circ)\cdot\ldots\cdot(1+\operatorname{tg}22^\circ)(1+\operatorname{tg}23^\circ)\\&\quad=2\cdot\underbrace{2\cdot\ldots\cdot2}_{22\text{ пати}}=2^{23}.\end{aligned}$$

33. Определи ги сите природни броеви k такви што

$$\sin^k x\cos kx+\cos^k x\sin kx=\tfrac{3}{4}\sin(k+1)x$$

за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. За $k=1$ даденото равенство го добива обликот $\sin2x=\frac{3}{4}\sin2x$ и очигледно дека тоа не важи за секој $x\in\mathbb{R}$. Нека $k>1$. За $x=\frac{\pi}{k}$ добиваме $\sin^k\frac{\pi}{k}=\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{k}$. Понатаму, $\sin\frac{\pi}{k}\neq0$, па затоа од последното равенство следува $\sin^{k-1}\frac{\pi}{k}=\frac{3}{4}$. За $x=\frac{\pi}{2k}$ добиваме $\cos^k\frac{\pi}{2k}=\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{2k}$. Но, $\cos\frac{\pi}{2k}\neq0$, па затоа од последното равенство следува $\cos^{k-1}\frac{\pi}{2k}=\frac{3}{4}$. Според тоа,

$\frac{3}{4}=\sin^{k-1}\frac{\pi}{k}=2^{k-1}\sin^{k-1}\frac{\pi}{2k}\cos^{k-1}\frac{\pi}{2k}=\frac{3}{4}\cdot 2^{k-1}\sin^{k-1}\frac{\pi}{2k}$, т.е. $2^{k-1}\sin^{k-1}\frac{\pi}{2k}=1$, од каде бидејќи $\sin\frac{\pi}{2k}>0$, добиваме $\sin\frac{\pi}{2k}=\frac{1}{2}$. Последното равенство важи само за $k=3$.

Ќе докажеме дека за $k=3$ даденото равенство важи за секој $x\in\mathbb{R}$. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x&=\sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)+\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x)\\&=3\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)\\&=3\cdot\tfrac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\tfrac{3}{4}\sin 4x.\end{aligned}$$

34. Пресметај $\sin^7 x+\cos^7 x$, ако $\sin x+\cos x=a$. За кои вредности на a задачата има смисла?

Решение. *Прв начин.* Со квадрирање на условот добиваме:

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=a^2,$$

$$\sin x\cos x=\tfrac{a^2-1}{2}.$$

Значи, $\sin x$ и $\cos x$ се решенија на квадратната равенка

$$y^2-ay+\tfrac{a^2-1}{2}=0,\qquad \text{т.е.}\qquad 2y^2-2ay+a^2-1=0.$$

Од $D\geq 0$ добиваме $4a^2-8a^2+8\geq 0$, $a^2\leq 2$, $|a|\leq\sqrt{2}$. Значи задачата има смисла за $-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$.

Нека $\sin x=p$, $\cos x=q$, тогаш $p+q=a$, $p^2+q^2=1$, па имаме:

$$\begin{aligned}p^7+q^7&=(p+q)(p^6-p^5q+p^4q^2-p^3q^3+p^2q^4-pq^5+q^6)=\\&=a[p^4(p^2+q^2)+q^4(p^2+q^2)-pq(p^4+q^4)-p^3q^3]=\\&=a[(1-pq)(p^4+q^4)-p^3q^3]=\\&=a[(1-pq)((p^2+q^2)^2-2p^2q^2)-p^3q^3]=\\&=a[(1-pq)(1-2p^2q^2)-p^3q^3]=\\&=a(1-pq-2p^2q^2+p^3q^3)\end{aligned}$$

Ако искористиме дека $pq=\frac{a^2-1}{2}$, по средувањето ќе добиеме:

$$\sin^7 x+\cos^7 x=\tfrac{a}{8}(a^6-7a^4+7a+7).$$

Втор начин.

$$\begin{aligned}\sin^7 x+\cos^7 x&=(\sin x+\cos x)^7-7\sin^6 x\cos x-21\sin^5 x\cos^2 x\\&\quad-35\sin^4 x\cos^3 x-21\sin^3 x\cos^4 x-7\sin x\cos^6 x\\&=a^7-7\sin x\cos x(\sin^5 x+\cos^5 x)-21\sin^2 x\cos^2 x(\sin^3 x+\cos^3 x)\\&\quad-35\sin^3 x\cos^3 x(\sin x+\cos x)\end{aligned}$$

Од $\sin x+\cos x=a$, следува $\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}$, и

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=a^3-3\tfrac{a^2-1}{2}a=\tfrac{3a-a^3}{2}$$

$$\sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)^3-5\sin x\cos x(\sin^3 x+\cos^3 x)$$

$$-10\sin^2 x\cos^2 x(\sin x+\cos x)$$

$$=a^5-5\frac{a^2-1}{2}\frac{3a-a^3}{2}-10(\tfrac{a^2-1}{2})^2=\ldots=\tfrac{5a-a^5}{4}$$

По заменување на овие вредности во почетното равенство (и при подолги пресметувања), конечно се добива

$$\sin^7 x+\cos^7 x=\tfrac{a}{8}(a^6-7a^4+7a+7).$$

35. Одреди $\sin x$, ако

$$\sin^{10} x+\cos^{10} x=\tfrac{1}{5}.$$

Решение. *Прв начин.* Бидејќи

$$\sin^2 x=\tfrac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\tfrac{1+\cos 2x}{2}$$

па ставајќи $\cos 2x=y$, добиваме:

$$(\tfrac{1-y}{2})^5+(\tfrac{1+y}{2})^5=\tfrac{1}{5},$$

$$(1-y)^5+(1+y)^5=\tfrac{32}{5}$$

$$1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5+1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5=\tfrac{32}{5}$$

$$25y^4+50y^2-11=0$$

од каде што $y^2=-\frac{11}{5}$, $y^2=\frac{1}{5}$. Задоволува само второто решение, т.е.

$$\cos^2 2x=\tfrac{1}{5},\quad \cos 2x=\pm\tfrac{\sqrt{5}}{5}$$

Тогаш

$$\sin^2 x=\frac{1-(\pm\frac{\sqrt{5}}{5})}{2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\text{, т.е. }\sin x=\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}.$$

Втор начин. Нека

$$\sin^2 x=a,\quad \cos^2 x=b,$$

тогаш

$$\sin^{10} x+\cos^{10} x=a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

Бидејќи $a+b=1$, добиваме

$$a^5+b^5=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4=$$

$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2-ab(a^2+b^2)$$

Од $a+b=1$ следува $1=a^2+b^2+2ab$, т.е.

$$a^2+b^2=1-2ab$$

$$a^5+b^5=(1-2ab)^2-a^2b^2-ab(1-2ab)$$

$$\tfrac{1}{5}=5a^2b^2-5ab+1.$$

Нека $ab=t$, тогаш $25t^2-25t+4=0$, а оттука $t_1=\frac{4}{5}$, $t_2=\frac{1}{5}$, т.е. $ab=\frac{4}{5}$, $ab=\frac{1}{5}$. Сега ги решаваме системите равенки

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=\frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a+b=1 \\ ab=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Првиот систем нема реални решенија, а од вториот добиваме $a=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$. Тогаш

$$\sin^2 x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}, \text{ т.е. } \sin x=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}}.$$

3. ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ, СИСТЕМИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Да се реши равенката

$$1+\sin\frac{x+\pi}{5}\sin\frac{x-\pi}{2}=0.$$

Решение. Функцијата $\sin$ прима вредности од интервалот $[-1,1]$. Според тоа, за

$$\sin\frac{x+\pi}{5}\sin\frac{x-\pi}{2}=-1,$$

потребно е и доволно е едниот множител да е еднаков на 1, а другиот да е еднаков на -1. Можни се два случаи, т.е. потребно е да се решат следните два системи

$$\begin{cases} \sin\frac{x+\pi}{5}=1 \\ \sin\frac{x-\pi}{11}=-1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin\frac{x+\pi}{5}=-1 \\ \sin\frac{x-\pi}{11}=1 \end{cases}.$$

Од првиот систем добиваме

$$\begin{cases} \frac{x+\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \frac{x-\pi}{11}=-\frac{\pi}{2}+2l\pi \end{cases}, \ k,l\in\mathbb{Z}.$$

Според тоа,

$$\begin{cases} x=\frac{3\pi}{2}+10k\pi \\ x=-\frac{9\pi}{2}+22l\pi \end{cases}, \ k,l\in\mathbb{Z}$$

од каде имаме $\frac{3\pi}{2}+10k\pi=-\frac{9\pi}{2}+22l\pi$, односно $6\pi=22l\pi-10k\pi$, т.е. $3=11l-5k$. Последната равенка можеме да ја запишеме во облик $5(k-6)=11(l-3)$. Бидејќи $(5,11)=1$ добиваме $k-6=11n$ и $l=5n+3$. Сега

$$x=\frac{3\pi}{2}+10k\pi=\frac{3\pi}{2}+10(6+11n)\pi=(61,5+110n)\pi.$$

Со потполно аналогни пресметки за вториот систем добиваме

$$x=(6,5+110n)\pi, \ n\in\mathbb{Z}.$$

Значи, решенија на системот се

$$x=(61,5+110n)\pi, n\in\mathbb{Z}$$
$$x=(6,5+110n)\pi, \ n\in\mathbb{Z}.$$

2. Реши ја равенката $\sin x+\cos\frac{x}{2}=0$.

Решение. Имајќи го предвид равенството $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, добиваме

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$$

$$2\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=0.$$

i) Од $\cos\frac{x}{2}=0$ следува $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

ii) Од $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$ следува $\frac{x}{2}=\frac{7\pi}{6}+2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$, $\frac{x}{2}=\frac{11\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, т.е.

$x=(12m+7)\frac{\pi}{3}$, $m\in\mathbb{Z}$; $x=(12n+11)\frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. Реши ја равенката

$$\sin 2x+\cos(x+y)=2. \tag{1}$$

Решение. Бидејќи $\sin 2x\le 1$ и $\cos(x+y)\le 1$, за секои реални броеви x,y, од (1) следува $\sin 2x=1$ и $\cos(x+y)=1$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ x+y=2m\pi, & m\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

од каде наоѓаме $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ и $y=(2m-k)\pi-\frac{\pi}{4}$, за $k,m\in\mathbb{Z}$.

4. Реши ја равенката

$$\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{16}.$$

Решение. Од дадената равенка последователно добиваме

$$16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1$$

$$2\cos x\sin x\cdot 2\cos 2x\cdot 2\cos 4x\cdot 2\cos 8x=\sin x$$

$$2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2\cos 4x\cdot 2\cos 8x=\sin x$$

$$2\sin 4x\cos 4x\cdot 2\cos 8x=\sin x$$

$$2\sin 8x\cos 8x=\sin x$$

$$\sin 16x=\sin x$$

$$2\sin\frac{16x-x}{2}\cos\frac{16x+x}{2}=0$$

$$\sin\frac{15x}{2}\cos\frac{17x}{2}=0$$

Равенката $\sin\frac{15x}{2}=0$ има решенија $\frac{15x}{2}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=\frac{2k\pi}{15}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Равенката $\cos\frac{17x}{2}=0$ има решенија $\frac{17x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решенија на почетната равенка се $x=\frac{2k\pi}{15}$, $k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$, каде $k\neq 15s$ и $2k+1\neq 17s$, $s\in\mathbb{Z}$.

5. Реши ја равенката

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned}
&\sin x+\sin 3x+\sin 2x=1+\cos 2x+\cos x\\
&2\sin 2x\cdot\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x\\
&(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos x)=0\\
&\cos x(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0.
\end{aligned}$$

Според тоа, решение на почетната равенка е унијата од решенијата на равенките $\cos x=0, \cos x=-\frac{1}{2}$ и $\sin x=\frac{1}{2}$.

Решенија на равенката $\cos x=0$ се $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решенија на равенката $\cos x=-\frac{1}{2}$ се $x=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решенија на равенката $\sin x=\frac{1}{2}$ се $x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Значи, множеството решенија на равенката е

$$\{\tfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{\pi}{2}\pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi\pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

6. Реши ја равенката

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\cos 3x\cdot\cos 5x\cdot\cos 6x\cdot\cos 7x,$$

а потоа за најмалото позитивно решение a пресметај ја вредноста на изразот

$$\cos a\cdot\cos 2a\cdot\cos 4a\cdot\cos 8a.$$

Решение. Користејќи ја формулата $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ равенката се трансформира во еквивалентната равека $\cos 13x=\cos 21x$, односно во равенката $\sin 4x\sin 17x=0$. Множеството решенија на последната равенка е

$$\{\tfrac{k\pi}{17} \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{k\pi}{4} \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

Најмалото позитивно решение е $a=\frac{\pi}{17}$ и за таа вредност имаме

$$\cos a\cos 2a\cos 4a\cos 8a=\frac{\sin 16a}{16\sin a}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{17})}{16\sin\frac{\pi}{17}}=\frac{1}{16}.$$

7. Реши ја равенката

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$$

Репение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1 \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2 x+2\cos^2 2x+2\cos^2 3x=2 &&\Leftrightarrow\\
&\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+1=0 \;\Leftrightarrow\; \cos 4x+2\cos 4x\cos 2x+1=0 &&\Leftrightarrow\\
&2\cos^2 2x+2\cos 2x\cos 4x=0 \;\Leftrightarrow\; \cos 2x(\cos 2x+\cos 4x)=0 &&\Leftrightarrow\\
&\cos x\cos 2x\cos 3x=0
\end{aligned}$$

Оттука следува дека решенијата на почетната равенка се

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\; x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \text{ и } x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\; k\in\mathbb{Z}.$$

8. Реши ја равенката

$$\mathrm{tg}^2(x+y)+\mathrm{ctg}^2(x+y)=1-2x-x^2.$$

Решене. За левата страна на равенката имаме

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2(x+y)+\operatorname{ctg}^2(x+y) &= (\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{ctg}(x+y))^2+2\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{ctg}(x+y)\\ &= (\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{ctg}(x+y))^2+2\geq 2\end{aligned}\qquad(1)$$

Притоа равенство во (1) важи ако и само ако $\operatorname{tg}(x+y)=\operatorname{ctg}(x+y)$. Десната страна на равенката може да се запише во облик

$$1-2x-x^2=2-(1+2x+x^2)=2-(1+x)^2\leq 2, \qquad (2)$$

Равенство во (2) важи ако и само ако $1+x=0$. Според тоа, почетната равенка има решенија ако и само ако

$$\operatorname{tg}^2(x+y)+\operatorname{ctg}^2(x+y)=2 \quad \text{и} \quad 1-2x-x^2=2,$$

т.е. $\operatorname{tg}(x+y)=\operatorname{ctg}(x+y)$ и $x=-1$. Од првата равенка добиваме $\operatorname{tg}(x+y)=\pm 1$, т.е. $x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ и како $x=-1$, добиваме дека решенијата на дадената равенка се $x=-1$, $y=\frac{\pi}{4}+1+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

9. Реши ја равенката

$$\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x=2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x. \qquad (1)$$

Од $\cos^5 x\leq\cos^2 x$ и $\sin^5 x\leq\sin^2 x$ следува дека

$$\sin^5 x+\cos^5 x\leq\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

и како $2-\sin^4 x\geq 1$, добиваме дека равенката (1) е еквивалентна на системот равенки:

$$\begin{cases}\sin^5 x+\cos^5 x=1\\ 2-\sin^4 x=1\end{cases} \qquad (2)$$

Од втората равенка на системот (2) имаме $\sin x=\pm 1$. Ако $\sin x=-1$, тогаш $\cos^5 x=2$ што не е можно. Затоа $\sin x=1$ и притоа добиваме $\cos^5 x=0$, од каде следува $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, за $k\in\mathbb{Z}$.

10. Реши ја равенката

$$\sqrt{1+3\sin^3 x}=3-\sqrt{1-\cos^4 x}.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во видот

$$\sqrt{1+3\sin^3 x}+\sqrt{1-\cos^4 x}=3.$$

Имаме $\sin x\leq 1$, па затоа $\sin^3 x\leq 1$, односно $1+3\sin^3 x\leq 4$. Понатаму, $\cos x\geq 0$, т.е. $-\cos^4 x\leq 0$, па затоа $1-\cos^4 x\leq 1$. Според тоа,

$$3=\sqrt{1+3\sin^3 x}+\sqrt{1-\cos^4 x}\leq\sqrt{4}+\sqrt{1}=3,$$

од каде следува дека

$$1+3\sin^3 x=4 \text{ и } 1-\cos^4 x=1,$$

односно $\sin x=1$ и $\cos x=0$, па затоа $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

11. Определи го најмалото позитивно решение на равенката

$$\sin \pi x^2 + \sin 2\pi x = \sin \pi(x^2 + 2x) .$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\sin \pi x^2 + \sin 2\pi x - \sin \pi(x^2 + 2x) = 0$$

$$2\sin \tfrac{\pi(x^2+2x)}{2} \cos \tfrac{\pi(x^2-2x)}{2} - 2\sin \tfrac{\pi(x^2+2x)}{2} \cos \tfrac{\pi(x^2+2x)}{2} = 0$$

$$4\sin \tfrac{\pi(x^2+2x)}{2} \sin \tfrac{\pi x^2}{2} \sin \pi x = 0.$$

Бидејќи $\sin \frac{\pi(x^2+2x)}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 2k \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+2k},\ k \in \mathbb{N}_0$, заклучуваме дека најмалото позитивни решение на $\sin \frac{\pi(x^2+2x)}{2} = 0$ е $\sqrt{3}-1$. Аналогно најмалs-те позитивни решенија на $\sin \frac{\pi x^2}{2} = 0$ и $\sin \pi x = 0$ се $\sqrt{2}$ и 1. Според тоа, најмалото позитивно решение на дадената равенка е $\sqrt{3}-1$.

12. Реши ја равенката

$$\text{tg}(x+y) + \text{ctg}(x-y) = \text{tg}(x-y) + \text{ctg}(x+y)$$

и скицирај го множеството нејзини решенија.

Решение. За да се $\text{tg}(x+y)$ и $\text{tg}(x-y)$ дефинирани, не смее да биде $x \pm y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. За да се $\text{ctg}(x-y)$ и $\text{ctg}(x+y)$ дефинирани не смее да биде $x \pm y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Од овде следува дека $x \pm y \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Дадената равенка последователно ја трансформираме на следниов начин

$$\text{tg}(x+y) + \text{ctg}(x-y) = \text{tg}(x-y) + \text{ctg}(x+y)$$

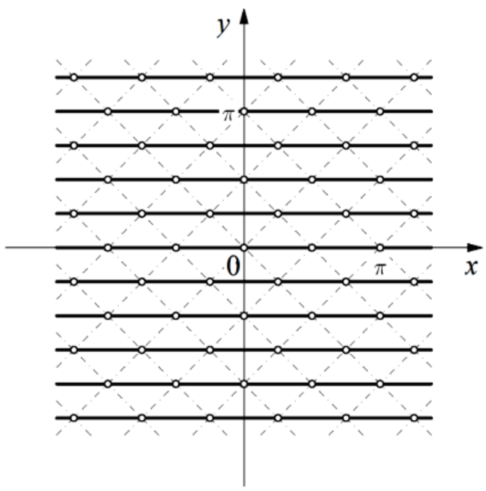
$$\text{ctg}(x-y) - \text{tg}(x-y) = \text{ctg}(x+y) - \text{tg}(x+y)$$

$$\tfrac{\cos(x-y)}{\sin(x-y)} - \tfrac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \tfrac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} - \tfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$\tfrac{\cos^2(x-y) - \sin^2(x-y)}{\sin(x-y)\cos(x-y)} = \tfrac{\cos^2(x+y) - \sin^2(x+y)}{\sin(x+y)\cos(x+y)}$$

$$\tfrac{\cos(2x-2y)}{\sin(2x-2y)} = \tfrac{\cos(2x+2y)}{\sin(2x+2y)}$$

$$\text{ctg}(2x-2y) = \text{ctg}(2x+2y).$$



Според тоа, $2x + 2y = 2x - 2y + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, односно $y = \frac{m\pi}{4},\ m \in \mathbb{Z}$. Условот кој на почетокот го определивме преминува во $x \neq \pm \frac{m\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, односно за парно m имаме $x \neq \frac{l\pi}{2},\ l \in \mathbb{Z}$, а за непарно m имаме $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2},\ l \in \mathbb{Z}$. Конечно, множеството решенија е

$$\{(x, \tfrac{k\pi}{2}) \mid k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{l\pi}{2} \mid l \in \mathbb{Z}\}\} \cup \{(x, \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k\pi}{2}) \mid k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{l\pi}{2} \mid l \in \mathbb{Z}\}\} .$$

Множеството решенија е прикажано на горниот цртеж.

13. Реши ја равенката $\cos^n x - \sin^n x = 1$, каде n природен број.

Решение. За $n=1$, равенката последователно е еквиваленsна на равенките

$$\cos x-\sin x=1$$

$$\cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2}-2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}=\sin^2\tfrac{x}{2}+\cos^2\tfrac{x}{2}$$

$$2\sin\tfrac{x}{2}(\sin\tfrac{x}{2}+\cos\tfrac{x}{2})=0.$$

Значи, $\sin\frac{x}{2}=0$ или $\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{2}$, па решенија се $x=2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

За $n=2$, равенката е еквивалентна на равенката $\cos^2 x-\sin^2 x=1$, т.е. на равенката $\cos 2x=1$, чии решенија се $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Нека $n>2$ и нека $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0$. Да забележиме дека во тој случај $|\cos x|,|\sin x|\in(0,1)$ и дека $|\cos x|^n<\cos^2 x, |\sin x|^n<\sin^2 x$. Тогаш

$$\cos^n x-\sin^n x\leq|\cos^n x-\sin^n x|\leq|\cos x|^n+|\sin x|^n<\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

што е противречност, па затоа не е точно дека $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0$ не е точна, што значи дека за $n>2$, мора барем една од функциите да прима вредност 0.

Ако n е парен број, тогаш равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$ има решение за $\sin x=0$ $\cos x=\pm 1$, а тоа е можно само за $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ и тоа се истите решенија како во случајот кога $n=2$.

Ако n е непарен број, равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$ има решение во случај кога $\cos x=1$, $\sin x=0$ или $\cos x=0$, $\sin x=-1$. Притоа се добиваат истите решенија како во случајот кога $n=1$, т.е. $x=2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

14. Реши ја равенката

$$2\cos(\tfrac{\pi}{2}(1+x))=x^2+\tfrac{1}{x^2}.$$

Решение. Имаме $2\cos(\frac{\pi}{2}(1+x))\leq 2$ и $x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2$, па затоа мора да важи $x^2+\frac{1}{x^2}=2$, од каде добиваме $x-\frac{1}{x}=0$, т.е. $x=\pm 1$. Ако $x=1$, тогаш $2\cos(\frac{\pi}{2}(1+x))=2\cos\pi=-2$, што значи дека во овој случај немамерешение на почетната равенка. Ако $x=-1$, тогаш $2\cos(\frac{\pi}{2}(1+x))=2\cos 0=2$, што значи дека $x=-1$ е единствено решение на почетната равенка.

15. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^2+6x\cos(xy)+9=0.$$

Решение. Равенката ја трансформираме во обликот

$$(x+3\cos(xy))^2+(3\sin(xy))^2=0.$$

Последното е можно ако и само ако $x+3\cos(xy)=0,\ \sin(xy)=0$. Од $\sin(xy)=0$ и основниот тригонометриски идентитет следува $\cos(xy)=\pm 1$, т.е. следува системот

$$\begin{cases} x+3\cos(xy)=0 \\ \cos(xy)=\pm 1 \end{cases}.$$

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. Ако $\cos(xy)=1$, тогаш од првата равенка добиваме $x+3=0$, односно $x=-3$. Според тоа, $\cos(-3y)=1$, т.е. $\cos(3y)=1$ од каде добиваме $y=\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. Значи, решенија во овој случај се $\{(-3,\frac{2k\pi}{3})\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Случај 2. Ако $\cos(xy)=-1$. Тогаш од првата равенка добиваме $x-3=0$, односно $x=3$. Според тоа, $\cos(3y)=-1$, т.е. $3y=(2k+1)\pi$, од каде добиваме $y=\frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. Значи, решенија во овој случај се $\{(3,\frac{(2k+1)\pi}{3})\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Конечно, решенија на равенката се $\{(-3,\frac{2k\pi}{3})\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(3,\frac{(2k+1)\pi}{3})\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

16. Реши ја равенката

$$(3\sin x+\sqrt{3}\cos x+5y)^2=37(1+y^2).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}3\sin x+\sqrt{3}\cos x&=3(\sin x+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos x)=3(\sin x+\operatorname{tg}30^\circ\cos x)\\&=\tfrac{2\cdot 3}{\sqrt{3}}\sin(x+30^\circ)=2\sqrt{3}\sin(x+30^\circ)=2\sqrt{3}t.\end{aligned}$$

Заменувајќи го овој резултат во равенката добиваме:

$$\begin{aligned}&(2\sqrt{3}t+5y)^2=37(1+y^2),\\&12t^2+20\sqrt{3}ty+25y^2=37+37y^2,\\&12y^2-20\sqrt{3}ty-12t^2+37=0,\\&y_{1/2}=\tfrac{10\sqrt{3}\pm\sqrt{300t^2+144t^2-444}}{12},\\&y_{1/2}=\tfrac{1}{6}(5\sqrt{3}t\pm\sqrt{111(t^2-1)}.\end{aligned}$$

Бидејќи $t=\sin(x+30^\circ)$, т.е. $|t|\leq 1$, заклучуваме дека равенката има реални решенија само ако $t=1$ или $t=-1$, од што следува: $y_{1/2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}t$.

Ако $t=1$, т.е. $\sin(x+30^\circ)=1$, тогаш:

$$x+30^\circ=90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ x=60^\circ+k\cdot 360^\circ,\ y=\tfrac{5\sqrt{3}}{6},$$

ако $t=-1$, тогаш $x=240^\circ+k\cdot 360^\circ$, $y=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Следствено, решенијата на равенката се:

$$x=60^\circ+k\cdot 360^\circ,\ y_1=\tfrac{5\sqrt{3}}{6},\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$x=240^\circ+m\cdot 360^\circ,\ y_2=-\tfrac{5\sqrt{3}}{6},\ (m\in\mathbb{Z}).$$

17. Реши ја равенката

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}+\cos^2 x}+\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sin^2 x}=2.$$

Решение. *Прв начин.* Со квадрирање на равенката добиваме:

$$\tfrac{1}{2}+\cos^2 x+\tfrac{1}{2}+\sin^2 x+2\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\cos^2 x)(\tfrac{1}{2}+\sin^2 x)}=4$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\cos^2 x)(\tfrac{1}{2}+\sin^2 x)}=1.$$

Со уште едно квадрирање и средување имаме:

$$\cos^2 x\sin^2 x=\tfrac{1}{4}$$
$$4\cos^2 x\sin^2 x=1$$
$$2\sin x\cos x=\pm 1$$
$$\sin 2x=\pm 1$$

Оттука:

$$2x=\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \text{т.е. } x=(2k+1)\tfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Втор начин. Со квадрирање и средување добиваме:

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\cos^2 x)(\tfrac{1}{2}+\sin^2 x)}=1$$
$$(\tfrac{3}{2}-\sin^2 x)(\tfrac{1}{2}+\sin^2 x)=1$$
$$4\sin^4 x-4\sin^2 x+1=0$$
$$(2\sin^2 x-1)^2=0$$
$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2},\ \sin x=\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x=\tfrac{\pi}{4}+m\tfrac{\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Трет начин. Со квадриарање и средување имаме:

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\cos^2 x)(\tfrac{1}{2}+\sin^2 x)}=1 \qquad /^2,$$
$$(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1+\cos 2x}{2})(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1-\cos 2x}{2})=1$$
$$(2+\cos 2x)(2-\cos 2x)=4, \qquad 4-\cos^2 2x=4$$
$$\cos^2 2x=0,\ \cos 2x=0 \qquad x=\tfrac{\pi}{4}+k\tfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

18. Да се реши равенката

$$\sin^2 x\sin^2 2x+\sin^2 3x=1. \qquad (1)$$

Решение.Користејќи ја формулата

$$\sin^2\alpha=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

равенката (1) се трансформира во

$$2-\cos 2x-\cos 4x+2\cos^2 3x=2, \qquad (2)$$

а потоа, имајќи предвид дека

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},$$

од (2) добиваме

$$-2\cos 3x\cos x+2\cos^2 3x=0,$$

т.е.

$$(-\cos x+\cos 3x)\cos 3x=0. \qquad (3)$$

Бидејќи $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$, равенката (3) добива вид

$$\sin x \sin 2x \cos 3x = 0,$$

па

$$\sin x = 0,\ \sin 2x = 0,\ \cos 3x = 0. \qquad (4)$$

Решенијата на првата, втората, третата равенка од (4) се соодветно:

$$x = k\pi, \quad x = k\tfrac{\pi}{2}, \quad x = (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z}), \qquad (5)$$

па тоа се сите решенија на дадената равенка (1).

19. Одреди ја најголемата вредност на функцијата $f(x) = 3 - 2x - x^2$ на множеството решенија на равенката $2\cos^2 x + \cos 4x = 0$.

Решение. Да го одредиме прво множеството на решенија на равенката. Користејќи ја тригонометриската трансформација $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, равенката се сведува до облик $1 + \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$, односно $\cos 2x + 2\cos^2 2x = 0$. Последното е еквивалентно со $\cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$, а решенијата тогаш се добиваат од

1) $\cos 2x = 0 \iff 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \iff x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, за $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos 2x = -\frac{1}{2} \iff 2x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3} \iff x = k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$. Последното може заради произволноста на $k \in \mathbb{Z}$ да се запишше во облик $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

Значи множеството решенија на равенката е зададено со

$$M = \{(2k+1)\tfrac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi \pm \tfrac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = 3 - 2x - x^2$. За неа е точно дека темето и е во точка $T(-1,4)$, истата расте на интервалот $(-\infty,-1)$, а опаѓа на $(-1,\infty)$. Тогаш за најголемата вредност на множеството М, функцијата ќе ја разгледуваме како растечка функција на $M \cap (-\infty,-1)$, а потоа како опаднувачка на $M \cap (-1,\infty)$. На $M \cap (-\infty,-1)$, точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{3}$, а на $M \cap (-1,\infty)$ точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{4}$. Останува да се споредат уште $f(-\frac{\pi}{3}) = 3 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4}$ и $f(-\frac{\pi}{4}) = 3 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$. Бидејќи $f(-\frac{\pi}{3}) > f(-\frac{\pi}{4})$, најголемата вредност на функцијата на множеството решенија на равенката се достигнува во $-\frac{\pi}{3}$ и изнесува $f(-\frac{\pi}{3}) = 3 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4}$.

20. Реши ја равенката: $\frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2} + \frac{\sin^2(x-y)}{2}$.

Решение. Бидејќи $\cos^2\frac{x-y}{2} = \frac{1+\cos(x-y)}{2}$ и $\sin^2(x-y) = 1 - \cos^2(x-y)$ равенката можеме да ја трансформираме во следната

$$\cos^2(x-y) + (2 - \sqrt{3+2x-x^2})\cos(x-y) + 2 - \sqrt{3+2x-x^2} = 0. \qquad (1)$$

Да ставиме $t = \cos(x-y)$ и $s = 2 - \sqrt{3+2x-x^2}$. Тогаш ја добиваме равенката

$t^2+ts+s=0$, т.е. $(t+\frac{s}{2})^2=\frac{s^2-4s}{4}$. Последнота равенка има решение само ако $s^2-4s\geq 0$, т.е. $s\leq 0$ или $s\geq 4$. Но

$$3+2x-x^2=-(x^2-2x+1)+1+3=4-(x-1)^2\leq 4,$$

па $s\geq 2-\sqrt{4}=0$. Од друга страна $s=2-\sqrt{3+2x-x^2}\leq 2$, па не е можно $s\geq 4$. Значи, $s=0$. Од $0=2-\sqrt{3+2x-x^2}$ добиваме $x=1$. Заменувајќи во (1) ја добиваме равенката $\cos^2(1-y)=0$. Нејзино решение е $y-1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ односно $y=1+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Значи решенијата на почетната равенка се паровите (x,y) од обликот $(1,1+\frac{\pi}{2}+k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}$.

21. Реши ја равенката

$$\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^2 x.$$

Решение. *Прв начин.* Равенката е еквивалентна со

$$\sin^2 4x-2\sin 4x\cos^2 x+\cos^4 x=\cos^4 x-\cos^2 x,$$

т.е.

$$(\sin 4x-\cos^2 x)^2=\cos^2 x(\cos^2 x-1).$$

Десната страна е ненегативен број а левата е непозитивен па равенство е можно ако $\sin 4x-\cos^2 x=0$ и $\cos^2 x(\cos^2 x-1)=0$. Од втората равенка добиваме $\cos x=0$ или $\cos x=1$ или $\cos x=-1$.

Ако $\cos x=0$ добиваме $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ и тоа ја задоволува и првата равенка;

Ако $\cos x=1$ следува $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ но тоа не ја задоволува првата равенка;

Ако $\cos x=-1$ тогаш $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ но и тоа не ја задоволува првата равенка.

Конечно решение на почетната равенка се броевите $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Втор начин. Да ја запишеме равенката во следниот облик

$$\sin^2 4x-2\sin 4x\cos^2 x+\cos^2 x=0.$$

Оваа равенка можеме да ја разгледуваме како квадратна по $\sin 4x$ и таа има реално решение ако нејзината дискриминанта е ненегативна, т.е. $4\cos^4 x-4\cos^2 x\geq 0$ или $\cos^4 x\geq\cos^2 x$.

1) $\cos x=0$, тогаш $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, па тоа е решение на равенката;

2) $\cos x\neq 0$ можеме да ја поделиме неравенката со $\cos x$ и добиваме $\cos^2 x\geq 1$. Ова е можно само ако $\cos x=\pm 1$ или $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Но со замена во почетната равенка добиваме $1=0$ што е контрадикција.

Според тоа решенија на почетната равенка се броевите $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Трет начин. Нека $\sin 4x\cos x\neq 0$. Равенката да ја поделиме со $\sin 4x\cos x$ и добиваме $\frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2\sin 4x\cos x}=\cos x$. Од друга страна важи неравенството

$\frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2|\sin 4x|\cdot|\cos x|} \geq 1$ се добива од $(\sin 4x-\cos x)^2 \geq 0$ и $(\sin 4x+\cos x)^2 \geq 0$), и равенство се достигнува за $|\sin 4x|=|\cos x|$.

Ако $\sin 4x \in (0,1]$ и $\cos x \in (0,1]$ добиваме

$$\cos x = \frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2\sin 4x\cos x} = \frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2|\sin 4x|\cdot|\cos x|} \geq 1 \geq \cos x$$

па $\cos x = 1$. Тогаш $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ но со проверка добиваме дека не е решение на равенката.

Ако $\sin 4x \in (0,1]$ и $\cos x \in [-1,0)$ имаме $|\sin 4x| = \sin 4x$ и $\cos x = -|\cos x|$ па важи

$$\cos x = \frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2\sin 4x\cos x} = -\frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2|\sin 4x|\cdot|\cos x|} \leq -1 \leq \cos x,$$

и сега $\cos x = -1$. Тогаш $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ но и ова не е решение на почетната равенка.

Ако $\sin 4x \in [-1,0)$ и $\cos x \in (0,1]$ слично добиваме $\cos x = -1$.

Ако $\sin 4x \in [-1,0)$ и $\cos x \in [-1,0)$ имаме

$$\cos x = \frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2\sin 4x\cos x} = \frac{\sin^2 4x+\cos^2 x}{2|\sin 4x|\cdot|\cos x|} \geq 1 \geq \cos x,$$

па заклучокот е ист како во првиот случај.

Останува $\sin 4x = 0$ или $\cos x = 0$. Ако $\sin 4x = 0$ тогаш од почетната равенка добиваме дека и $\cos x = 0$ па $x = (2l+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$. За овие вредности на x исполнето е и равенството $\sin 4x = 0$. Аналогно заклучуваме и ако $\cos x = 0$. Според тоа решение на равенката се броевите од облик $x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

22. Реши ја равенката $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

Решение. Десната страна на равенството, според формулата за двоен агол, можеме да го запишеме во облик $\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$, па според тоа, равенката ќе го добие обликот

$$2\sin x\sin 2x\sin 3x = \sin 2x\cos 2x,$$

$$2\sin x\sin 2x\sin 3x - \sin 2x\cos 2x = 0,$$

$$\sin 2x(2\sin x\sin 3x - \cos 2x) = 0.$$

Ако го искористиме идентитетот $2\sin x\sin 3x = \cos 2x - \cos 4x$ и замениме во последната равенка, добиваме

$$\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0, \text{ т.е. } \sin 2x\cos 4x = 0.$$

Од последната равенка, добиваме $\sin 2x = 0,\ 2x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ или $\cos 4x = 0,$ $4x = p\pi + \frac{\pi}{2},\ p \in \mathbb{Z}$.

Значи, решенија на равенката се $x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ и $x_p = \frac{p\pi}{4} + \frac{\pi}{8},\ p \in \mathbb{Z}$.

23. Да се докаже дека целобројните решенија на равенката

$$\cos 2\pi x = \cos \pi x^2$$

се парни броеви.

Решение. Решенијата на равенката го задоволуваат условот $\pi x^2 \pm 2\pi x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Според тоа, решенијата на равенката се решенија на квадратната равенка

$$x^2 - 2x - 2k = 0.$$

Решенијата на последната равенка се

$$x_{1/2} = \pm 1 \pm \sqrt{1+2k}.$$

Решението x е цел број ако и само ако $\sqrt{1+2k}$ е цел број. Бројот $1+2k$ е непарен број, па според тоа $\sqrt{1+2k}$ е непарен број, од каде добиваме дека x е парен број.

24. Реши ја равенката $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Решение. Дефиниционата област на равенката $x \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0] \cup [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, па можеме да ставиме смена $x = \sin t$, каде $t \in (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Тогаш ја добиваме равенката $\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sin^3 t - 3\sin t$. Од друга страна

$$\sin 3t = \sin(2t+t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t = 2\sin t \cos^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)\sin t$$

$$= 3\sin t \cos^2 t - \sin^3 t = 3\sin t(1-\sin^2 t) - \sin^3 t = -4\sin^3 t + 3\sin t.$$

Според тоа почетната равенка се трансформира во $|\cos t| = -\sin 3t$. Заради $\cos t \geq 0$ за $t \in (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ и $\sin(-t) = -\sin t$ ја добиваме равенката

$$\cos t = \sin(-3t).$$

Натаму $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$, па имаме $\sin(-3t) - \sin(\frac{\pi}{2} - t) = 0$. Ако десната страна ја трансформираме со примена на тригонометриската формула за разлика од синуси добиваме

$$2\cos(-2t + \tfrac{\pi}{4})\sin(-t - \tfrac{\pi}{4}) = 0.$$

Според тоа, $\cos(-2t + \frac{\pi}{4}) = 0$, па затоа $-2t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Оттука $t = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. Бидејќи $t \in (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ добиваме $t_1 = -\frac{\pi}{8}$ или $t_2 = \frac{3\pi}{8}$ (за $k = 0$ или $k = 1$). Натаму имаме

$$x_1 = \sin t_1 = \sin(-\tfrac{\pi}{8}) = -\sin\tfrac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ и}$$

$$x_2 = \sin t_2 = \sin\tfrac{3\pi}{8} = \sin(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{8}) = \cos\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Слично, од $\sin(-t - \frac{\pi}{4}) = 0$ следува $-t - \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Оттука $t = -\frac{\pi}{4} - k\pi$. Бидејќи $t \in (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ добиваме $t_3 = -\frac{\pi}{4}$ (за $k = 0$), па затоа

$$x_3 = \sin t_3 = \sin(-\tfrac{\pi}{4}) = -\sin\tfrac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Така, решенија на дадената равенка се x_1, x_2 и x_3.

25. За кои вредности на a равенката

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

има единствено решение?

Решение. Од дадената равенка и од $\sin^2 ax \geq 0$, $\cos x \leq 1$, добиваме $\sin^2 ax = 0$ и $\cos x = 1$, од каде што се добива дека $ax = k\pi$, $x = 2k\pi$, каде што k и m се цели броеви.

Ако a е ирационален број, тогаш од $a \cdot 2m = k$ се добива $m = k = r$, па дадената тригонометриска равенка ќе го има единственото решение $x = 0$.

Ако a е рационален број, од $ax = k\pi$ и $x = 2m\pi$, јасно дека равенката ќе има бесконечно многу решенија.

Според тоа, равенката ќе има единствено решение ако a е ирационален број.

26. За кои вредности на параметарот a равенката

$$\sin bx \sin cx = \sin^2(\tfrac{b+c}{2}x) + a$$

има решенија.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\cos(b-c)x - \cos(b+c)x = 1 - \cos(b+c)x + 2a,$$

$$\cos(b-c)x = 1 + 2a. \qquad (1)$$

Од својствата на тригонометриските функции, за да равенката (1) има решение, потребно и доволно е да $-1 \leq 1 + 2a \leq 1$, т.е. $-1 \leq a \leq 0$.

Значи, равенката има решение ако и само ако $a \in [-1, 0]$.

27. Определи ги вредностите на параметарот λ за кои равенката

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \lambda$$

има решение x во интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$.

Решение. За $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos x$, $\sin x > 0$, па затоа $\lambda > 0$. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \lambda$. Последната равенка ја квадрираме и ја добиваме равенката $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x \cos x)^2} = \lambda^2$, т.е. равенката $\frac{4(1+\sin 2x)}{\sin^2 2x} = \lambda^2$.

Според тоа

$$\lambda^2 (\sin 2x)^2 - 4\sin 2x - 4 = 0.$$

Воведуваме смена $\sin 2x = t$ и ја добиваме квадратната равенка $\lambda^2 t^2 - 4t - 4 = 0$, чии решенија се $t_{1/2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}$. За $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin 2x > 0$, па според тоа треба да го избереме решението $t_1 = \frac{2+2\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}$.

Бараните вредности за λ се решенија на неравенката $\frac{2+2\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2} \leq 1$, од каде наоѓаме дека $\lambda \geq 2\sqrt{2}$.

28. Определи ги сите целобројни вредности на параметарот a, за кои равенката

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = a \qquad (1)$$

има реални решенија, а потоа реши ја за најмалата позитивна вредност на параметарот a.

Решение. Равенката (1) може да се напише во обликот

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = a(\sin^2 x + \cos^2 x) \qquad (2)$$

За $x = k\pi$ добиваме $a = \pm 3$. За $x \neq k\pi$ равенката (2) е еквивалентна со равенката

$$(3-a)\mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg} x + 5 - a = 0, \qquad (3)$$

која што има реални решенија за $D = -a^2 + 8a - 11 \geq 0$, т.е. за $a \in [4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}]$, од каде што се добива дека $a \in \{2,3,4,5,6\}$.

Значи, равенката (1) има реални решенија за $a \in \{-3,2,3,4,5,6\}$.

29. За кои вредности на параметарот a равенката

$$\cos(mx + \tfrac{\pi}{6})\cos(mx - \tfrac{\pi}{6}) = a$$

има решение. За најдените вредности на a кои се решенијата на равенката?

Решение. Користејќи го идентитетот

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\tfrac{1}{2}[\cos(mx + \tfrac{\pi}{6} + mx - \tfrac{\pi}{6}) + \cos(mx + \tfrac{\pi}{6} - mx + \tfrac{\pi}{6})] = a,$$

$$\cos 2mx + \cos\tfrac{2\pi}{6} = 2a,$$

$$\cos 2mx = 2a - \tfrac{1}{2} = \tfrac{4a-1}{2}.$$

Равенката $\cos 2mx = \frac{4a-1}{2}$ има решение само ако $-1 \leq \frac{4a-1}{2} \leq 1$, односно $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$. Во тој случај решенија се $2mx = \arccos\frac{4a-1}{2}$, односно $x = \frac{1}{2m}\arccos\frac{4a-1}{2}$.

30. Најди ги сите позитивни решенија на равенката $x^2 + 2x\sin(ax) + 1 = 0$, каде a е реален параметар.

Решение. Нека x е позитивно решение на равенката. Бидејќи $x > 0$, равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\tfrac{x^2+1}{2x} = -\sin(ax)$$

За $x > 0$ не е тешко да се докаже дека $\frac{x^2+1}{2x} \geq 1$ и равенство се достигнува ако и само ако $x^2 = 1$, т.е. $x = 1$. Од друга страна $|\sin ax| \leq 1$. Според тоа,

$$\tfrac{x^2+1}{2x} = -\sin(ax)$$

ако и само ако $x = 1$, и $\sin a = -1$. Значи равенката има решение $x = 1$ за $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

31. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$2 \cdot 2^{\cos 2x} - a \cdot 2^{\cos^2 x} = 2$$

има решение.

Решение. Ставаме $t = 2^{\cos^2 x}$. Тогаш $1 \le t \le 2$ и од $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ следува дека дадената равенка има решение ако и само ако равенката $f(t) = t^2 - at - 2 = 0$ има решение во затворениот интервал $[1,2]$. За секој a последната равенка има две реални решенија со различни знации условот е исполнет кога $f(1) \le 0 \le f(2)$. Оттука добиваме дека $a \in [-1,1]$.

32. Одреди го множеството решенија на равенката

$$5^x + 5^{-x} + 1 = 3\cos^2 y .$$

Решение. Бидејќи за секој $x \in \mathbb{R}$ важат неравенствата $5^x > 0$ и $5^{-x} > 0$, од неравенството $a + \frac{1}{a} \ge 2$, за $a > 0$, при што знакот за равенство важи ако и само ако $a = 1$, заклучуваме дека

$$5^x + 5^{-x} + 1 \ge 3 . \qquad (1)$$

Слично, од условот $\cos^2 y \le 1$ имаме

$$3\cos^2 y \le 3 . \qquad (2)$$

Неравенките (1) и (2) истовремено се задоволени ако и само ако

$$5^x = 1 \text{ и } \cos^2 y = 1 .$$

Оттука следува дека $x = 0$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Следствено, бараното множество решенија е: $M = \{(0, k\pi) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

33. Пресметај $\cos 2\alpha$, ако α е решение на равенката

$$\mathrm{tg}^2 x - a\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0, \quad a > 0 .$$

Решение. Ако α е решение на равенката $\mathrm{tg}^2 x - a\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$, тогаш

$$\mathrm{tg}^2 \alpha - a\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1 = 0 ,$$

$$\frac{\sin^2\alpha - a\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 .$$

$$1 - a\sin\alpha\cos\alpha = 0 ,$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{a} .$$

Бидејќи $\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}$, имаме $\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{a^2}}$.

34. Реши ја равенката:

$$\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x .$$

Решение. Ако ставиме $\log_3 x = y$, тогаш $x = 3^y$, па равенката го добива видот:

$$\log_2(1 + \sqrt{3^y}) = y, \text{ т.е. } 2^y = 1 + \sqrt{3^y}$$

Оттука $(\frac{\sqrt{3}}{2})^y + (\frac{1}{2})^y = 1$. Ставајќи $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$, $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$ имаме

$$(\sin 60^{\circ})^{y}+(\cos 60^{\circ})^{y}=1.$$

Последното равенство е можно само за $y=2$. Значи, $\log_3 x=2$, т.е. $x=9$.

35. Во множеството реални броеви x и y реши ја равенката

$$\log_2(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)})=\frac{1}{y^2-2y+2}$$

Решение. За да биде изразот на левата страна добро дефиниран треба $xy\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$. Бидејќи $\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\geq 2$ следува дека

$$\log_2(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)})\geq\log_2 2=1.$$

Но $\frac{1}{y^2-2y+2}=\frac{1}{(y-1)^2+1}\leq 1$, па равенство ќе важи само ако $\cos(xy)=\frac{1}{\cos(xy)}$ и $\frac{1}{(y-1)^2+1}=1$. Од втората равенка имаме $y=1$, а од првата $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Значи, решенија се сите парови $(k\pi,1)$, каде што $k\in\mathbb{Z}$.

36. Реши ја равенката

$$2^{|x|}-\cos y+\lg(1+x^2+|y|)=0.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)=\cos y.$$

За произволни $x,y\in\mathbb{R}$, имаме $|x|\geq 0$ и $1+x^2+|y|\geq 1$, од каде следуваат неравенствата $2^{|x|}\geq 1$, $\lg(1+x^2+|y|)\geq 0$, $\cos y\leq 1$. Според тоа

$$\cos y\leq 1\leq 2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|). \tag{1}$$

Во (1) знак за равенство важи ако и само ако $\cos y=1$ и $2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)=1$. Од равенката $\cos y=1$, добиваме дека решенија се $y=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Понатаму, бидејќи $2^{|x|}\geq 1$ и $\lg(1+x^2+|y|)\geq 0$ од $2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)=1$ следува

$$2^{|x|}=1, \tag{2}$$

$$\lg(1+x^2+|y|)=0. \tag{3}$$

Сега од (2) добиваме $|x|=0$, односно $x=0$, па затоа од (3) следува $1+|y|=1$, односно $y=0=0+0\cdot 2\pi$.

Конечно, единствено решениа на почетната равенка е $x=y=0$.

37. Да се најдат сите вредности на m од интервалот $(-1,1)$ за кои равенката

$$4^{\sin x}+m2^{\sin x}+m^2-1=0$$

има решенија.

Решение. Да ставиме $y=2^{\sin x}$. Така ја добиваме равенката

$$y^2+my+m^2-1=0. \tag{1}$$

Дискриминантата $D=4-3m^2$ на равенката (1) за $m\in(-1,1)$ е позитивна, што значи дека за секој $m\in(-1,1)$ равенката (1) има реални решенија. Решенијата се

$$y_{1/2}=\frac{-m\pm\sqrt{4-3m^2}}{2}.$$

Од $y=2^{\sin x}>0$ следува дека решение може да биде само $y_1=\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2}$. За $m\in(-1,1)$ имаме $4-3m^2>m^2$, што значи дека $y_1>0$. Сега $2^{\sin x}=\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2}$, т.е. $\sin x=\log_2\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2}$, па затоа

$$\sin x=\log_2(-m+\sqrt{4-3m^2})-1, \qquad (2)$$

За равенката (2) да има решение, потребно е да биде исполнето

$$-1\le\log_2(-m+\sqrt{4-3m^2})-1\le 1,$$

т.е.

$$1\le -m+\sqrt{4-3m^2})\le 4,$$

а тоа е задоволено за секој $m\in[\frac{-1-\sqrt{13}}{4},\frac{-1+\sqrt{13}}{4}]$. Следствено, дадената равенка има решение за секој $m\in(-1,\frac{-1+\sqrt{13}}{4}]$.

38. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката

$$3^{\cos x}+3^{1-\cos x}=a$$

има точно едно решение во интервалот $[0,\pi]$.

Решение. Воведуваме смена $t=3^{\cos x}$ и ја добиваме равенката $t^2-at+3=0$. Почетната равенка има едно решение во интералот $[0,\pi]$ ако и само ако равенката $f(t)=t^2-at+3=0$ има единствено решение во интервалот $[\frac{1}{3},3]$.

Понатаму, од $D=a^2-12$ добиваме $a=\pm2\sqrt{3}$ и тогаш решенијата се $\pm\sqrt{3}$. Бидејќи $\sqrt{3}\in[\frac{1}{3},3]$, заклучуваме дека $a=2\sqrt{3}$ е решение на задачата.

Ако $t=\frac{1}{3}$ е решение, тогаш $a=\frac{28}{3}$ и тогаш другото решение е $t=9\notin[\frac{1}{3},3]$. Тоа значи дека $a=\frac{28}{3}$ е решение на задачата.

Ако $t=3$ е решение, тогаш $a=4$ и тогаш другото решение е $t=1\in[\frac{1}{3},3]$. Тоа значи дека $a=4$ не е решение на задачата.

Ако решението е во интервалот $(\frac{1}{3},3)$, тогаш треба да биде $f(\frac{1}{3})f(3)<0$, од каде добиваме $a\in(4,\frac{28}{3})$.

Конечно, бараните вредности на параметарот a се $a\in\{2\sqrt{3}\}\cup(4,\frac{28}{3}]$.

39. Реши ја равенката $\log_{\sin x}2\log_{\sin^2 x}a=1$, каде a е реален број.

Решение. Од особините на логаритамската функција имаме

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 \sin x}\frac{\log_2 a}{\log_2 \sin^2 x}=1, \text{ т.е. } \frac{\log_2 a}{2(\log_2 \sin x)^2}=1.$$

Бидејќи $a>0$, равенката го добива обликот

$$(\log_2 \sin x)^2=\log_2 \sqrt{a},$$

$$\log_2 \sin x=\pm\sqrt{\log_2 \sqrt{a}},$$

$$\sin x=2^{\pm\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}}. \qquad (1)$$

Имаме два случаи:

а) $\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}>0$, па според тоа $2^{\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}}>1$, и равенката (1) нема решение.

б) $-\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}\leq 0$, па според тоа $2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}}<1$, и равенката (1) има решение

$$x_1=\arcsin 2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \text{ и } x_2=\pi-\arcsin 2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Ако $a=1$, тогаш $\sin x=1$, што не ги исполнува условите на дефинираност на логаритамската функција.

40. Определи ги решенијата на системот

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0\\ \sin(x-y)=0\end{cases}$$

за кои што важи $0\leq x\leq\pi$ и $0\leq y\leq\pi$.

Решение. Решенија на првата равенка се $x+y=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, а решенија на втората равенка се $x-y=k_1\pi$, $k_1\in\mathbb{Z}$. Според тоа, системот е еквивалентен на системот

$$\begin{cases}x+y=k\pi\\ x-y=k_1\pi\end{cases}, \; k,k_1\in\mathbb{Z}.$$

Решенија на последниот систем се $x=(k+k_1)\frac{\pi}{2}$ и $y=(k-k_1)\frac{\pi}{2}$, $k,k_1\in\mathbb{Z}$. Од условите $0\leq x\leq\pi$ и $0\leq y\leq\pi$, добиваме $0\leq k+k_1\leq 2$ и $0\leq k-k_1\leq 2$. Очигледно е дека можни вредности за k се $k=0,1,2$.

- за $k=0$, добиваме $k_1=0$;
- за $k=1$, можни вредности за k_1 се $k_1=-1,0,1$;
- за $k=2$, добиваме $k_1=0$.

Според тоа, бараните решенија (x,y) се: $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $(\pi,0)$, (π,π).

41. Определи ги решенијата на системот

$$\begin{cases}\cos x=2\cos^3 y,\\ \sin x=2\sin^3 y.\end{cases}$$

за кои што $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Решение. Јасно, $\sin y, \cos y \neq 0$ па затоа важи $\frac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y$ и $\frac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y$. Ако ги собереме последните две равенки добиваме $\frac{\sin x}{\sin y} + \frac{\cos x}{\cos y} = 2$, однсоно $\sin(x+y) = \sin 2y$. Од последната равенка следува $2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+3y}{2} = 0$. Понатаму, од $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, добиваме дека $\frac{x-y}{2} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ и за да $\sin\frac{x-y}{2} = 0$ мора да е $x = y$. Со замена во втората равенка на системот $\sin x = 2\sin^3 x$, па како $\sin x \neq 0$ од последната равенка следува $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, што заедно со $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ дава $x = y = \frac{\pi}{4}$. Од друга страна, од $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, добиваме дека $\frac{x+3y}{2} \in (0, \pi)$ и за да $\cos\frac{x+3y}{2} = 0$ мора да е $x + 3y = \pi$. Според тоа, ако повторно ја искористиме втората равенка на системот, добиваме $\sin 3y = \sin(\pi - 3y) = \sin x = 2\sin^3 y$, т.е. $3\sin y - 4\sin^3 y = 2\sin^3 y$, па затоа $\sin y = 2\sin^3 y$. Сега на потполно ист начин како и погоре добиваме $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $y = \frac{\pi}{4}$, па затоа $x = \pi - 3y = \frac{\pi}{4}$.

42. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y + \cos^2 z = 2 \end{cases}.$$

Решение. Од првата равенка на системот следува дека x и y се со исти знаци. Понатаму, од $0 \leq \cos^2 z \leq 1$, за секој $z \in \mathbb{R}$, следува $x + y = 2 - \cos^2 z \geq 1$. Но, x и y се со исти знаци, па $x + y \geq 1$ заклучуваме дека тие се позитивни. Сега, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и од равенството $xy = 1$, следува $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2$. Од друга страна $x + y = 2 - \cos^2 z \leq 2$, па затоа $x + y = 2$. Според тоа, го добивме системот

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

кој има единствено позитивно решение $x = y = 1$. Сега, од втората равенка на почетниот систем добиваме $\cos^2 z = 0$, чии решенија се $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Конечно решенија на почетниот системот се $\{(1, 1, \frac{\pi}{2} + k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

43. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m \\ x + y = n \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка следува $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = m$ и ако замениме од втората равенка добиваме

$$\cos x \cos y = \frac{\sin n}{m}. \qquad (1)$$

Од друга страна користејќи го идентитетот $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$ и втората равенка на системот добиваме

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos n+\cos(x-y)\right]. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува

$$\frac{\sin n}{m}=\frac{1}{2}\left[\cos n+\cos(x-y)\right],$$

од каде добиваме

$$\cos(x-y)=2\frac{\sin n}{m}-\cos n,$$

односно

$$x-y=2k\pi\pm\arccos(2\frac{\sin n}{m}-\cos n).$$

Од последната равенка и втората равенка на системот го добиваме решението на системот

$$x=k\pi+\frac{n}{2}\pm\arccos(2\frac{\sin n}{m}-\cos n)$$

$$y=-k\pi+\frac{n}{2}\mp\arccos(2\frac{\sin n}{m}-\cos n).$$

Јасно, системот има решение ако и само ако $|2\frac{\sin n}{m}-\cos n|\le 1$.

44. Во зависност од реалниот параметар a реши го системот равенки

$$\begin{cases}3\cdot 2^x+2y-3\arcsin z=7\\ 2^x-y-\arcsin z=-6\\ 5\cdot 2^x-y+\arcsin z=6a+2\end{cases}$$

Решение. Со воведување смената $X=2^x$, $Y=y$, $Z=\arcsin z$, системот станува линеарен по X,Y,Z и неговото решение е $X=a+1$, $Y=5$, $Z=a+2$, па дадениот систем е евивалентен со $2^x=a+1$, $y=5$, $\arcsin z=a+2$. Па, следи дека ако $a\in(-\infty,-1]\cup(\frac{\pi}{2}-2,+\infty)$, системот нема решение, а ако $a\in(-1,\frac{\pi}{2}-2]$, постои единствено решение

$$x=\log_2(a+1),\ y=5,\ z=\sin(a+2).$$

45. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{\sqrt{2}-1}{4}\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3-2\sqrt{2}\end{cases}.$$

Решение. Од втората равенка на системот имаме

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=3-2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\cos x\cos y}=\frac{4}{\sqrt{2}-1}(3-2\sqrt{2})$$

$$\cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}+1}{4}.$$

Значи системот го обликот

$$\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{\sqrt{2}-1}{4}\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}+1}{4}\end{cases}.$$

Ако од првата равенка на последниот систем ја одземеме втората равенка добиваме

$$\cos(x+y)=\tfrac{1}{2}, \qquad (1)$$

а ако двете равенки ги собереме добиваме

$$\cos(x-y)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) имаме,

$$\begin{cases}x+y=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z} \qquad (3)$$

Ако равенките од (3) ги собереме добиваме

$$x=p\pi\pm\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{3}\pm\tfrac{\pi}{4}),\ p\in\mathbb{Z}$$

а ако ги одземеме

$$y=s\pi\pm\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{3}\pm\tfrac{\pi}{4}),\ s\in\mathbb{Z}.$$

46. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases}\cos x-\cos y=\sin(x+y)\\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

Решение. Ќе ги користиме идентитетите

$$\cos x-\cos y=-2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2} \text{ и } \sin(x+y)=2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x+y}{2}.$$

При тоа ќе разгледаме четири случаи и тоа

а) $x>0, y>0$, б) $x<0, y>0$, в) $x<0, y<0$, г) $x>0, y<0$

Случај а) Втората равенка во овој случај го добива обликот $x+y=\frac{\pi}{4}$, при што $x,y\in(0,\frac{\pi}{4})$. Првата равенка го добива обликот

$$-2\sin\tfrac{\pi}{8}\sin\tfrac{x-y}{2}=\sin\tfrac{\pi}{4}=2\sin\tfrac{\pi}{8}\cos\tfrac{\pi}{8},$$

$$\sin\tfrac{y-x}{2}=\sin(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{8}).$$

Од последната равенка имаме $\frac{x-y}{2}=\frac{3\pi}{8}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, односно $y-x=\frac{3\pi}{4}+4k\pi$. Од последната равенка и од равенката $x+y=\frac{\pi}{4}$, добиваме $2y=\pi+4k\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+2k\pi\notin(0,\frac{\pi}{4})$ за $k\in\mathbb{Z}$. Според тоа во овој случај равенката нема решение.

Случај б) Во овој случај втората равенка го добива обликот $-x+y=\frac{\pi}{4}$, односно $y-x=\frac{\pi}{4}$. Првата равенка го добива обликот

$$2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{y-x}{2}=2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x+y}{2},$$

$$\sin\frac{x+y}{2}(\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{x+y}{2})=0.$$

Од последната равенка добиваме $\sin\frac{x+y}{2}=0$ или $\cos\frac{x+y}{2}=\sin\frac{\pi}{8}$. Од равенката $\sin\frac{x+y}{2}=0$ добиваме $\frac{x+y}{2}=k\pi$, односно $x+y=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Од последната равенка и равенката $-x+y=\frac{\pi}{4}$ добиваме $2y=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, т.е. $y=\frac{\pi}{8}+k\pi\in(0,\frac{\pi}{4})$, за $k=0$. За $y=\frac{\pi}{8}$, добиваме $x=-\frac{\pi}{8}$. Од равенката $\cos\frac{x+y}{2}=\sin\frac{\pi}{8}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})$, имаме $\frac{x+y}{2}=\frac{3\pi}{8}+2k\pi$, т.е. $x+y=\frac{3\pi}{4}+4k\pi$. Од последната равенка и равенката $-x+y=\frac{\pi}{4}$ добиваме $2y=\pi+4k\pi$, односно $y=\frac{\pi}{2}+2k\pi\notin(0,\frac{\pi}{4})$, $k\in\mathbb{Z}$. Според тоа во овој случај равенката нема решение.

Случај в) Се разгледува аналогно како и случајот а) и се покажува дека во овој случај равенката нема решение.

Случај г) Се разгледува аналогно како и случајот б) и се покажува единствено решение во овој случај е $x=\frac{\pi}{8}, y=-\frac{\pi}{8}$.

47. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\cos^2(\frac{\pi x}{2})-\cos(\pi yz)+1=0\\ x^2y^2z+z+10=0.\end{cases}$$

Решение. Бидејќи $\cos^2(\frac{\pi x}{2})\geq 0$ и $1-\cos(\pi yz)\geq 0$, од првата равенка следува дека $\cos\frac{\pi x}{2}=0$ и $\cos(\pi yz)=1$. Според тоа, $x=2p+1$ и $yz=2q$, каде $p,q\in\mathbb{Z}$.

Ако $q=0$, тогаш од втората равенка на системот следува $z=-10$, па сега повторно од втората равенка на системот следува дека $y=0$. Според тоа, во овој случај решенијата на системот се $(x,y,z)=(2p+1,0,-10)$, $p\in\mathbb{Z}$.

Ако $q\neq 0$, тогаш во втората равенка на системот ставаме $x=2p+1$ и $y=\frac{2q}{z}$ и ја добиваме равенката $z^2+10z+4(2p+1)^2q^2=0$. Последната равенка има реални решенија ако $100-16(2p+1)^2q^2\geq 0$, т.е. $(2(2p+1)q)^2\leq 25$. Оттука следува дека $|2p+1|=1$ и $q=\pm1$ или $q=\pm2$. Во овие случаи решенијата се

$$(x,y,z)=(\pm1,\frac{2q}{-5\pm\sqrt{25-4q^2}},-5\pm\sqrt{25-4q^2}).$$

48. Во множеството реални броеви реши го системот:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}}=\sqrt{\frac{20x}{x+y}}\\ \sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{20y}{x+y}}.\end{cases}$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})\geq(|\sin x\cos x|+\frac{1}{|\sin x\cos x|})^2$$
$$=(\frac{|\sin 2x|}{2}+\frac{1}{2|\sin 2x|}+\frac{3}{2|\sin 2x|})^2$$
$$\geq(1+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$$

и аналогно

$$(\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y})(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y})\geq\frac{25}{4}.$$

Ако ги помножиме равенките на системот добиваме

$$(\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}})(\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}})=2\sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}}.$$

Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека левата страна на последното равенство е поголема или еднаква на

$$2\sqrt{\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}\sqrt{\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}}}\cdot 2\sqrt{\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}}\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}}=$$
$$=4\cdot\sqrt[4]{(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y})(\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y})}$$
$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{(\frac{5}{2})^4}=10\geq 20\sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}}.$$

Сега од горното равенство следува дека секаде во последната низа неравенства важи знак за равенство, од каде следува дека $x=y$ и $|\sin 2x|=|\sin 2y|=1$, т.е. $x=y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$.

Непосредно се проверува дека овие вредности се решенија на дадениот систем.

49. Ако неравенката $a\cos x+b\cos 3x>1$ нема решение, тогаш $|b|\leq 1$. Докажи!

Решение. Нека $f(x)=a\cos x+b\cos 3x$. Тогаш $f(x)\leq 1$ за секој x. Според тоа $f(\pi)=-(a+b)\leq 1$, $f(0)=a+b\leq 1$, т.е. $|a+b|\leq 1$. Од друга страна

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}-b\leq 1,\quad f(\frac{2\pi}{3})=b-\frac{a}{2}\leq 1,$$

па според тоа $|\frac{a}{2}-b|\leq 1$, т.е. $|2b-a|\leq 2$. Користејќи ги добиените неравенства имаме:

$$|b|=\frac{1}{3}|3b|=\frac{1}{3}|a+b+2b-a|\leq\frac{1}{3}(|a+b|+|2b-a|)\leq\frac{1}{3}(1+2)=1.$$

50. Реши ја неравенката

$$1+\operatorname{ctg}\varphi\leq\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Решение. Бидејќи $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}$, дадената неравенка добива облик

$$1+\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}\leq\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Ако $0\leq\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, од горната неравенка се добива следнава неравенка

$$2\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}+\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1\le 2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}, \text{ т.е. } (\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}-1)^2\ge 0$$

која важи за секој φ.

Ако $\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}<0$, од неравенката (1) се добива следнава неравенка $(\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}-1)^2\ge 0$, којашто важи само за оние φ за кои $\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}=1$, но за тие φ не е $\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}<0$.

Според тоа, решенијата на дадената неравенка се оние φ за кои $\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}>0$, т.е. $2k\pi<\varphi<\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

51. Реши ја неравенката

$$\mathrm{tg}^2x_1+\mathrm{ctg}^2x_1+\mathrm{tg}^2x_2+\mathrm{ctg}^2x_2+...+\mathrm{tg}^2x_{996}+\mathrm{ctg}^2x_{996}\le 1992.$$

Решение. Бидејќи

$$(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^2=\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha-2\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha-2$$

тогаш левата страна на неравенката го добива обликот

$$(\mathrm{tg}x_1-\mathrm{ctg}x_1)^2+(\mathrm{tg}x_2-\mathrm{ctg}x_2)^2+...+(\mathrm{tg}x_{996}-\mathrm{ctg}x_{996})^2+2\cdot 996\le 1992,$$

$$(\mathrm{tg}x_1-\mathrm{ctg}x_1)^2+(\mathrm{tg}x_2-\mathrm{ctg}x_2)^2+...+(\mathrm{tg}x_{996}-\mathrm{ctg}x_{996})^2\le 0$$

Оттука за секој $i=1,2,3,...,996$ следува $\mathrm{tg}x_i-\mathrm{ctg}x_i=0$, т.е. $\mathrm{tg}x_i=\mathrm{ctg}x_i$, односно $\mathrm{tg}^2x_i=1$, т.е. $\mathrm{tg}x_i=1$ или $\mathrm{tg}x_i=-1$, па добиваме

$$x_i=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k_i,\ k_i\in\mathbb{Z},\ i=1,2,3,...,996.$$

52. Реши ја неравенката $4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\le 8$.

Решение. Да ставиме $4^{\sin^2\pi x}=y$, тогаш

$$4^{\cos^2\pi x}=4^{1-\sin^2\pi x}=\frac{4}{4^{\sin^2\pi x}}=\frac{4}{y},$$

па неравенката го добива обликот

$$y+3\cdot\frac{4}{y}\le 8,\ y>0.$$

Оттука следува дека

$$y^2-8y+12\le 0,\ y>0,$$

од каде што добиваме $2\le y\le 6$, т.е.

$$2\le 4^{\sin^2\pi x}\le 6. \tag{1}$$

Бидејќи $0\le\sin^2\pi x\le 1$, следува дека

$$1\le 4^{\sin^2\pi x}\le 4. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$2\le 4^{\sin^2\pi x}\le 4,$$

од каде што следува

$$\frac{1}{2}\le\sin^2\pi x\le 1, \text{ т.е. } \frac{\sqrt{2}}{2}\le|\sin\pi x|\le 1.$$

Последната равенка е еквивалентна со неравенките $\sin \pi x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin \pi x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, од каде што добиваме $\frac{4k+1}{4} \leq x \leq \frac{4k+3}{4}$.

53. Реши ја неравенката $\sqrt{2}\cos x \operatorname{tg} x - \sqrt{6}\cos x + \operatorname{tg} x - \sqrt{3} > 0$, ако $0 < x < 2\pi$.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката

$$\sqrt{2}\cos x(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) + (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) > 0,$$

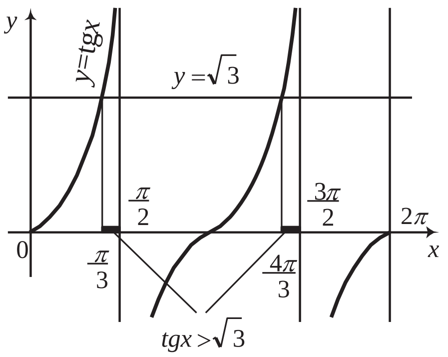
односно $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\sqrt{2}\cos x + 1) > 0$.

1) Имаме $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} > 0$ и $\sqrt{2}\cos x + 1 > 0$. Имајќи во предвид дека $0 < x < 2\pi$ неравенството $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} > 0$ важи за

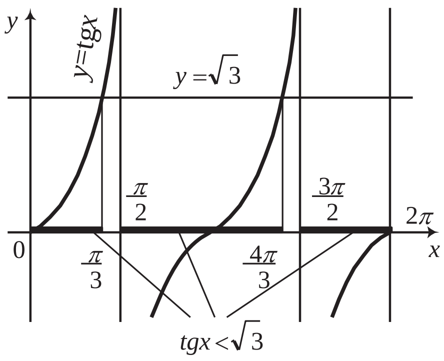
$$x \in (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{3} + \pi, \tfrac{\pi}{2} + \pi) = (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{4\pi}{3}, \tfrac{3\pi}{2})$$

(цртеж 1-а)). Слично, неравенството $\sqrt{2}\cos x + 1 > 0$, односно $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$, важи за

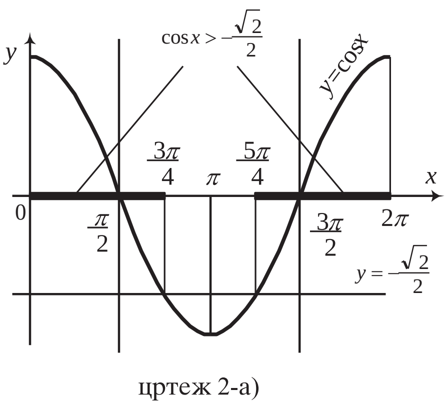
$$x \in (0, \tfrac{3\pi}{4}) \cup (\pi + \tfrac{\pi}{4}, 2\pi) = (0, \tfrac{3\pi}{4}) \cup (\tfrac{5\pi}{4}, 2\pi)$$



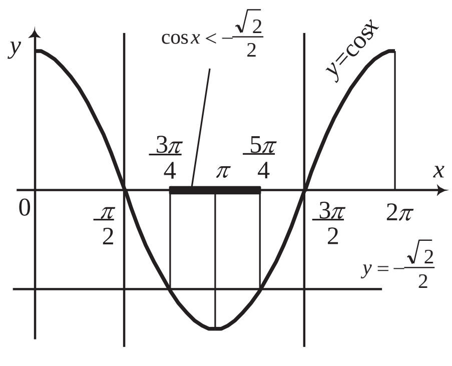
цртеж 1-а)



цртеж 1-б)



цртеж 2-а)



цртеж 2-б)

(цртеж 2-а)). Според тоа во овој случај $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$.

2) Имаме $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} < 0$ и $\sqrt{2}\cos x + 1 < 0$. Неравенството $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} < 0$ важи за

$$x \in (0, \tfrac{\pi}{3}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi + \tfrac{\pi}{3}) \cup (\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi) = (0, \tfrac{\pi}{3}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{4\pi}{3}) \cup (\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

(цртеж 1-б), а неравенството $\sqrt{2}\cos x+1<0$ е исполнето за $x\in(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$ (цртеж 2-б). Значи, во овој случај $x\in(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$.

Конечно, решение на дадената неравенка е $x\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})\cup(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$.

4. РЕШАВАЊЕ НА ТРИАГОЛНИК

4.1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Определи ги тангенсите од аглите во еден триаголник, ако тие се цели броеви.

Решение. Нека α,β и γ се аглите во триаголникот, за кои без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha<\beta<\gamma$. Тогаш $\alpha\in(0,\frac{\pi}{3}]$, па според тоа $\operatorname{tg}\alpha\in(0,\sqrt{3}]$. Бидејќи $\operatorname{tg}\alpha$ е цел број, добиваме дека $\operatorname{tg}\alpha=1$. Затоа

$$-1=-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

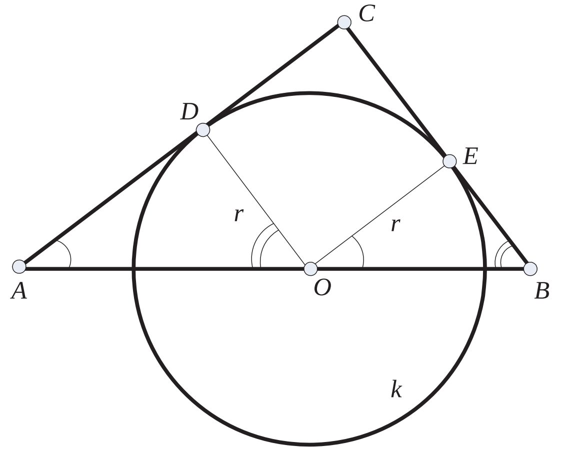
Од последното равенство имаме $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, кое може да се запише во облик $(\operatorname{tg}\beta-1)(\operatorname{tg}\gamma-1)=2$. Сега, очигледно $\operatorname{tg}\beta-1=1$ и $\operatorname{tg}\gamma-1=2$. Значи, бараните тангенси се $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\operatorname{tg}\beta=2$ и $\operatorname{tg}\gamma=3$.

2. Центарот O на кружницата k лежи на хипотенузата AB од правоаголниот триаголник ABC и ги допира катетите AC и BC во точките D и E соодветно. Пресметај ги аглите на триаголникот ако $\overline{BE}=1$ и $\overline{AD}=3$.

Решение. Правите AC и BC се тангенти кон кружницата, па според тоа $OE\perp BC$ и $OD\perp AC$. Понатаму, $\measuredangle DOE=\measuredangle DCE$, како агли со нормални краци. Во четириаголникот $OECD$ сите агли се прави и две соседни страни се еднакви $\overline{OE}=\overline{OD}$, што значи дека $OECD$ е квадрат.

Триаголниците BEO и ODB имаат еднакви агли па според тоа тие се слични. Од сличноста добиваме

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{OD}},$$

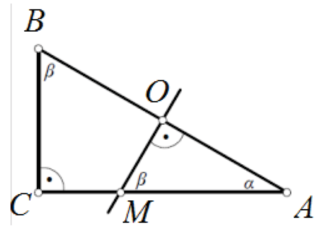


односно $\frac{r}{1}=\frac{3}{r}$, $r^2=3$. Значи, радиусот на кружницата k е еднаков на $r=\sqrt{3}$. Од триаголникот ODA, добиваме

$$\operatorname{tg}\measuredangle OAD=\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Според тоа $\measuredangle OAD=30^\circ$. Значи, $\measuredangle BAC=30^\circ$, $\measuredangle ABC=60^\circ$

3. Во правоаголниот триаголник ABC на катетата AC е избрана точка M така што $\overline{AM}=2\overline{MC}$. Определи го најмалиот агол на триаголникот ABC, ако M лежи на симетралата на хипотенузата AB.



Решение. Со O ќе ја означиме средината на хипотенузата AB. Од условот на задачата правата OM е симетрала на AB. Јасно е дека триаголникот OMA е сличен со триаголникот BCA (имаат исти агли). Ќе воведеме стандардни ознаки $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$. Тогаш, повторно од условот на задачата, $\overline{OA}=\frac{1}{2}c$ и $\overline{AM}=\frac{2}{3}b$. Заради горната сличност имаме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}b}{c}=\frac{\frac{1}{2}c}{b} \Rightarrow \frac{1}{2}c^2=\frac{2}{3}b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2}=\frac{3}{4}.$$

Но, триаголникот ABC е правоаголен, и затоа $\cos^2\alpha=\frac{b^2}{c^2}=\frac{3}{4}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\alpha=30^\circ$.

Значи, аглите во триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, а најмалиот меѓу нив има 30°.

4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини AA_1 $(A_1\in BC)$ и $BB_1, (B_1\in AC)$. Кружницата со дијаметар A_1B_1 ја сече отсечката AB во точки M и N (M е меѓу A и N). Ако $2\overline{AB_1}-\overline{AM}=2\overline{BA_1}-\overline{BN}$, докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Четириаголникот A_1B_1MN е тетивен, па затоа $\measuredangle A_1B_1M=\measuredangle A_1NB=\delta$ и $\measuredangle B_1A_1M=\measuredangle B_1MA=\varphi$. Нека P и Q се проекциите на B_1 и A_1 врз AB соодветно, направи цртеж. Лесно се гледа дека $\overline{PM}=\overline{B_1M}\cos\varphi=\overline{A_1B_1}\cos\delta\cos\varphi$ и $\overline{QN}=\overline{A_1B_1}\cos\delta\cos\varphi$, т.е. $\overline{MP}=\overline{QN}$. Сега, од $\overline{AB_1}=\overline{AB}\cos\alpha$, $\overline{AP}=\overline{AB}\cos^2\alpha$, $\overline{BA_1}=\overline{AB}\cos\beta$, $\overline{BQ}=\overline{AB}\cos^2\beta$ и од условот следува

$$2\overline{AB}\cos\alpha-\overline{AB}\cos^2\alpha=2\overline{AB}\cos\beta-\overline{AB}\cos^2\beta \Leftrightarrow$$
$$(\cos\alpha-\cos\beta)(2-\cos\alpha-\cos\beta)=0.$$

Но, $2\geq\cos\alpha+\cos\beta$, па затоа $\cos\alpha=\cos\beta$, т.е. $\alpha=\beta$, што и требаше да се докаже.

5. Нека ABC е правоаголен триаголник и нека R е радиусот на опишаната кружница, а r радиусот на впишаната кружница. Ако $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$, определи ги острите агли на триаголникот.

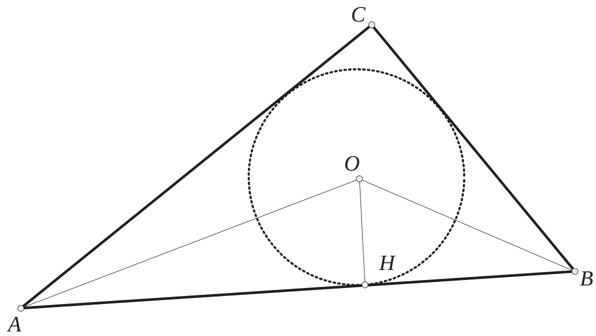
Решение. Да забележиме дека $2R=\overline{AB}=r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$, види цртеж. Од ова добиваме $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}=5$. Уште имаме дека $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$, па $\mathrm{ctg}(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})=1$. Од ова имаме

$$\frac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}=1.$$

Односно, имаме $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=6$. Па $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ се корени на равенката $x^2-5x+6=0$. Од ова добиваме дека $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2$ и $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=3$. Од ова имаме

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{4}$$

и слично $\operatorname{ctg}\beta=\frac{4}{3}$.



Конечно, $\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$ и $\beta=\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$ се бараните агли.

6. Ако за $\triangle ABC$ важи

$$(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}=(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23}(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48},$$

каде α и β се аглите при темињата A и B, соодветно, пресметај го односот $\overline{AC}:\overline{BC}$.

Решение. Ќе докажеме дека $\alpha=\beta$, т.е. $\overline{AC}:\overline{BC}=1$. Нека претпоставиме, дека $\alpha<\beta$. Тогаш $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$. Бидејќи $\sin x$ и $\cos x$ се соодветно растечка и опаѓачка функција на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$, добиваме дека важи

$$0<\sin\tfrac{\alpha}{2}<\sin\tfrac{\beta}{2} \text{ и } 0<\cos\tfrac{\beta}{2}<\cos\tfrac{\alpha}{2}.$$

Според тоа,

$$0<(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}<(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23} \text{ и } 0<(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}<(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48}..$$

Ако ги помножиме последните неравенства, добиваме

$$(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}<(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23}(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48},$$

што противречи на условот на задачата. Случајот $\alpha>\beta$ се разгледува аналогно. Според тоа, $\alpha=\beta$, т.е. $\overline{AC}:\overline{BC}=1$.

7. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB}=\overline{AC}$. Симетралата на аголот ABC ја сече страната AC во точка D. Ако важи $\overline{BC}=\overline{AB}+2\overline{AD}$, пресметај ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=\overline{AC}=b$ и $\overline{AD}=p$. Од условите во задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a=b+2p \\ \frac{a}{b}=\frac{b-p}{p} \end{cases}$$

(втората равенка важи бидејќи AD е симетрала на аголот ABC). Тогаш

$$b+2p=\frac{b(b-p)}{p},\ b^2-2bp=2p^2,$$

односно $(b-p)^2=3p^2$. Значи, $b=p(1+\sqrt{3})$ и $a=p(3+\sqrt{3})$. Бидејќи

$$\cos\measuredangle ABC=\frac{a}{2b}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

следува

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ACB=30^\circ \text{ и } \measuredangle CAB=120^\circ.$$

8. За аглите α,β,γ на $\triangle ABC$ важи $\cos\gamma=2\sin\alpha\sin\beta-1$. Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Бидејќи $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$, добиваме $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$. Според тоа, за $\triangle ABC$ важи

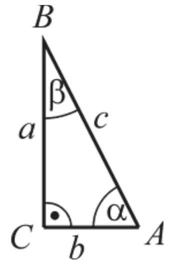
$$\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta=1$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta=1$$
$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=1$$
$$\cos(\alpha-\beta)=1.$$

Последното равенство е исполнето ако и само ако $\alpha-\beta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ и како α и β се агли на триаголник мора да важи $k=0$, т.е. $\alpha=\beta$. Според тоа, $\triangle ABC$ е рамнокрак.

9. Во правоаголен триаголник со катети a и b, $a>b$, важи равенството

$$\lg\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}\left(\lg a+\lg b-\lg 2\right).$$

Определи ги аглите на триаголникот.



Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$\lg\frac{a-b}{2}=\lg\sqrt{\frac{ab}{2}},$$

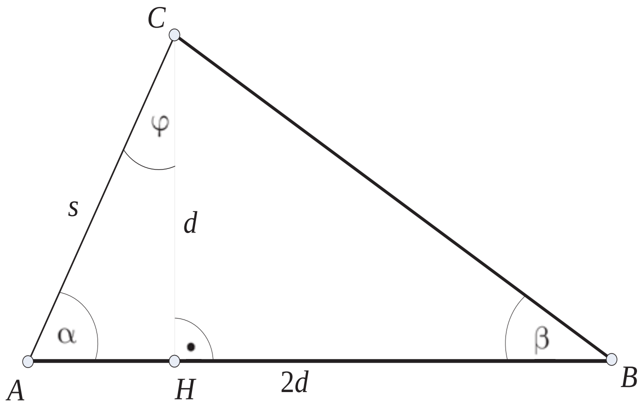
па затоа

$$\frac{a-b}{2}=\sqrt{\frac{ab}{2}}\Leftrightarrow\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{ab}{2}\Leftrightarrow a^2-4ab+b^2=0.$$

Јасно $a>b>0$ и ако поделиме со b^2 добиваме квадратна равенка по $\frac{a}{b}$ во облик $(\frac{a}{b})^2-4\frac{a}{b}+1=0$, чии решенија се $\frac{a}{b}=2\pm\sqrt{3}$. Но $\frac{a}{b}>1$, па затоа $\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}$. Од друга страна $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$, па затоа $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}$. Можни се две решенија по α како агол во правоаголен триаголник и тоа $\alpha=75^\circ$ или $\alpha=15^\circ$, но како $a>b$ мора и $\alpha>\beta$, односно $\alpha=75^\circ$ и $\beta=15^\circ$.

10. Во триаголникот ABC должината на висината CH ($H\in AB$) е еднаква на половина од должината на страната AB и важи $\measuredangle BAC=75^\circ$. Определи го аголот $\measuredangle ABC$.

Решение. Во триаголникот ΔACH имаме $\alpha=75^\circ$, $\measuredangle AHC=90^\circ$, па затоа $\measuredangle AHC=\varphi=15^\circ$.



Воведуваме ознаки $\overline{AH} = x$ и $\overline{CH} = d$. Тогаш $\overline{AB} = 2d$, а од триаголникот ΔACH имаме

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{d}, \text{ т.е. } x = d \cdot \operatorname{tg}15^\circ.$$

Од друга страна

$$\operatorname{tg}15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ \operatorname{tg}30^\circ}$$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2}$$

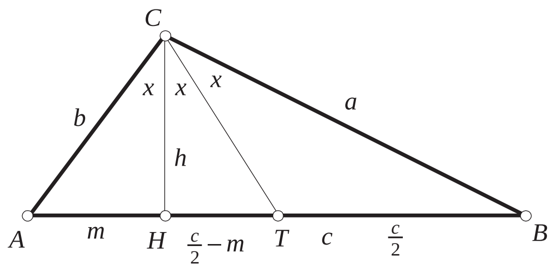
$$= \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}.$$

Од триаголникот ΔBCH имаме

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{d}{2d-x} = \frac{d}{2d-d\operatorname{tg}15^\circ} = \frac{1}{2-(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Бидејќи $\beta < 90^\circ$, добиваме дека $\beta = 30^\circ$, што и требаше да се определи.

11. Да се определат аглите на триаголникот, кај кој висината и тежишната линија, повлечени од исто теме, го делат аголот при тоа теме на три еднакви делови.

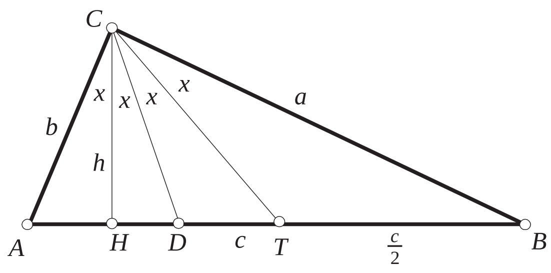


Решение. Според ознаките на цртежот, ќе имаме $\frac{m}{h} = \operatorname{tg}x$; $\operatorname{tg}x = \frac{\frac{c}{2}-m}{h}$, т.е. $m = \frac{c}{4}$. Понатаму, од триаголникот HBC имаме $\operatorname{tg}2x = \frac{3c}{4h}$, па како

$$\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

ќе имаме $\frac{8ch}{16h^2-c^2} = \frac{3c}{4h}$, т.е. $h = \frac{c\sqrt{3}}{4}$. Значи, $tgx = \frac{m}{h} = \frac{c}{4h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, или $x = 30^\circ$. Конечно, за аглите на триаголникот добиваме: $\measuredangle C = 90^\circ$, $\measuredangle A = 60^\circ$, $\measuredangle B = 30^\circ$.

12. Да се определат аглите на триаголникот, кај кој висината, симетралата на аголот и тежишната линија, повлечени од исто теме, го делат аголот при тоа теме на четири еднакви дела.



Решение. Јасно е дека (види цртеж)

$$2\overline{HT} = \overline{BH} - \overline{AH}.$$

Од друга страна имаме

$\overline{HT} = h\operatorname{tg}2x$, $\overline{BH} = h\operatorname{tg}3x$, $\overline{AH} = h\operatorname{tg}x$,

па, значи,

$$3\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}3x - \mathrm{tg}x,$$

$$\frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 3x\cos x - \sin x\cos 3x}{\cos 3x\cos x},$$

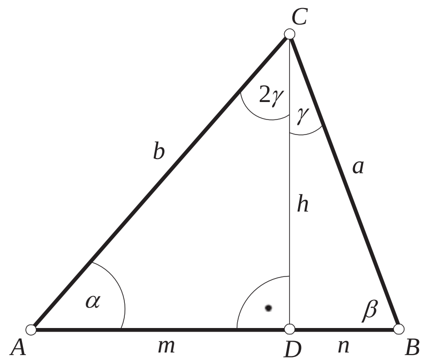
$$\frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos x};$$

Очигледно дека $x \neq 0^\circ, 90^\circ$, што значи дека $\sin 2x \neq 0$, па имаме

$$2\cos 3x \cos x = \cos 2x,$$

т.е. $\cos 4x = 0$, $4x = \frac{\pi}{2}$. Следствено, имаме: $\measuredangle C = 90^\circ$, $\measuredangle A = 67,5^\circ$, $\measuredangle B = 22,5^\circ$.

13. Висината CD на триаголникот ABC го дели $\measuredangle ACB$ во однос $2:1$, а основата AB во однос $m:n = k$ ($k > 1$). Најди го синусот на помалиот агол при основата и допустливите можни вредности на k.



Решение. Бидејќи $\alpha < \beta$, треба да го одредиме $\sin\alpha$ (види цртеж). Без ограничување на општоста земаме $\overline{AD} = m$, $\overline{DB} = n$, па имаме $\sin\alpha = \frac{h}{b}$.

Да ги изразиме h и b преку m и n, имајќи предвид дека $\measuredangle ACD = 2\gamma$, $\measuredangle BCD = \gamma$.

Од правоаголните триаголници ACD и BCD имаме $\mathrm{tg}2\gamma = \frac{m}{h}$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{n}{h}$. Ако овие вредности ги замениме во формулата за двоен агол, добиваме: $\mathrm{tg}2\gamma = \frac{2\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}^2\gamma}$, т.е. $\frac{m}{h} = \frac{2\frac{n}{h}}{1-\frac{n^2}{h^2}}$. Оттука $h^2 = \frac{mn^2}{m-2n}$. Овој израз е позитивен ако $m - 2n > 0$. Но, по услов, $m:n = k$, т.е. $m = nk$, па следува: $nk - 2n > 0$, т.е. $k > 2$.

Од триаголникот ADC го одредуваме b^2:

$$b^2 = m^2 + h^2 = m^2 + \frac{mn^2}{m-2n} = \frac{m(m-n)^2}{m-2n}.$$

Тогаш: $\sin\alpha = \frac{h}{b} = \sqrt{\frac{mn^2}{m(m-n)^2}} = \frac{m}{m-n}$.

14. Дали постои триаголник, таков што за неговите агли α, β и γ е точно равенството

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma. \qquad (1)$$

Решение. Нека постои триаголник со агли α, β и γ за кои е исполнето равенство (1). За било кој θ, $\theta \neq k\pi$ важи $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\theta}$. Користејќи го идентитетот $\mathrm{ctg}\,2\theta = \frac{\mathrm{ctg}^2\theta - 1}{\mathrm{ctg}\,\theta}$ и равенството $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, имаме

$$\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} + \mathrm{ctg}\,\beta - \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\beta} + \mathrm{ctg}\,\gamma - \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\gamma} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{ctg}^2\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\beta} + \frac{\mathrm{ctg}^2\gamma - 1}{\mathrm{ctg}\,\gamma} = 0$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha + \mathrm{ctg}\,2\beta + \mathrm{ctg}\,2\gamma = 0$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha + \mathrm{ctg}\,2\beta + \mathrm{ctg}[2\pi - (2\alpha + 2\beta)] = 0. \qquad (2)$$

Од идентитетите

$$\text{ctg}[2\pi-(2\alpha+2\beta)]=\text{ctg}(2\alpha+2\beta) \text{ и } \text{ctg}(2\alpha+2\beta)=\frac{\text{ctg}\,2\alpha\ \text{ctg}\,2\beta-1}{\text{ctg}\,2\alpha\ \text{ctg}\,2\beta},$$

ако воведеме ознаки $\text{ctg}\,2\alpha=x$ и $\text{ctg}\,2\beta=y$, и замениме во (2) добиваме

$$x+y+\frac{xy-1}{x+y}=0.$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2+1=0. \qquad (3)$$

Не постојат реални броеви за кои е исполнето равенството (3), па затоа не постои добиваме дека не постои таков триаголник за кој е исполнето равенството (1).

15. За аглите α,β и γ од еден триаголник е исполнето равенството

$$\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0.$$

Определи барем еден од нив.

Решение. Левата страна можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma &= 2\sin\frac{3(\alpha+\gamma)}{2}\cos\frac{3(\alpha-\gamma)}{2}+2\sin\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}\\ &= 2\sin\frac{3(\pi-\gamma)}{2}\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2}+2\sin\frac{3[\pi-(\alpha+\beta)]}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}\\ &= -2\cos\frac{3\gamma}{2}(\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2}+\cos\frac{3(\alpha+\beta)}{2})=-4\cos\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\end{aligned}$$

Но бидејќи $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0$, добиваме $\cos\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}=0$, и барем еден од множителите $\cos\frac{3\gamma}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\beta}{2}$ е нула.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\cos\frac{3\gamma}{2}=0$. Но тогаш $\frac{3\gamma}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, за $k\in Z$. Бидејќи γ е агол во триаголник, добиваме $k=0$ и $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Значи, еден агол во триаголникот е еднаков на $\frac{\pi}{3}$.

16. Нека α,β,γ се агли на триаголник за кои е исполнето равенството

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=1.$$

Докажи дека еден од нив е тап агол и пресметај го збирот на двата остри агли.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за аглите се исполнети неравенствата $\alpha\le\beta\le\gamma$. Тогаш α и β се остри агли а γ е аголот за кој треба да докажеме дека е тап.

Даденото равенство ќе го запишеме во облик

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta=1-\cos 3\gamma.$$

При тоа,

$$2\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)=2\sin^2\tfrac{3}{2}\gamma.$$

Бидејќи α,β,γ се агли во триаголник, имаме $\gamma=\pi-\alpha-\beta$. Според тоа

$$\sin\tfrac{3}{2}\gamma=\sin\tfrac{3}{2}(\pi-\alpha-\beta)=\sin[\tfrac{3}{2}\pi-\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)]=-\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)$$

од каде добиваме

$$\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)=\cos^2\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\,,$$
$$\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot[\cos\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)-\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)]=0\,,$$
$$\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot\sin\tfrac{3\alpha}{2}\cdot\sin\tfrac{3\beta}{2}=0\,,$$

Сега имаме три можности, и тоа

а) $\sin\frac{3}{2}\alpha=0$. Бидејќи $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, добиваме $0<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3\pi}{4}$, па според тоа $\sin\frac{3}{2}\alpha>0$. Значи, овој случај не е можен.

б) $\sin\frac{3}{2}\beta=0$. Бидејќи $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, добиваме $0<\frac{3}{2}\beta<\frac{3\pi}{4}$, па според тоа $\sin\frac{3}{2}\beta>0$. Значи и овој случај не е можен.

в) $\cos\frac{3}{2}(\alpha+\beta)=0$. Бидејќи α и β се остри агли во триаголник, добиваме $\frac{3}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}$, од каде добиваме $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

Значи, триаголникот е тапоаголен, во кој тапиот агол е $\gamma=120^\circ$ и збирот на острите агли е $\alpha+\beta=60^\circ$.

17. Во рамнокрак триаголник ABC, со агли при основата AB од 50°, е избрана точка D, таква што $\measuredangle ABD=30^\circ$ и $\measuredangle BAD=10^\circ$. Определи го аголот BCD.

Решение. Ако $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=50^\circ$ тогаш $\measuredangle ACB=80^\circ$, а од условите $\measuredangle ABD=30^\circ$ и $\measuredangle BAD=10^\circ$ следува $\measuredangle DBC=20^\circ$ и $\measuredangle DAC=40^\circ$. Да ставиме $\measuredangle BCD=\phi$, тогаш $\measuredangle ACD=80^\circ-\phi$.

Нека P,Q,R се подножја на нормалите од точката D соодветно на страните BC, CA, AB(направи цртеж), тогаш од правоаголните триаголници CDP и CDQ имаме: $a=\overline{CD}\sin\phi$, $b=\overline{CD}(80^\circ-\phi)$ т.е.

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin(80^\circ-\phi)}{\sin\phi} \qquad (1)$$

Слично, од правоаголните триаголници ADQ и ADR, односно BDR и BDP добиваме: $\frac{b}{c}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ}$ и $\frac{c}{a}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}$, а оттука $\frac{b}{a}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cdot\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ\sin 20^\circ}$, т.е.

$$\frac{b}{a}=\frac{\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува:

$$\sin 10^\circ\sin(80^\circ-\phi)=\sin\phi\cos 20^\circ$$
$$2\sin 10^\circ\cos(10^\circ+\phi)=2\sin\phi\cos 20^\circ$$
$$\sin(10^\circ-10^\circ-\phi)+\sin(10^\circ+10^\circ+\phi)=\sin(\phi-20^\circ)+\sin(\phi+20^\circ)$$
$$\sin(-\phi)=\sin(\phi-20^\circ)$$

Бидејќи $\phi<90^\circ$, следува $\phi-20^\circ=-\phi$, т.е. $\phi=10^\circ$.

18. На страната BC на правоаголникот $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$) избрана е точка K таква што $\overline{BK} = 4\overline{KC}$, а на страната CD избрана е точка M таква што $\overline{CM} = 4\overline{MD}$. Пресметај го односот $\overline{AB} : \overline{BC}$ кога $\measuredangle KAM$ прима најголема можна вредност.

Решение. Нека точките K и M се такви да $\overline{BK} = 4\overline{KC}$ и $\overline{CM} = 4\overline{MD}$. Нека $\measuredangle BAK = \alpha, \measuredangle MAD = \beta$ и $\measuredangle KAM$ прима најголема можна вредност. Да го означиме односот кој го бараме со $\overline{AB} : \overline{BC} = x$ ($x > 0$). Јасно $\alpha + \beta$ прима најмала вредност, односно $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ е најмал ($\alpha + \beta < 90^0$, па $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > 0$). Имаме

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BK}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{4}{5}\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}\frac{1}{x} \text{ и } \operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{5}\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1}{5}x .$$

Сега имаме

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{4}{5x} + \frac{x}{5}}{1 - \frac{4}{5x}\frac{x}{5}} = \frac{25}{21}\left(\frac{4}{5x} + \frac{x}{5}\right),$$

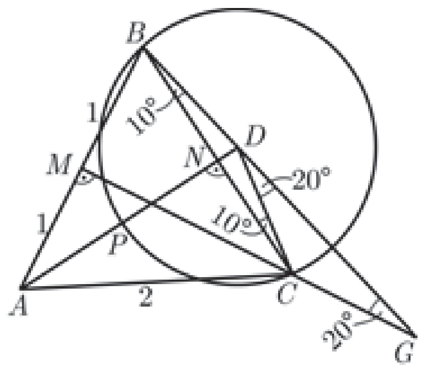
па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \geq \frac{25}{21} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{5x}\frac{x}{5}} = \frac{50}{21} \cdot \frac{2}{5} = \frac{20}{21} .$$

Најмалата вредност за $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ е $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{20}{21}$, а се достигнува кога $\frac{4}{5x} = \frac{x}{5}$, односно за $x^2 = 4$. Добивме $x = 2$, од каде бараниот однос е $\overline{AB} : \overline{BC} = 2:1$ и во овој случај аголот $\measuredangle KAM$ е најголем.

19. Докажи дека: $\operatorname{tg}10^\circ + \operatorname{tg}40^\circ + \operatorname{tg}60^\circ = \operatorname{tg}70^\circ$.

Решение. Да конструираме рамностран триаголник ABC со страна со должина 2. Нека M и N се средини на страните AB и AC, соодветно. Над страната BC конструираме рамнокрак триаголник BCD со агли на основата од 10° и да ја продолжиме BD од страната на D до пресекот со MC. Пресечната точка да ја означиме со G (види цртеж). Потоа, да конструираме кружница k со центар D и радиус $\overline{BD}$ и нека $k \cap AD = \{P\}$. Тогаш



$$\measuredangle MBG = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ \text{ и } \overline{MB} = 1,$$

па затоа

$$\overline{MG} = \operatorname{tg}70^\circ = \overline{MC} + \overline{CG} = \operatorname{tg}60^\circ + \overline{CG} .$$

Освен тоа $\measuredangle CDG = 20^\circ$ и $\measuredangle DCG = 140^\circ$, па затоа $\measuredangle DGC = 20^\circ$. Тоа значи дека триаголникот DCG е рамнокрак и $\overline{DC} = \overline{CG}$. Натаму, $\overline{DC} = \overline{DP} = \overline{DN} + \overline{NP}$. Заради $\overline{BN} = 1$ и $\measuredangle DBN = 10^\circ$ следува $\overline{DN} = \operatorname{tg}10^\circ$.

Од $\measuredangle PDC = 80^\circ$ добиваме $\measuredangle NBP = \frac{1}{2}\measuredangle PDC = 40^\circ$. Затоа $\overline{NP} = \operatorname{tg}40^\circ$. Конечно добиваме

$$\operatorname{tg}70^\circ = \overline{MG} = \operatorname{tg}60^\circ + \overline{CG} = \operatorname{tg}60^\circ + \overline{DN} + \overline{NP} = \operatorname{tg}60^\circ + \operatorname{tg}10^\circ + \operatorname{tg}40^\circ .$$

20. Докажи дека: $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ}$.

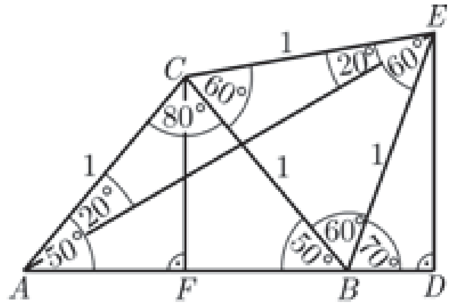
Решение. Да го разгледаме рамнокракиот триаголник ABC во кој $\overline{CA} = \overline{CB} = 1$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = 50^\circ$.

Над страната $\overline{BC}$ да го конструираме рамностраниот триаголник BCE. Тогаш

$$\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{EB} = 1 \text{ и}$$

$$\measuredangle BCE = \measuredangle CEB = \measuredangle EBC = 60^\circ .$$

Нека точката D е подножјето на нормалата повлечена од E на AB и нека $\overline{CF}$ е висината на триаголникот ABC (види цртеж). Лесно се докажува дека



$$\measuredangle CAE = \measuredangle AEC = 20^\circ ,\ \measuredangle EBD = 70^\circ \text{ и } \measuredangle EAD = 30^\circ .$$

Натаму имаме

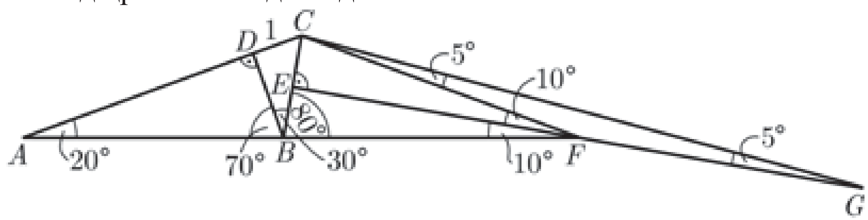
$$\cos 50^\circ = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \text{, т.е. } \overline{AF} = \cos 50^\circ = \overline{FB},\ \sin 70^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}},$$

т.е. $\overline{ED} = \sin 70^\circ$, $\overline{BD} = \cos 70^\circ$ и на крајот

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AF}+\overline{FB}+\overline{BD}} = \frac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ} .$$

21. Докажи дека: $\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}60^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}80^\circ = \operatorname{tg}85^\circ$.

Решение. Од цртежот гледаме дека



$$\overline{GE} = \overline{GF} + \overline{FE} = \overline{FC} + \overline{FE} = \overline{CA} + \overline{FE} = \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{FE} . \qquad (1)$$

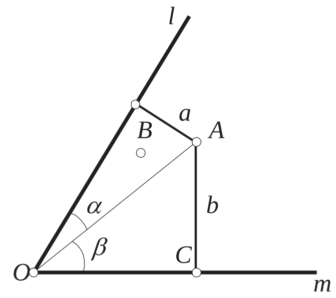
Од правоаголниот триаголник BCD имаме $\overline{BC} = 2\overline{CD} = 2 \cdot 1 = 2$ и $\overline{BD} = \sqrt{3}$, па затоа $\overline{CE} = 1$. Натаму, од триаголникот ABD имаме $\operatorname{tg}70^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{3}}$, од триаголникот CEF следува дека $\operatorname{tg}80^\circ = \frac{\overline{EF}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EF}}{1} = \overline{EF}$, а од триаголникот CEG добиваме $\operatorname{tg}85^\circ = \frac{\overline{EG}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EG}}{1} = \overline{EG}$. Конечно, од добиените равенства и од (1) следува

$$\operatorname{tg}85^\circ = \operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}60^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}80^\circ ,$$

22. Точката A лежи во внатрешноста на агол од 60° и од неговите краци е оддалечена на растојание a и b. Колку е оддалечена од темето на аголот?

Решение. Нека темето на аголот е O а неговите краци се полуправите l и m. Точките B и C се подножја на нормалите спуштени од точката A на краците l и m соодветно (види цртеж), при што $\overline{AB} = a$ и $\overline{AC} = b$. Воведуваме ознаки $\angle AOB = \alpha$ и $\angle AOC = \beta$. Бидејќи триаголниците OAB и OAC се правоаголни, имаме $OAB = 90^\circ - \alpha$ и $\angle OAC = 90^\circ - \beta$. Ако $\overline{OA} = x$, тогаш од триаголникот OAB имаме

$$\frac{a}{x} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$



а од триаголникот OAC имаме

$$\frac{b}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \cos(90^\circ - \beta) = \sin\beta.$$

Од системот равенки

$$\begin{cases} \frac{a}{x} = \sin\alpha \\ \frac{b}{x} = \sin\beta \end{cases},$$

ако го искористиме условот дека $60^\circ = \measuredangle AOB + \measuredangle AOC = \alpha + \beta$ и во втората равенка замениме $\beta = 60^\circ - \alpha$, добиваме

$$\frac{b}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha. \qquad (1)$$

Бидејќи $\sin\alpha = \frac{a}{x}$ и $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(\frac{a}{x})^2} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, ако замениме во (1) ја добиваме равенката $\frac{b}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} - \frac{1}{2}\frac{a}{x}$, чие решение е $\overline{OA} = x = 2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

23 Даден е $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O и симетрала на агол $AD, D \in BC$. Правата l минува низ точката O и е паралелна со AD. Докажи, дека l минува низ ортоцентарот на $\triangle ABC$ ако и само ако $\triangle ABC$ е рамнокрак со основа BC или $\measuredangle BAC = 120^\circ$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Без ограничување на оштоста можеме да сметаме, дека $\alpha \geq \beta$. Ако $OH \parallel HD$ (H е ортоцентарот на $\triangle ABC$), во $\triangle OHC$ имаме $\measuredangle HOC = \beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (имаме $\beta < 90^\circ$) и

$$\measuredangle OCH = (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) = \alpha - \beta,$$

добиваме $\measuredangle OHC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Значи, $\frac{\overline{OC}}{\overline{CH}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos(\beta - \frac{\alpha}{2})}$.

Од друга страна, имаме $\overline{CH} = 2R\cos\gamma$ и затоа

$$\cos(\beta - \tfrac{\alpha}{2}) = 2\cos\gamma\cos\tfrac{\alpha}{2} = -2\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

од каде добиваме

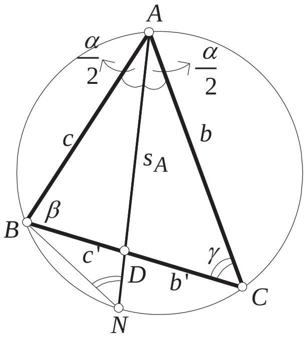
$$\cos(\beta - \tfrac{\alpha}{2}) = -\cos(\beta + \tfrac{\alpha}{2}) - \cos(\beta + \tfrac{3\alpha}{2}), \quad -\cos(\beta + \tfrac{\alpha}{2}) = 2\cos(\beta + \tfrac{\alpha}{2})\cos\alpha.$$

Од последното равенство имаме $\cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) = 0$ или $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, па затоа $\beta = \gamma$ или $\alpha = 120^\circ$.

Доказот во обратната насока е едноставен. Обиди се самостојно да го изведеш.

24. Квадратот на симетралата на аголот во даден триаголник е еднаков на разликата од производот на страните на триаголникот кои го формираат аголот и производот на должините на отсечките на кои е разделена третата страна на триаголникот со симетралата. Докажи!

Решение. Нека $\measuredangle CAB=\alpha$ и AD е симетрала на аголот α која опишаната кружница околу триаголникот ABC по втор пат ја сече во точката N (види цртеж). Отсечките BC и AN се тетиви кои што се сечат во точката D па според тоа



$$\overline{BD}\cdot\overline{DC}=\overline{AD}\cdot\overline{DN}\,. \qquad (1)$$

Ќе воведеме ознаки $\overline{AD}=s_A, \overline{BD}=c'$ и $\overline{DC}=b'$, и ќе ги користиме стандардните ознаки за триаголник $\overline{AB}=c$ и $\overline{AC}=b$. Во тој случај равенството (1) го добива обликот $c'\cdot b'=s_A\cdot\overline{DN}$. Триаголниците ABN и ADC се слични, бидејќи $\measuredangle BAN=\measuredangle DAC=\frac{\alpha}{2}$ (AD е симетрала на аголот α) и $\measuredangle DNA=\measuredangle BCA$ како агли над ист кружен лак BA. Според тоа,

$$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AC}:\overline{AN}=\overline{AC}:(\overline{AN}+\overline{ND}), \qquad (2)$$

и според воведените ознаки имаме $s_A:c=b:(s_A+\overline{DN})$, каде s_A е должина на бараната симетрала AD. Од последното равенство добиваме $s_A^2+s_A\cdot\overline{DN}=bc$. Од равенството (1) добиваме

$$s_A^2=bc-s_A\cdot\overline{DN}=bc-b'c', \qquad (3)$$

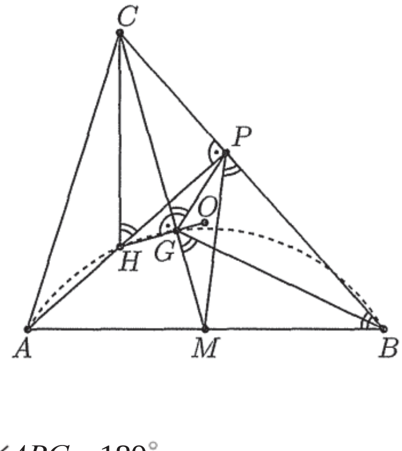
што и требаше да се докаже.

25. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H и тежиште G. Нека тежиштето G припаѓа на кружницата со дијаметар CH.

а) Докажи, дека четириаголникот $ABGH$ е тетивен.

б) Определи ја максимално можната вредност на $\measuredangle ACB$.

Решение. а) Очигледно $\triangle ABC$ е остроаголен, H е внатрешна трочка и ќе го разгледаме нетривијалниот случај, кога $G\not\equiv H$. Ако $CG\cap AB=M$ и $AH\cap BC=P$, тогаш M е средина на AB и P и G лежат на кружницата со дијаметар CH. Така добиваме



$$\measuredangle PGC=\measuredangle PHC=180^\circ-\measuredangle AHC=\measuredangle ABC$$

и затоа четириаголникот $MBPG$ е тетивен. Затоа

$$\measuredangle BGM=\measuredangle BPM=\measuredangle ABC$$

и

$$\measuredangle BAH+\measuredangle BGH=\measuredangle BAH+90^\circ+\measuredangle ABC=180^\circ,$$

што значи дека четириаголникот $ABGH$ е тетивен.

б) *Прв начин.* Ако $G \equiv H$, тогаш $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Нека $G \not\equiv H$ и O е центарот а опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Тогаш точките H, G и O лежат на Ојлеровата права и G ја дели HO во однос $2:1$. Во случајот O е надворешна точка за отсечката HG, т.е. O р надворешна точка за кружницата опишана околу четириаголникот $ABGH$. Тогаш

$$\measuredangle AOB < \measuredangle AHB = 2\measuredangle ACB < 180^\circ - \measuredangle ACB \text{, т.е. } \measuredangle ACB < 60^\circ .$$

Според тоа, бараната максимална вредност за $\measuredangle ACB$ е 60° и се достигнува единствено кај рамностраниот триаголник.

Втор начин. Од $\measuredangle BGM = \measuredangle ABC$ следува, дека $\triangle MBG \sim \triangle MCB$. Тогаш

$$\overline{MB}^2 = \overline{MG} \cdot \overline{MC} = \frac{\overline{MC}^2}{3}$$

и од формлата за тежишните линии во триаголникот, при стандардни ознаки го добиваме равенството $a^2 + b^2 = 2c^2$. Така добиваме, дека

$$\cos\measuredangle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2}{4ab} \geq \frac{1}{2},$$

па затоа $\measuredangle ACB \leq 60^\circ$.

26. За страните a, b, c на остроаголниот триаголник ABC е исполнето равенството $a + b = 3c$. Определи го производот

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Решение. Нека r е радиусот на впишаната кружница во ΔABC, чиј центар е точката O. Допирните точки со BC, CA и AB ќе ги означиме со A', B', C' (види цртеж). Бидејќи AB, BC, CA се тангенти на впишаната кружница, исполнети се равенствата $\overline{AC'} = \overline{AB'} = x$ и $\overline{BC'} = \overline{BA'} = y$. Ако полупериметарот на триаголникот е $p = \frac{a+b+c}{2}$, тогаш

$$x = p - a, \ y = p - b. \tag{1}$$

Полуправите AO и BO се симетрали на аглите α и β соодветно. Од правоаголните триаголници $AC'O$ и $BC'O$ имаме

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{r}, \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{y}{r}. \tag{2}$$

Според Хероновата формула, $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и од $P = pr$, добиваме

$$r^2 = (\frac{P}{p})^2 = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) добиваме

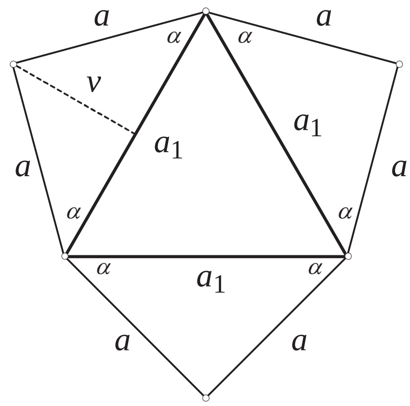
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{xy}{r^2} = \frac{(p-a)(p-b)p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p}{p-c} \tag{4}$$

Од равенството $p = p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3c+c}{2} = 2c$, со замена во (4) имаме

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{2c}{2c-c} = 2.$$

27. Над секоја од страните на рамностран триаголник како над основа кон надворешноста на триаголникот се конструирани рамнокраки триаголници, чии краци се еднакви на a. Да се пресмета аголот на основата на рамнокраките триаголници, ако плоштината на така добиениот шестаголник е еднаква на k^2.

Решение. Плоштината на добиениот шестаголник е



$$\begin{aligned}P &= \tfrac{3a_1 v}{2} + \tfrac{a_1^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \tfrac{3\cdot 2a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha}{2} + \tfrac{4\sqrt{3}a^2\cos^2\alpha}{4} \\ &= a^2(3\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{3}\cos^2\alpha)\end{aligned}$$

и од условот $P = k^2$ ја добиваме равенката

$$k^2 = a^2(3\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{3}\cos^2\alpha),$$

која е еквивалентна на равенката

$$k^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = a^2(3\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{3}\cos^2\alpha).$$

Последната равенка ја делиме со $\cos^2\alpha$ и ја добиваме равенката

$$k^2\operatorname{tg}^2\alpha - 3a^2\operatorname{tg}\alpha - a^2\sqrt{3} + k^2 = 0. \qquad (1)$$

Бидејќи $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, добиваме дека корените на равенката (1) треба да се реални и барем едниот од нив да е позитивен. Корените на равенката (1) се реални ако и само ако $D = -4k^4 + 4k^2a^2\sqrt{3} + 9a^4 \geq 0$, т.е. ако и само ако $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \leq k^2 \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, од што следува

$$0 < k^2 \leq \tfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}. \qquad (2)$$

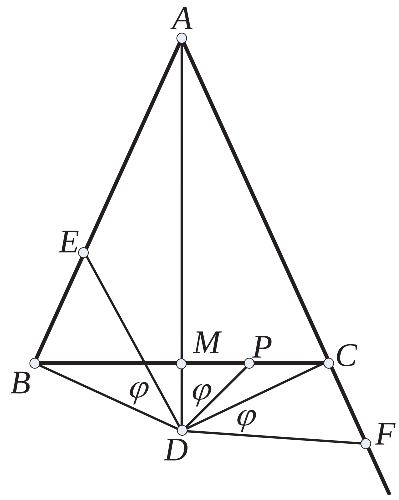
Да забележиме дека збирот на корените на равенката (1) е $\frac{3a^2}{k^2} > 0$. Понатаму, можни се два случаи:

- Ако производот на корените е негативен, односно $\frac{k^2 - a^2\sqrt{3}}{k^2} < 0$, тогаш равенката (1) има еден позитивен корен. Од последното неравенство добиваме $k^2 < a^2\sqrt{3}$ и ако го земеме предвид условот (2) добиваме дека при $0 < k^2 < a^2\sqrt{3}$ равенката (1) има еден позитивен корен.
- Ако производот корените е ненегативен, односно $\frac{k^2 - a^2\sqrt{3}}{k^2} \geq 0$, тогаш равенката (1) има два ненегативни корени. Од последното неравенство добиваме $k^2 \geq a^2\sqrt{3}$ и ако го земеме предвид условот (2) добиваме дека при $a^2\sqrt{3} \leq k^2 \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ равенката (1) има два ненегативни корени. Да забележиме дека за $k^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ добиваме $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, па е $\alpha = \frac{\pi}{6}$ што значи дека шестаголникот е правилен. Ако $k^2 = a^2\sqrt{3}$, тогаш $\operatorname{tg}\alpha = 0$ или $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, при што и во двата случаи се добива рамностран триаголник.

28. Над отсечката BC, како основа, во различните полурамнини конструирани се рамнокраките $\triangle ABC$ и $\triangle DCB$, пришто $\measuredangle DBA = 90^\circ$. Нека M е средината на основата BC. Нека E е точка од страната AB, P е на отсечката MC и F е на полуправата AC така што C е меѓу A и F, пришто

$$\measuredangle EDB = \measuredangle PDA = \measuredangle FDC .$$

Докажи дека P е средина на отсечката EF и DP и EP се заемно нормални.



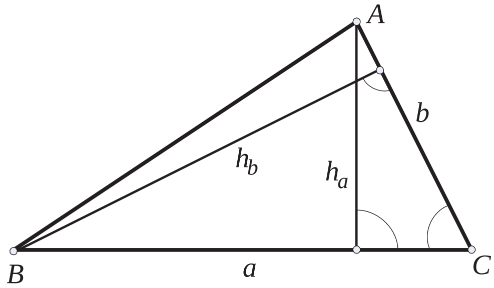
Решение. Нека $\measuredangle EDB = \measuredangle PDA = \measuredangle FDC = \phi$. Триаголниците EDB, PMD и FCD се правоаголни и оттука: $\cos\phi = \frac{\overline{BD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{FD}}$. Тогаш, од $\overline{BD} = \overline{CD}$ следува дека $\overline{ED} = \overline{FD}$, па $\triangle DFE$ е рамнокрак. Уште,

$$\measuredangle FDE = \measuredangle FDC + \measuredangle CDE = \measuredangle EDB + \measuredangle CDE = \measuredangle CDB ,$$

па $\triangle DCB \sim \triangle DFE$, со коефициент на сличност $\cos\phi$.

Од $\measuredangle PDE = \measuredangle PDM + \measuredangle MDE = \measuredangle EDB + \measuredangle MDE = \measuredangle MDB$, следува дека DP е симетрала на $\measuredangle FDE$, па затоа DP и EF се заемно нормални. Од тоа што DM е висина во $\triangle DCB$, DP е симетрала на $\measuredangle FDE$ и $\cos\phi = \frac{\overline{MD}}{\overline{PD}}$, следува дека DP е висината во $\triangle DFE$ па затоа P е средина на отсечката EF.

29. Во еден триаголник дадени се две страни a и b ($a \geq b$). Да се најде третата страна ако е познато дека $a + h_a \leq b + h_b$ каде што h_a и h_b се висините спуштени на a и b соодветно.



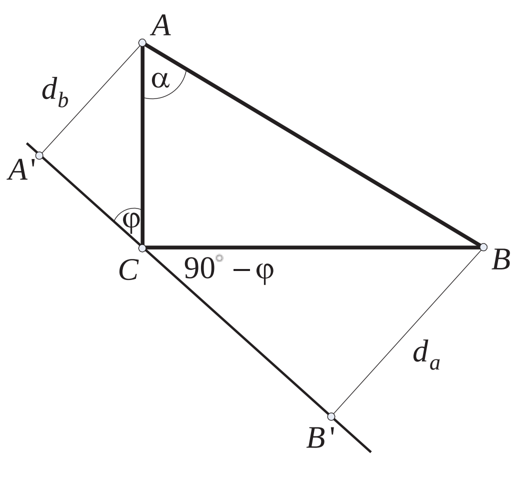
Решение. Нека γ е аголот меѓу страните a и b; тогаш имаме

$$a + b\sin\gamma \leq b + a\sin\gamma$$
$$(a-b)\sin\gamma \geq (a-b)$$
$$(a-b)(\sin\gamma - 1) \geq 0$$
$$\sin\gamma - 1 \geq 0 ,$$

од каде што следува $\gamma = 90^\circ$, т.е.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

30. Даден е правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AC} = b$ и $\overline{BC} = b$. Низ темето C да се повлече права, таква што збирот од растојанијата од темињата A и B до оваа права да е најголем.



Решение. Правата што треба да се повлече низ темето C, наполно е определена со аголот φ што таа права го зафаќа со катетата AC (види цртеж).

Од правоаголните триаголници ACB, $AA'C$ и $BB'C$ добиваме $a = b\,\mathrm{tg}\alpha$, $d_b = b\sin\alpha$ и $d_a = a\cos\varphi$. Затоа имаме:

$$d_a + d_b = a\sin\varphi + b\cos\varphi = b\,\mathrm{tg}\alpha\sin\varphi + b\cos\varphi$$
$$= b(\tfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\varphi + \cos\varphi) = b\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha}.$$

Според тоа, $d_a + d_b$ ќе биде најголем ако $\cos(\alpha-\varphi) = 1$, т.е. за $\varphi = \alpha$.

31. Тежишните линии t_a и t_b во триаголникот ABC образуваат агли со страната AB чиј збир е 60°. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $t_a t_b = \sqrt{3}$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $P_{ABT} = \frac{1}{3}P$ имаме:

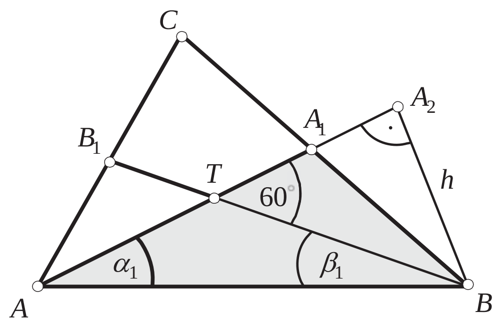
$$P = 3P_{ABT} = 3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}t_a\cdot\tfrac{2}{3}t_b\cdot\sin120^\circ,$$
$$P = \tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Втор начин. Нека $\overline{AA_1} = t_a$, $\overline{BB_1} = t_b$. По услов $\measuredangle BTA_1 = 60^\circ$, како надворешен за $\triangle ABT$ и еднаков на $\alpha_1 + \beta_1$. Имаме:

$$P_{BAA_1} = \tfrac{1}{2}P \text{ и } P_{BAA_1} = \tfrac{1}{2}t_a\cdot h$$

(види цртеж). Триаголникот BTA_2 е правоаголен, па добиваме

$$\sin60^\circ = \frac{h}{\frac{2}{3}t_b} \text{ т.е. } h = \frac{\sqrt{3}}{3}t_b.$$



Тогаш:

$$P = 2\cdot P_{BAA_1} = t_a\cdot h = t_a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}t_b = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = 1.$$

Трет начин. Нека $BA_2 \perp AA_2$, тогаш $\triangle BTA_2$ е правоаголен, со остри агли од 60° и 30°, т.е. $\measuredangle TBA_2 = 30^\circ$, па следува:

$$\overline{TA_2} = \tfrac{1}{2}\overline{BT} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}t_b = \tfrac{1}{3}t_b,$$
$$\overline{BA_2} = \sqrt{(\tfrac{2}{3}t_b)^2 - (\tfrac{1}{3}t_b)^2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}t_b,$$
$$P = 2\cdot P_{BAA_1} = t_a\cdot\overline{BA_2} = t_a\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}t_b = 1.$$

32. Дали постои остроаголен $\triangle ABC$ со радиус на опишаната кружница еднаков на 1 таков што множеството $\mathbb{R}^2\setminus\{A,B,C\}$ е унија на отворени кругови со радиуси поголеми од 1?

Решение. Ќе докажеме дека не постои триаголник со саканото својство. Нека претпоставиме дека таков триаголник постои. Тогаш постои отворен круг со радиус поголем од 1, кој го содржи ортоцентарот H на триаголникот и не ги содржи точките A, B и C. Според тоа, отсечките AH, BH и CH ја сечат границата на кругот (која е кружница), на пример, соодветно во точките A_1, B_1 и C_1. Бидејќи

$$\measuredangle B_1AC_1 \le \measuredangle B_1A_1C < \measuredangle B_1HC_1 = 180^\circ - \measuredangle BAC \le 180^\circ - \measuredangle B_1AC_1,$$

добиваме $\sin\measuredangle B_1AC_1 \le \sin\measuredangle B_1A_1C$ и затоа

$$2R_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\sin\measuredangle A_1B_1C_1} \le \frac{\overline{B_1C_1}}{\sin\measuredangle A_1BC_1} = 2R_{\triangle AB_1C_1}.$$

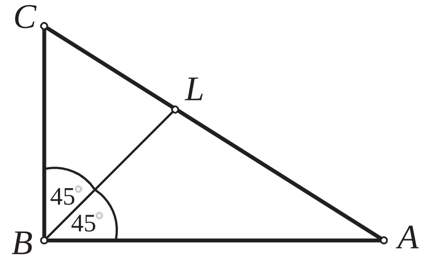
Аналогно $R_{\triangle AB_1C_1} \le R_{\triangle ABC_1} \le R_{\triangle ABC}$, со што добиваме противречност:

$$1 < R_{\triangle A_1B_1C_1} \le 1.$$

33. Должините на катетите на еден правоаголен триаголник се a и b. Пресметај ја должината на симетралата на правиот агол.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник и нека правиот агол е во темето C и $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ се неговите катети.

Нека CL ($L \in AB$) е симетралата на правиот агол (види цртеж), а P_1 и P_2 се плоштините на триаголниците CAL и CLB соодветно.



Ако $l = \overline{CL}$, имаме

$$P_1 = \tfrac{1}{2} bl \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} bl,$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2} al \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} al,$$

Бидејќи $P = P_1 + P_2$, добиваме

$$\tfrac{1}{2} ab = \frac{\sqrt{2}}{4} al + \frac{\sqrt{2}}{4} bl,$$

односно $l = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

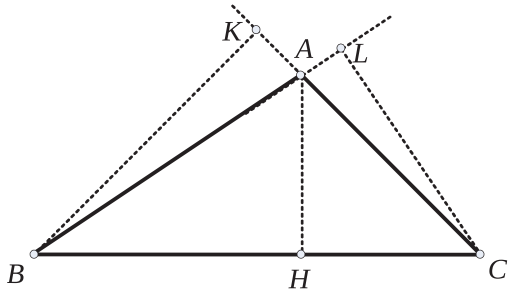
34. Нека AH, BK и CL се висини на произволен триаголник ABC. Докажете дека

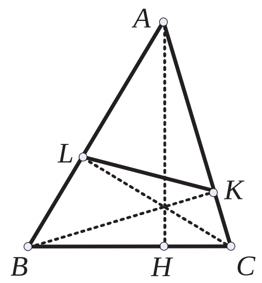
$$\overline{AK}\cdot\overline{BL}\cdot\overline{CH} = \overline{AL}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CK} = \overline{HK}\cdot\overline{KL}\cdot\overline{LH}. \tag{1}$$

Решение. Нека аглите при темињата A, B, C на дадениот триаголник се α, β, γ соодветно. Тогаш

$$\overline{AK} = \overline{AB}\,|\cos\alpha|,\ \overline{AL} = \overline{AC}\,|\cos\alpha|,$$

(знакот за апсолутна вредност е за случај кога α е тап агол). Според тоа,





триаголникот AKL е сличен со триаголникот ABC со коефициент на сличност $|\cos\alpha|$, па значи,

$$\overline{KL} = \overline{BC} \cdot |\cos\alpha|.$$

Ставајќи ги во равенствата (1) соодветните изрази за останатите отсечки, кои учествуваат во равенствата, се добива дека сите три разгледувани производи се еднакви на

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot |\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma|.$$

35. На страните на $\triangle ABC$ се избрани точки $P \in BC, Q \in AC$ и $R \in AB$ такви што $PQ \perp AC$ и $PR \perp AB$. Определи ја големината на $\measuredangle BAC$ ако

$$P_{PCQ} = P_{PBR} = P_{PQR}.$$

Решение. *Прв начин.* Да означиме $\overline{CP} = x$ и $\overline{BP} = y$. Тогаш

$$P_{CPQ} = \frac{\overline{CQ} \cdot \overline{PQ}}{2} = \frac{x^2 \sin\gamma\cos\gamma}{2}$$

и аналогно $P_{BPR} = \frac{y^2 \sin\beta\cos\beta}{2}$ (направи цртеж). Освен тоа

$$P_{PQR} = \frac{\overline{PR} \cdot \overline{PQ} \sin\measuredangle QPR}{2} = \frac{xy\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha}{2}$$

од каде наоѓаме

$$x^2 \sin\gamma\cos\gamma = y^2 \sin\beta\cos\beta = xy\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha.$$

Сега од $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ и $\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha$ добиваме $\cos\alpha(1-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) = 0$. Бидејќи вториот множител во последното равенство е секогаш позитивен следува $\cos\alpha$, т.е. $\alpha = 90^\circ$.

Втор начин. Нека QX $(X \in PR)$ е висина во $\triangle PQR$. Од $P_{PBR} = P_{PQR}$ следува дека $\overline{QX} = \overline{BR}$. Тоа значи дека $RBXQ$ е паралелограм и затоа $BX \parallel RQ$. Аналогно, ако $RY, (Y \in QP)$, тогаш $CY \parallel RQ$. Значи, $BX \parallel CY$. Останува да забележиме дека X и Y се во иста полурамнина во однос на правата BC и единствена можност е точките X, Y, P да се совпаѓаат. Тоа значи, дека $\measuredangle QPR = 90^\circ$, па затоа $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

36. Во остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H, симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече HM, каде M е средината на отсечката AB, во точка T.

а) Докажи, дека $\frac{\overline{HT}}{\overline{TM}} = \frac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}$, каде $\gamma = \measuredangle ACB$.

б) Ако P е подножјето на нормалата повлечена од точката T кон страната BC, определи ја големината на $\measuredangle HPC$.

в) Докажи, дека H лежи на отсечката чии крајни точки се подножјата на нормалите повлечени од точката T кон страните AC и BC.

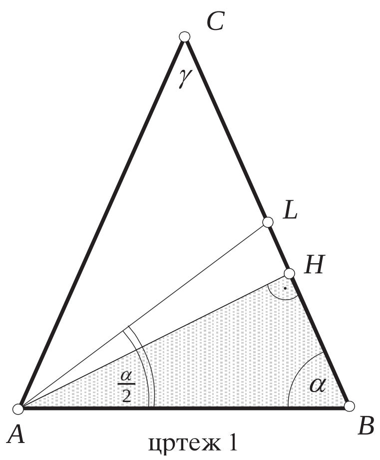
Решение. а) Нека K е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C. Тогаш $KM \perp AB$ и $\triangle CHT \sim \triangle KMT$ (направи цртеж). Според тоа,

$$\frac{\overline{HT}}{\overline{TM}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{KM}} = \frac{2R\cos\gamma}{R - R\cos\gamma} = \frac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}.$$

б) Ако Q е подножјето на нормалата повлечена од M кон BC, тогаш Q е средина на BA_1 ($AA_1 \perp BC$). Тогаш $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PA_1}} = \frac{\overline{MT}}{\overline{TH}}$, па затоа $\overline{PA_1} = \frac{2\overline{BA_1}\cos\gamma}{1+\cos\gamma}$. Бидејќи $\overline{HA_1} = \overline{BA_1}\operatorname{ctg}\gamma$, од $\triangle PHA_1$ добиваме дека $\operatorname{tg}\measuredangle HPA_1 = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, па затоа $\measuredangle HPC = \measuredangle HPA_1 = \frac{\gamma}{2}$.

в) Ако R е подножјето на нормалата повлечена од точката T кон правата AV, како под б) наоѓаме $\measuredangle HRC = \frac{\gamma}{2}$. Тогаш од четириаголникот $RHPC$ добиваме $\measuredangle PHR = 180^\circ$.

37. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со крак $10\,cm$, ако висината и симетралата на аголот, повлечени од едно теме на основата зафаќаат агол од 12°.



цртеж 1

Решение. Лесно се воочува дека постојат два различни триаголника што ги исполнуваат условите на задачата. Затоа ќе разгледаме два случаја.

i) Симетралата на аголот кај темето A е поблиску до врвот C на $\triangle ABC$, т.е. точката L е меѓу точките C и H (цртеж 1). Тогаш од $\triangle ABH$ имаме:

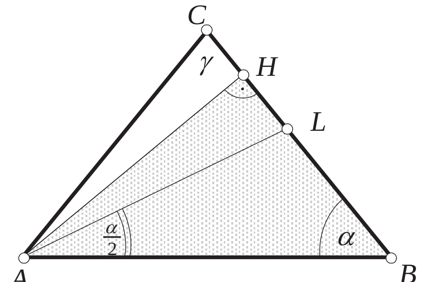
$$\left(\frac{\alpha}{2} - 12^\circ\right) + \alpha = 90^\circ, \quad \text{т.е.} \quad \alpha = 68^\circ,$$

а потоа лесно наоѓаме дека $\gamma = 44^\circ$. Во овој случај плоштината на $\triangle ABC$ е:

$$P = \frac{1}{2}\, b \cdot b \cdot \sin\gamma = 50\sin 44^\circ$$

ii) Точката L е меѓу B и H (цртеж 2), тогаш од $\triangle ABH$ имаме:

$$\left(\frac{\alpha}{2} + 12^\circ\right) + \alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 52^\circ \text{ т.е. } \gamma = 76^\circ.$$



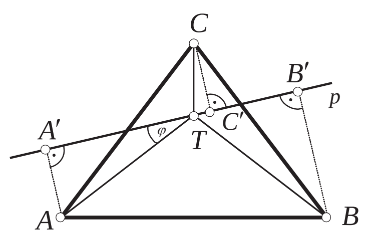
цртеж 2

За плоштината на $\triangle ABC$ во овој случај добиваме

$$P = 50 \cdot \sin 76^\circ.$$

38. Низ тежиштето на рамностран триаголник минува произволна права. Докажи дека збирот од квадратите на растојанијата од темињата на триаголникот до таа права не зависи од изборот на правата.

Решение. Да воведеме ознаки како на цртежот и нека $\measuredangle A'TA = \phi$. Бидејќи триаголникот е рамностран имаме $\measuredangle ATB = \measuredangle ATC = \measuredangle CTB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ и $\overline{AT} = \overline{BT} = \overline{CT} = R$ - радиусот на опишаната круж-



ница околу $\triangle ABC$. Натаму

$$\measuredangle BTB' = 180^\circ - \measuredangle A'TA - \measuredangle ATB = 180^\circ - \measuredangle A'TA - 120^\circ = 60^\circ - \phi$$

и

$$\measuredangle CTC' = \measuredangle CTB - \measuredangle B'TB = 120^\circ - (60^\circ - \phi) = 60^\circ + \phi .$$

Од триаголниците ATA', BTB' и CTC' имаме $\overline{AA'} = \overline{AT}\sin\phi = R\sin\phi$,

$$\overline{BB'} = \overline{BT}\sin(60^\circ - \phi) = R\sin(60^\circ - \phi) \text{ и } \overline{CC'} = \overline{CT}\sin(60^\circ + \phi) = R\sin(60^\circ + \phi) .$$

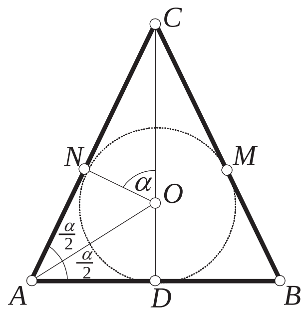
Сега

$$\begin{aligned} \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 &= R^2(\sin^2\phi + \sin^2(60^\circ - \phi) + \sin^2(60^\circ + \phi)) \\ &= R^2(\sin^2\phi + 2\sin^2 60^\circ \cos^2\phi + 2\sin^2\phi\cos^2 60^\circ \\ &= \tfrac{3}{2}R^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = \tfrac{3}{2}R^2 = \tfrac{a^2}{2} \end{aligned}$$

(бидејќи $R = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$). Бидејќи R е константа за рамностраниот триаголник следува дека и збирот на квадратите е константен т.е. не зависи од аголот ϕ.

39. Во рамнокрак триаголник аголот при основата е еднаков на α. Пресметај ја должината на основата на триаголникот ако висината повлечена кон основата е за m поголема од радиусот на впишаната кружница.

Решение. Нека ABC е триаголник со основа AB во кој $\measuredangle BAC = \alpha$. Од темето C повлекуваме нормала CD, $\overline{CD} = h$, која во исто време е и симетрала на $\measuredangle BCA$. Нека симетралата на аголот BAC и симетралата CD се сечат во точката O која е центар на впишаната кружница. Допирaните точки на впишаната кружница k со страните AB, BC и CA ќе ги означиме со D, M, N соодветно. Должината на радиусот на кружницата е $\overline{ON} = r = \overline{OD}$ и $\measuredangle OAN = \measuredangle OAB = \frac{\alpha}{2}$.



Триаголниците CON и ACD се слични (имаат по еден прав агол и агли со заемно нормални краци). Во $\triangle ONC$ имаме, $\measuredangle NOC = \alpha$, $\overline{CO} = h - r = m$ и $\overline{ON} = r$, па според тоа

$$r = \overline{ON} = \overline{OC}\cos\alpha = m\cos\alpha .$$

Триаголникот ADO е правоаголен, еден негов остар агол е $\frac{\alpha}{2}$ и една негова страна е $\overline{OD} = m\cos\alpha$. Бидејќи $\frac{\overline{AD}}{\overline{OD}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, добиваме

$$\frac{a}{2} = \overline{AD} = \overline{OD}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} .$$

Конечно, должината на основата е $a = m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

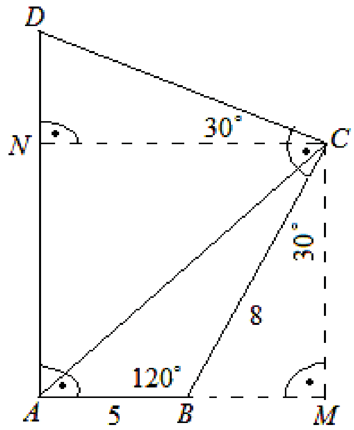
40. За триаголникот ABC важи: $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 8$, $\beta = 120^\circ$. Правата низ темето A што е нормална на страната AB и правата низ темето C што е нормална на BC се сечат во точка D. Пресметај ја должината на отсечката CD.

Решение. Од условите во задачата следува дека $\measuredangle ADC = 60^{\circ}$. Нека правата CM е нормална со AB, $M \in AB$ и нека правата CN е нормална со AD, $N \in AD$. Тогаш, $\measuredangle NCD = 30^{\circ}, \measuredangle CBM = 60^{\circ}$ и $\measuredangle MCB = 30^{\circ}$. Оттука, $\overline{BM} = \overline{BC} \cdot \sin 30^{\circ} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ и затоа

$$\overline{NC} = \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = 5 + 4 = 9 .$$

Конечно, од правоаголниот триаголник NCD имаме

$$\overline{CD} = \frac{\overline{NC}}{\cos 30^{\circ}} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3} .$$



41. Даден е триаголник ABC и точка D на страната BC. Нека $\alpha_1 = \measuredangle DAB$ и $\alpha_2 = \measuredangle CAD$. Докажи, дека

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\overline{AD}} = \frac{\sin \alpha_1}{\overline{AC}} + \frac{\sin \alpha_2}{\overline{AB}} .$$

Решение. Имаме

$$P_{ABC} = \tfrac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2),\; P_{ABD} = \tfrac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \alpha_1,\; P_{ADC} = \tfrac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \alpha_2 .$$

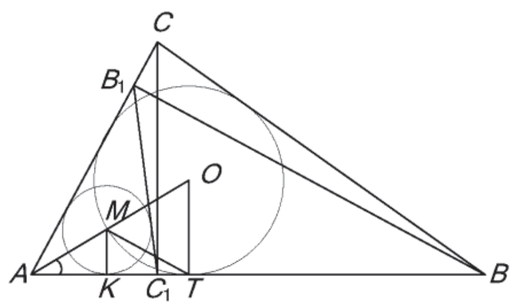
Бидејќи $P_{ABC} = P_{ABD} + P_{ADC}$, добиваме

$$\tfrac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \tfrac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \alpha_1 + \tfrac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \alpha_2 .$$

Ако последното равенство го поделиме со $\tfrac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ го добиваме бараното равенство.

42. Даден е остроаголен триаголник ABC со висини BB_1 и CC_1 повлечени во темињата B и C, соодветно. Нека M е центарот на впишаната кружница во триаголникот AB_1C_1, а T е допирната точка на впишаната кружница во триаголникот ABC со страната AB. Докажи, дека $\overline{MT} = r$, каде r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружнива во триаголникот ABC, а K е допирната точка на впишаната кружница во триаголника AB_1C_1 со страната AB. Тогаш $\overline{OT} = r$, $\overline{MK} = r_1$ и M лежи на AO. Бидејќи $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ со коефициент на сличност $\cos \alpha$, $\alpha = \measuredangle CAB$, важи $r_1 = r \cos \alpha$. Но,



$$\overline{AT} = r \operatorname{ctg} \tfrac{\alpha}{2} = r \cos \alpha \operatorname{ctg} \tfrac{\alpha}{2} ,$$

па затоа

$$\overline{KT} = \overline{AT} - \overline{AK} = r \operatorname{ctg} \tfrac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) = r \sin \alpha .$$

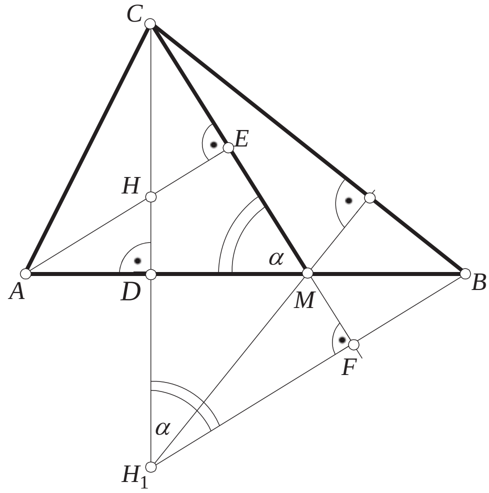
Од правоаголниот триаголник MKT наоѓаме

$$\overline{MT}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{KT}^2 = (r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2 = r^2 \quad ,$$

т.е. $\overline{MT} = r$.

43. Нека M е точка на страната AB на триаголникот ABC. Изрази го растојанието меѓу ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC преку $c = \overline{AB}$ и $\measuredangle CMA = \alpha$.

Решение. Нека H и H_1 се ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC соодветно (види цртеж) и нека $c = \overline{AB}$ и $\measuredangle CMA = \alpha$.



i) Од сличноста на правоаголните триаголници ADH и AEM следува

$$\measuredangle AHD = \measuredangle AME = \alpha ,$$

па

$$\overline{HD} = \overline{AD} \cdot \text{ctg}\alpha . \qquad (1)$$

ii) Од сличноста на правоаголните триаголници BFM и BDH_1 следува

$\measuredangle BH_1D = \alpha$,

па

$$\overline{DH_1} = \overline{DB} \cdot \text{ctg}\alpha \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\overline{HD} + \overline{DH_1} = \overline{AD} \cdot \text{ctg}\alpha + \overline{DB} \cdot \text{ctg}\alpha$$

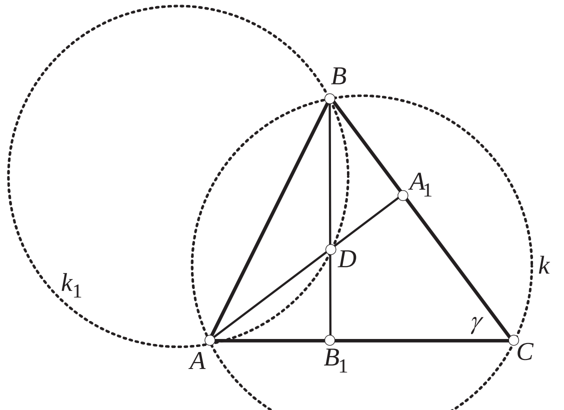
$$\overline{HH_1} = (\overline{AD} + \overline{DB})\text{ctg}\alpha = c \cdot \text{ctg}\alpha .$$

44. Во остроаголен триаголник ABC висините AA_1 и BB_1 се сечат во точката D. Определи го односот на радиусите на кружниците опишани околу триаголниците ABC и ABD.

Решение. Нека k е опишаната кружница околу триаголникот ABC. Низ точката A ќе повлечеме дијаметар $d = 2R$ и нека A_2 е втората негова крајна точка. Триаголникот ABA_2 е правоаголен при што $\measuredangle AA_2B = \gamma$. Тогаш

$$\frac{\overline{AB}}{2R} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AA_2}} = \sin\measuredangle AA_2B = \sin\gamma ,$$

т.е. $\frac{\overline{AB}}{2\sin\gamma} = R$.



Нека k_1 е опишаната кружница околу триаголникот ADB, која има радиус r. Да забележиме дека

$$\measuredangle ADB = \measuredangle A_1DB_1 = 180^\circ - \gamma .$$

Низ точката A ќе повлечеме дијаметар на k_1 и нека A_3 е втората негова крајна точка. Триаголникот AA_3B е правоаголен, при што $\overline{AA_3} = d = 2r$ и

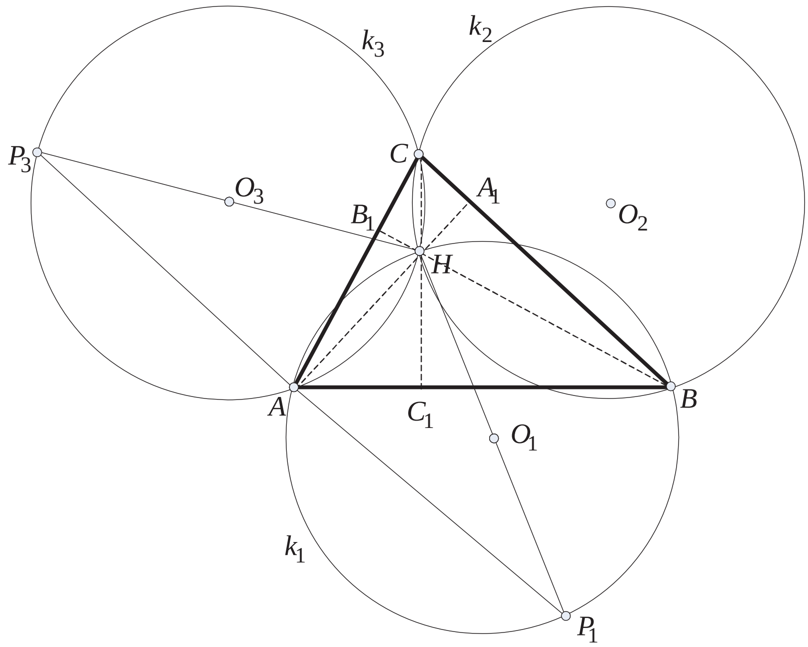
$\measuredangle AA_3B = \gamma$. Според тоа,

$$\frac{\overline{AB}}{2r} = \frac{\overline{AB}}{AA_3} = \sin \measuredangle AA_3B = \sin\gamma \text{ , т.е. } \frac{\overline{AB}}{2\sin\gamma} = r \ .$$

Значи, $R : r = \frac{\overline{AB}}{2\sin\gamma} : \frac{\overline{AB}}{2\sin\gamma} = 1$.

45. Во остроаголниот триагоник ABC, пресекот на висините е точката H. Докажи дека радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ABH, BCH и ACH се еднакви меѓу себе.

Решение. Тврдењето на задачата следува од претходната задача, меѓутоа овде ќе дадеме уште едно решение на оваа задача.



Нека точките A_1, B_1, C_1 се подножја на висините повлечени од темињата A, B, C, соодветно. Нека $k_1(O_1, R_1)$, $k_2(O_2, R_2)$, $k_3(O_3, R_3)$ се опишаните кружници околу триаголниците AHB, BCH, AHC, соодветно. Низ точката H во кружниците k_1 и k_3 повлекуваме дијаметри HP_1 и HP_2 соодветно (види цртеж).

Триаголниците AA_1C и CC_1A се складни, бидејќи имаат по еден прав агол и еден заеднички агол $\measuredangle BAC$. Според тоа, $\measuredangle HBA = \measuredangle ACH$. Од еднаквост на периферни агли над ист лак во кружницата имаме $\measuredangle AP_3H = \measuredangle ACH$ и $\measuredangle AP_1H = \measuredangle ABH$.

Триаголниците P_3AH и P_1AH се правоаголни. Според тоа

$$\frac{\overline{AH}}{2R_1} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HP_1}} = \sin \measuredangle AP_1H = \sin \measuredangle ABH = \sin \measuredangle ACH \ ,$$

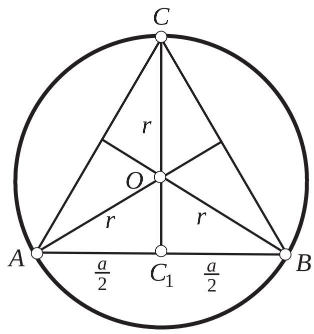
$$\frac{\overline{AH}}{2R_3} = \frac{\overline{AH}}{HP_3} = \sin \measuredangle AP_3H = \sin \measuredangle ACH = \sin \measuredangle ABH \ .$$

Од последните равенства добиваме

$$2R_1 = \frac{\overline{AH}}{\sin \measuredangle ABH} = \frac{\overline{AH}}{\sin \measuredangle ACH} = 2R_3 \ ,$$

т.е. $R_1 = R_3$. Слично се добива и равенството $R_1 = R_2$.

46. Плоштината на рамностран триаголник впишан во кружница е m^2. Определи го радиусот на кружницата.



Решение. Нека темињата на рамностраниот триаголник се A, B и C и нека тој е впишан во кружница k со центар во точката O (види цртеж). Точката O е центар и на впишаната и на опишаната кружница за триаголникот ABC. Триаголниците ABO, BCO и CAO се рамнокраки и складни, бидејќи $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$ и $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$. Бидејќи

$$\measuredangle BOC=\measuredangle COA=\measuredangle AOB=\alpha \text{ и}$$

$$\measuredangle BOC+\measuredangle COA+\measuredangle AOB=360^\circ,$$

добиваме дека $\alpha=120^\circ$. Ако должината на страната на триаголникот е $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$, тогаш од условот на задачата $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=m^2$, од каде добиваме дека $a=\frac{2m}{\sqrt[4]{3}}$. Отсечката CC_1 е висина во триаголникот, па според тоа OC_1 е нормала во рамнокракиот триаголник повлечена од O врз основата. Според тоа $\measuredangle AOC_1=\measuredangle BOC_1=\frac{\alpha}{2}=60^\circ$. Значи, $\measuredangle OAC_1=30^\circ$. Од правоаголниот триаголник AC_1O добиваме дека

$$\frac{\frac{a}{2}}{r}=\cos 30^\circ, \text{ т.е. } r=\frac{\frac{a}{2}}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{2m}{\sqrt[4]{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}m\sqrt[4]{3}.$$

47. Правата симетрична на тежишната линија во однос на симетралата на аголот повлечена од исто теме ја нарекуваме *симедијана*. Докажи, дека ако A'' е пресечната точка на симедијаната соодветна на темето A на $\triangle ABC$ со страната BC, тогаш

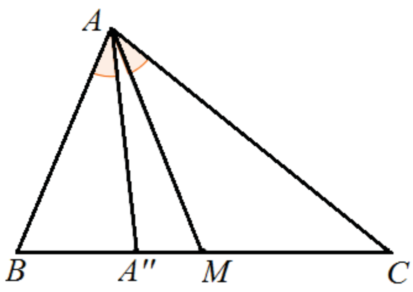
$$\frac{\overline{BA''}}{\overline{CA''}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CA}^2}. \qquad (1)$$

Решение. Нека AM и AA'' се тежишната линија и симедијаната повлечени од темето A, соодветно и h_A е висината повлечена од темето A. Имаме

$$\frac{\overline{BA''}}{\overline{MC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BA''}\cdot h_A}{\frac{1}{2}\overline{MC}\cdot h_A}=\frac{P_{\triangle BAA''}}{P_{\triangle MAC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BA}\cdot\overline{AA''}\sin\measuredangle BAA''}{\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle MAC}=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{AA''}}{\overline{AM}\cdot\overline{AC}}$$

и

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{CA''}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BM}\cdot h_A}{\frac{1}{2}\overline{CA''}\cdot h_A}=\frac{P_{\triangle BMA}}{P_{\triangle CAA''}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BA}\cdot\overline{AM}\sin\measuredangle BAM}{\frac{1}{2}\overline{AA''}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle CAA''}=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{AM}}{\overline{AA''}\cdot\overline{AC}}$$



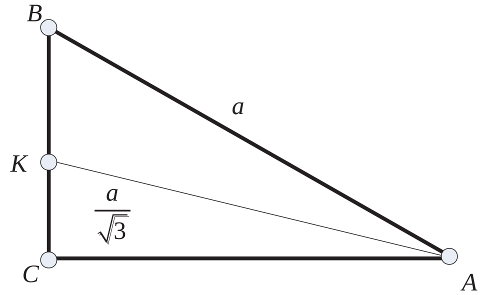
Ако ги помножиме последните две равенства и земеме предвид дека $\overline{BM}=\overline{MC}$ го добиваме равенството (1).

48. Во правоаголен триаголник должината на хипотенузата е еднаква на a, а должината на симетралата на еден негов остар агол е еднаква на $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Пресметај ја плоштината на триаголникот.

Решение. Нека BCA е правоаголен триаголник (правиот агол е во темето C) при што $\overline{AB}=a$. Нека AK е симетрала на $\measuredangle A$ при што $\overline{AK}=\frac{a}{\sqrt{3}}$ (види цртеж).

Триаголниците BCA и KCA се правоаголни со хипотенузи еднакви на $\overline{AB}=a$ и $\overline{AK}=\frac{a}{\sqrt{3}}$ соодветно. Ако $\measuredangle CAB=\alpha$, тогаш $\measuredangle CAK=\frac{\alpha}{2}$, па според тоа



$$\frac{m}{a}=\cos\alpha \text{ и } \frac{m}{\frac{a}{\sqrt{3}}}=\cos\frac{\alpha}{2},$$

каде $m=\overline{AC}$. Значи,

$$m=a\cos\alpha \text{ и } m=\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2},$$

од каде последователно добиваме

$$a\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sqrt{3}\cos\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

односно

$$6\cos^2\alpha-\cos\alpha-1=0.$$

Воведуваме смена $\cos\alpha=t$ и ја добиваме квадратната равенка $6t^2-t-1=0$, чии решенија се $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=-\frac{1}{3}$. Јасно, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ односно $\alpha=60^\circ$, па затоа

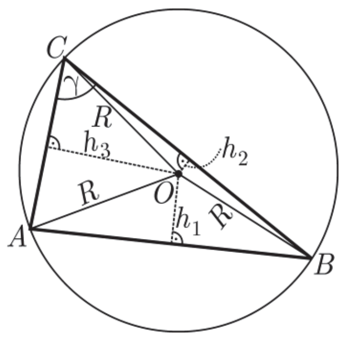
$$\overline{BC}=a\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \overline{AC}=\frac{a}{2} \text{ и } P_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

49. Докажи дека во секој остроаголен триаголник важи

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=\frac{2sr}{R},$$

каде a,b,c се страните, α,β,γ се аглите на триаголникот, r,R се радиусите на впишаната и опишаната кружница, соодветно, а s е полупериметарот на триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот. Важи



$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AOB}+P_{\triangle BOC}+P_{\triangle AOC} \quad \text{...(1).}$$

Од триаголникот ABC имаме дека $P_{\triangle AOB}=\frac{ch_1}{2}$, каде $\frac{h_1}{R}=\cos\gamma$, при тоа користејќи дека $\measuredangle AOB=2\gamma$ како централен агол за аголот γ над ист кружен лак. Значи, $P_{\triangle AOB}=\frac{cR\cos\gamma}{2}$. Аналогно се добива дека

$$P_{\triangle BOC}=\frac{aR\cos\alpha}{2} \text{ и } P_{\triangle AOC}=\frac{bR\cos\beta}{2}.$$

Ако уште земеме предвид дека $P_{\triangle ABC}=sr$ и замениме во (1) се добива

$$sr=\frac{cR\cos\gamma}{2}+\frac{aR\cos\alpha}{2}+\frac{bR\cos\beta}{2}=\frac{R}{2}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma),$$

односно

$$\frac{2sr}{R} = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma,$$

што требаше да се докаже.

50. Даден е триаголник ΔABC и точка P во неговата внатрешност. Нека $AP \cap BC = \{A_1\}$, $BP \cap AC = \{B_1\}$, $CP \cap AB = \{C_1\}$.

Докажи дека

$$P_{\triangle AC_1P} \cdot P_{\triangle BA_1P} \cdot P_{\triangle CB_1P} = P_{\triangle BC_1P} \cdot P_{\triangle CA_1P} \cdot P_{\triangle AB_1P}$$

Решение. Нека е даден триаголникот како на цртежот. Тогаш

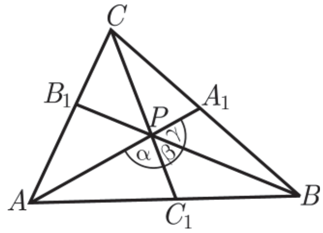
$$P_{\triangle AC_1P} = \overline{PA} \cdot \overline{PC_1} \cdot \sin\alpha,\ P_{\triangle BA_1P} = \overline{PB} \cdot \overline{PA_1} \cdot \sin\gamma,\ P_{\triangle CB_1P} = \overline{PC} \cdot \overline{PB_1} \cdot \sin\beta.$$

Понатаму,

$$P_{\triangle BC_1P} = \overline{PB} \cdot \overline{PC_1} \cdot \sin\beta,$$

$$P_{\triangle CA_1P} = \overline{PC} \cdot \overline{PA_1} \cdot \sin\alpha,$$

$$P_{\triangle AB_1P} = \overline{PA} \cdot \overline{PB_1} \cdot \sin\gamma,$$



па равенството е еквивалентно на

$$\overline{PA} \cdot \overline{PC_1} \cdot \sin\alpha \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PA_1} \cdot \sin\gamma \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PB_1} \cdot \sin\beta = \overline{PB} \cdot \overline{PC_1} \cdot \sin\beta \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PA_1} \cdot \sin\alpha \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PB_1} \cdot \sin\gamma$$

што е точно равенство.

51. Нека D и E се подножните точки на висините спуштени соодветно од темињата A и B на $\triangle ABC$, F е пресечната точка на симетралата на аголот аголот во темето C со страната AB, а O, I и H се соодветно центарот на опишаната кружница, центарот на впишаната кружница и ортоцентарот на $\triangle ABC$. Докажи дека, ако $\frac{\overline{CF}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = 2$, тогаш $\overline{OI} = \overline{IH}$.

Решение. Нека $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \measuredangle ACB = \gamma, \measuredangle CAB = \alpha, \overline{CF} = s_c$. Бидејќи $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AFC} + P_{\triangle BFC}$, направи цртеж, следува дека

$$\tfrac{1}{2} b s_c \sin\tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{1}{2} a s_c \sin\tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2} ab\sin\gamma, \text{ т.е. } s_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Понатаму, од $\overline{AD} = b\sin\gamma$ и $\overline{BE} = a\sin\gamma$ следува

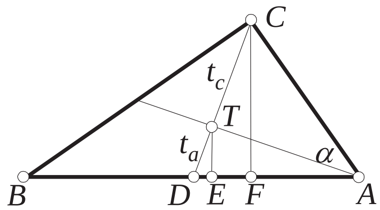
$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{2a\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)\sin\gamma} + \frac{2b\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Оттука и од условот на задачата следува $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Нека правата CF ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката M. Тогаш $OM \perp AB$. Но, како $CH \perp AB$ следува дека $\measuredangle OMC = \measuredangle MCH$, т.е. $\measuredangle OCM = \measuredangle MCH$.

Од $\triangle HCE$, бидејќи $\measuredangle EHC = \frac{\pi}{2} - \measuredangle ECH = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha$ добиваме дека $\overline{CH} = \frac{\overline{CE}}{\sin\alpha}$. Од $\triangle BCE$ следува $\overline{CE} = \frac{a}{\sin\alpha}\cos\gamma = 2R\cos\gamma$, па ко е $\gamma = \frac{\pi}{3}$ добиваме $\overline{CE} = R$.

Оттука следува дека триаголниците CHI и COI се складни, па затоа $\overline{OI} = \overline{IH}$, што и требаше да се докаже.

52. Правоаголен триаголник има плоштина S и остар агол α. Колку е растојанието од неговото тежиште до хипотенузата?



Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза $\overline{AB} = 2c$. Ако CD е неговата тежишна линија, а T неговото тежиште (види цртеж), тогаш $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = c$ и $\overline{TD} = \frac{1}{3}c$.

Нека CF е висина во триаголникот, а $E \in AB$ е таква што $TE \perp AB$ (треба да ја определиме должината на TE). Триаголниците DFC и DET се слични, па според тоа $\overline{TE} = \frac{1}{3}\overline{CF}$. Во триаголникот CFA имаме $\overline{CF} = b\sin\alpha$, а од триаголникот ABC имаме $b = 2c\cos\alpha$, па според тоа

$$\overline{CF} = 2c\sin\alpha\cos\alpha.$$

За плоштината на триаголникот е исполнето

$$S = \frac{1}{2}ba = \frac{1}{2}b \cdot 2c\sin\alpha = bc\sin\alpha = 2c^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Според тоа $c = \sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\cos\alpha}}$, од каде добиваме

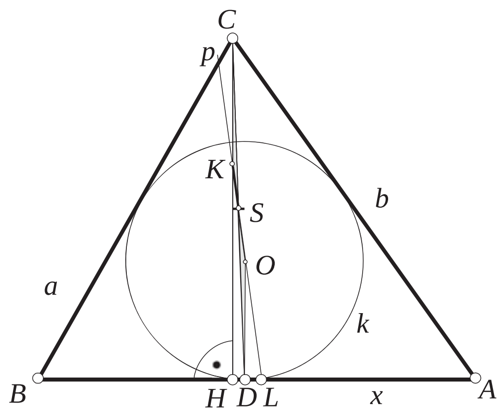
$$\overline{CF} = 2c\sin\alpha\cos\alpha = 2\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\cos\alpha}}\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{2S\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\overline{TE} = \frac{1}{3}\sqrt{2S\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{3}\sqrt{S\sin 2\alpha}$$

53. Во триаголникот ABC впишана е кружница со центар во точката O, која страната AB ја допира во точката D. Нека S е средина на отсечката CD. Докажи дека правата OS ја преполовува страната AB.

Решение. Нека правата $OS \equiv p$ ја сече страната страната AB во точката L (види цртеж). Треба да докажеме дека $\overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Од цртежот и условите на задачата очигледно е дека $\triangle SOD \cong \triangle SKC$ (признак АСА). Оттука следува дека $\overline{CK} = r$, $\overline{KH} = h - r$. Понатаму, од сличноста на триаголниците LHK и LDO следува

$$\overline{LH} : \overline{LD} = \overline{HK} : \overline{DO}. \qquad (1)$$



Ако ставиме $x = \overline{AL}$, $\overline{AH} = b_1$, тогаш знаејќи дека $\overline{AD} = s - a$ (s-полупериметарот на $\triangle ABC$), имаме:

$$\overline{LH} = b_1 - x, \quad \overline{LD} = s - a - x,$$

па (1) добива вид

$$\frac{b_1 - x}{s - a - x} = \frac{h - r}{r} = \frac{h}{r} - 1 \qquad (2)$$

За односот $\frac{h}{r}$, од познатите формули за плоштина на триаголник: $P = \frac{hc}{2}$ и $P = rs$, добиваме

$$\frac{h}{r}=\frac{\frac{2P}{c}}{\frac{P}{s}}=\frac{2s}{c}. \qquad (3)$$

Ако (3) го замениме во (2) добиваме

$$\frac{b_1-x}{s-a-x}=\frac{2s}{c}-1=\frac{2s-c}{c}=\frac{a+b}{c},$$

од каде што

$$(b_1-x)c=(a+b)(s-a-x)$$
$$b_1c-cx=(a+b)(s-a)-(a+b)x$$
$$(a+b-c)x=(a+b)(s-a)-b_1c.$$

Од косинусната теорема за $\triangle ABC$ и правоаголниот $\triangle AHC$ следува

$$\frac{b_1}{b}=\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ т.е. } b_1c=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

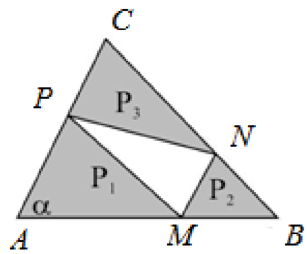
Тогаш од

$$(a+b-c)x=(a+b)\frac{b+c-a}{2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}c$$
$$=\frac{1}{2}(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab-b^2-c^2+a^2)$$
$$=\frac{c}{2}(a+b-c)$$

следува дека $x=\frac{c}{2}$.

54. Даден е триаголник ABC и точките M,N,P на страните AB,BC,CA соодветно, такви што важи $\overline{AM}:\overline{AB}=\overline{BN}:\overline{BC}=\overline{CP}:\overline{CA}=k$. Определи ја вредноста на k, за која плоштината на триаголникот MNP е најмала.

Решение. Да ги означиме плоштините на триаголниците AMP,MBN,NCP со P_1,P_2,P_3 соодветно (цртеж десно). Нека P_4 е бараната плоштина на триаголникот MNP. Од условот на задачата следува $\overline{AM}:\overline{AB}=k$, односно



$$\overline{AM}:(\overline{AM}+\overline{MB})=k \quad\Leftrightarrow\quad (1-k)\overline{AM}=k\overline{MB}$$
$$\Leftrightarrow\quad \overline{AM}:\overline{MB}=k:(1-k).$$

Аналогно,

$$\overline{BN}:\overline{NC}=k:(1-k) \text{ и } \overline{CP}:\overline{PA}=k:(1-k).$$

Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот $ABC,$ тогаш:

$$\frac{P_1}{P}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{AP}\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=k\cdot(1-k),$$

каде $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP}+\overline{PC}}=\frac{1}{1+\frac{\overline{PC}}{\overline{AP}}}=\frac{1}{1+\frac{k}{1-k}}=1-k$. Аналогно се добива и дека

$$\frac{P_2}{P}=\frac{P_3}{P}=k(1-k).$$

Сега

$$\frac{P_4}{P}=\frac{P-P_1-P_2-P_3}{P}=1-3\frac{P_1}{P}=1-3k(1-k)=3k^2-3k+1.$$

Ако P_4 прима најмала можна вредност, тогаш и дропката $\frac{P_4}{P}$ прима е најмала можна вредност и обратно. Квадратната функција $\frac{P_4}{P} = 3k^2 - 3k + 1$ има минимум во темето на параболата со апциса $k = -\frac{-3}{2\cdot3} = \frac{1}{2}$. Значи, бараната вредност на параметарот k е $k = \frac{1}{2}$.

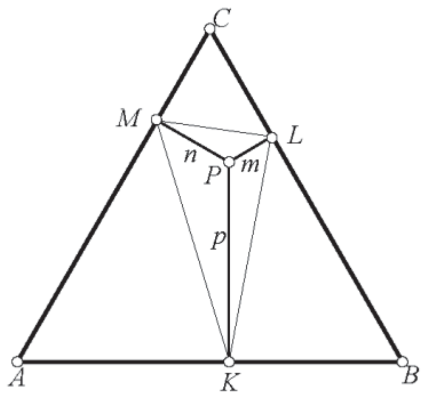
55. Од точка во внатрешноста на рамностраниот триаголникот ABC се повлечени нормали кон страните AB, BC и CA. Должините на нормалите се еднакви на m, n, p, а должината на страната на триаголникот ABC е еднаква на a. Определи го односот на плоштините на триаголникот ABC и триаголникот чии темиња се подножјата на нормалите.

Решение. Нека P е произволна точка во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC и точките K, L и M се подножјата на нормалите повлечени од точката P кон страните AB, BC и CA, соодветно. Бидејќи

$$\measuredangle PKB = \measuredangle PLB = \measuredangle PLC = \measuredangle PMC = \measuredangle PMA = \measuredangle AKP = 90^\circ,$$

четириаголниците $AKPM, BLPK$ и $CLPM$ се тетивни. Понатаму, аглите на триаголникот ABC се еднакви на 60° и па затоа од тетивните четириаголници следува

$$\measuredangle KPL = \measuredangle LPM = \measuredangle MPK = 120^\circ.$$



Од $\overline{PK} = p$, $\overline{PL} = m$ и $\overline{PM} = n$ добиваме дека

$$P_{\Delta LPK} = \frac{1}{2} mp \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} mp,$$

$$P_{\Delta LPM} = \frac{1}{2} mn \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} mn,$$

$$P_{\Delta MPK} = \frac{1}{2} np \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} np.$$

Плоштината на триаголникот KLM е еднаква на

$$P_{\Delta KLM} = P_{\Delta KPL} + P_{\Delta LPM} + P_{\Delta MPK} = \frac{\sqrt{3}}{4}(pm + mn + np).$$

Но, плоштината на триаголникот ABC е $P_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, па затоа

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KLM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}(pm+mn+np)} = \frac{a^2}{pm+mn+np}.$$

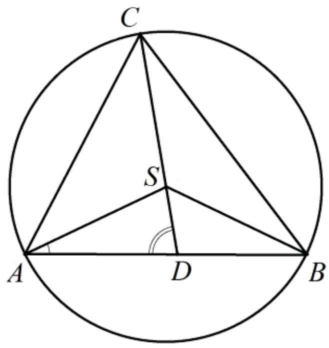
56. Даден е $\triangle ABC$, $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA$ и S е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека правата CS ја сече правата AB во точка D, која се наоѓа меѓу точките A и B. Докажи, дека

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SC}} = \left| \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \right|.$$

Решение. Бидејќи $\overline{SC} = \overline{SA}$ важи $\overline{SD} : \overline{SC} = \overline{SD} : \overline{SA}$, а од триаголникот ADS следува

$$\overline{SD} : \overline{SA} = \sin \measuredangle DAS : \sin \measuredangle ADS.$$

Аглите на $\triangle ABC$ да ги означиме со α, β и γ. Ако α или β не е остра агол, тогаш точката D не е меѓу точките A и B. Разликуваме три случаи.



Прв случај. $\triangle ABC$ е остроаголен. Од $\measuredangle ASB = 2\gamma$, бидејќи $\triangle ABS$ е рамнокрак добиваме

$$\measuredangle DAS = \measuredangle BAS = 90^\circ - \gamma .$$

Аголот $\measuredangle ADS = \measuredangle ADC$ е надворешен за триаголникот BCD, па затоа

$$\measuredangle ADS = \measuredangle ADC = \measuredangle DBC + \measuredangle BCD = \beta + (90^\circ - \alpha) .$$

Според тоа,

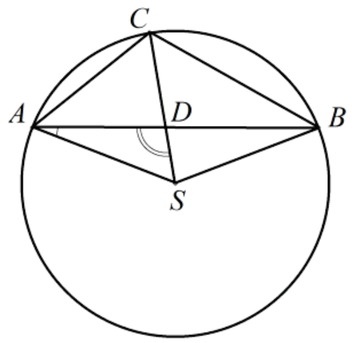
$$\sin \measuredangle DAS : \sin \measuredangle ADS = \sin(90^\circ - \gamma) : \sin(\beta + (90^\circ - \alpha)) = \cos\gamma : \cos(\beta - \alpha)$$

Бидејќи $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ важи $\cos\gamma = \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta)$, па затоа

$$\overline{SD} : \overline{SC} = -\cos(\alpha + \beta) : \cos(\alpha - \beta) .$$

Втор случај. $\triangle ABC$ е правоаголен со прав агол во темето γ. Тогаш точката D се совпаѓа со средината на хипотенузата, па затоа $\overline{SD} = 0$. Истовремено $\beta + \alpha = 90^\circ$, па затоа $\cos(\beta + \alpha) = 0$. Во овој случај двете страни во бараното равенство се еднакви на нула, што значи дека тоа важи.

Трет случај. $\triangle ABC$ е тапоаголен со тап агол во темето γ. Тогаш $\measuredangle ASB = 360^\circ - 2\gamma$, па од рамнокракиот триаголник ABS заклучуваме дека



$$\measuredangle DAS = \measuredangle BAS = \gamma - 90^\circ .$$

Аголот $\measuredangle ADS$ е надворешен за триаголникот ADC, па затоа

$$\measuredangle ADS = \measuredangle CAD + \measuredangle ACD = \alpha + (90^\circ - \beta) .$$

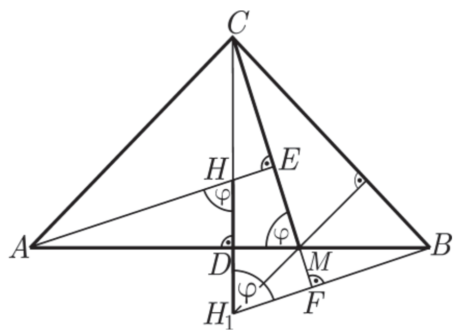
Затоа

$$\sin \measuredangle DAS : \sin \measuredangle ADS = \sin(\gamma - 90^\circ) : \sin(\alpha + (90^\circ - \beta)) = -\cos\gamma : \cos(\beta - \alpha) .$$

Од $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ следува $\overline{SD} : \overline{SC} = \cos(\alpha + \beta) : \cos(\alpha - \beta)$.

57. Нека M е точка од страната AB на триаголникот ABC. Изрази го растојанието меѓу ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC преку $\overline{AB} = c$ и $\measuredangle CMA = \varphi$.

Решение. Нека H и H_1 се ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC, соодветно (види цртеж). Од сличноста на правоаголните триаголници ADH и AEM, следува дека $\measuredangle AHD = \measuredangle AME = \varphi$.



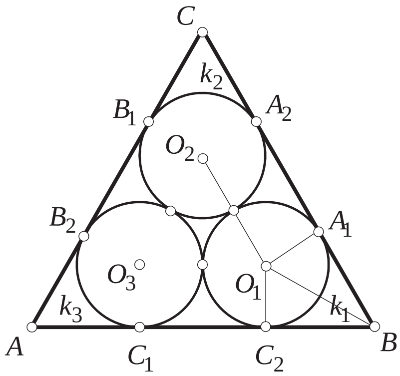
Затоа $\overline{HD} = \overline{AD} \cdot \operatorname{ctg}\varphi$. Од сличноста на правоаголните триаголници BFM и BDH_1

следува дека $\measuredangle BH_1D = \varphi$, односно $\overline{DH_1} = \overline{DB} \cdot \operatorname{ctg} \varphi$.

Значи,

$$\overline{HH_1} = \overline{HD} + \overline{DH_1} = (\overline{AD} + \overline{DB}) \operatorname{ctg} \varphi = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi .$$

58. Во рамностран триаголник со страна a впишани се три еднакви кружници, такви што попарно се допираат и секоја од нив допира две страни од триаголникот. Да се најде должината на радиусот на кружниците.



Решение. Нека O_1, O_2, O_3 се центрите на впишаните кружниците k_1, k_2, k_3 во рамностраниот триаголник ABC, кои имаат еднакви радиуси. Нека допирните точки на кружниците со страните на триаголникот ABC се A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 (види цртеж).

Бидејќи BC е тангента на кружниците k_1 и k_2 што ги допира во A_1 и A_2, и од $\overline{O_1A_1} = \overline{O_2A_2} = r$, добиваме $O_1O_2 \parallel BC$ и $O_1A_1, O_2A_2 \perp BC$. Од равенството $\overline{O_1O_2} = 2r$, имаме $\overline{BA_1} = \frac{a-2r}{2}$. Од складноста на триаголниците BA_1O_1 и BC_2O_1, добиваме $\measuredangle C_2BO_1 = \measuredangle A_1BO_1$, а заради равенството $\measuredangle C_2BO_1 + \measuredangle A_1BO_1 = 60^\circ$ имаме $\measuredangle C_2BO_1 = \measuredangle A_1BO_1 = 30^\circ$. Од правоаголниот триаголник BA_1O_1 (со агли $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) ги добиваме равенствата

$$\frac{\frac{a-2r}{2}}{r} = \operatorname{ctg} 30^\circ, \text{ т.е. } r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{a}{4}(\sqrt{3}-1) .$$

59 (теорема на Бабилиер). Нека R, r, r_a, r_b, r_c и се радиусите на опишаната, впишаната и припишаните кружници на $\triangle ABC$. Докажи дека

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r ,$$

Решение. Од познатите формули

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \; r_b = \frac{P}{s-b}, \; r_c = \frac{P}{s-c}, \; P = sr$$

каде s е полупериметар на триаголникот, т.е. $s = \frac{a+b+c}{2}$, следува равенството

$$r_a + r_b + r_c = P\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right),$$

и по средување на последниот израз, го добиваме равенството

$$r_1 + r_b + r_c = \frac{s}{P}[3s^2 - s(2a+2b+2c) + bc + ac + ab] = \frac{s}{P}(-s^2 + ab + bc + ca) .$$

Заради равенството $ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr$ (Докажи!) добиваме

$$r_a + r_b + r_c = \frac{s}{P}(-s^2 + r^2 + s^2 + 4Rr) = \frac{s}{sr} r(r + 4R) = r + 4R .$$

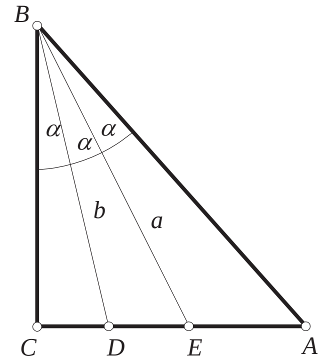
60. Во триаголникот ABC аголот при темето C е прав. Точките D и E припаѓаат на катетата CA, при што отсечките BE и BD го делат аголот при темето B на три еднакви дела. Ако $\overline{BD}=b$ и $\overline{BE}=a$, да се пресмета односот на плоштините на триаголниците DBC и EBC.

Решение. Триаголниците BCD и BCE се правоаголни (види цртеж) со хипотенузи еднакви на $\overline{BD}=b$ и $\overline{BE}=a$ соодветно. Јасно е дека

$$\overline{BC}=\overline{BD}\cos\alpha=b\cos\alpha$$

$$\overline{BC}=\overline{BE}\cos 2\alpha=a\cos 2\alpha=a(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$=a(2\cos^2\alpha-1).$$



Од равенката

$$a(2\cos^2\alpha-1)=b\cos\alpha,$$

односно

$$2a\cos^2\alpha-b\cos\alpha-a=0,$$

добиваме

$$\cos\alpha=\tfrac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{4a}. \qquad (1)$$

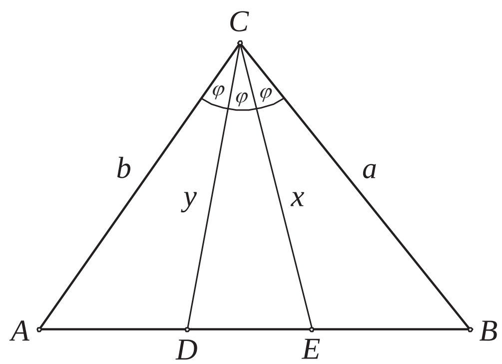
Од $P_{BCD}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{2}$ и $P_{BCE}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{CE}}{2}$ добиваме $\frac{P_{BCD}}{P_{BCE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$. Од правоаголниот триаголник BCE имаме $\overline{CE}=a\sin 2\alpha$, а од правоаголниот триаголник BCD добиваме $\overline{CD}=b\sin\alpha$. Според тоа

$$\frac{P_{BCD}}{P_{BCE}}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin 2\alpha}=\frac{b}{2a\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Ако од (1) замениме во (2) добиваме

$$\frac{P_{BCD}}{P_{BCE}}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin 2\alpha}=\frac{2b}{b+\sqrt{b^2+8a^2}}.$$

61. Аголот $\gamma=\measuredangle C$ во $\triangle ABC$ со правите p и q е поделен на три еднакви дела. Правите p и q ја сечат правата AB во точките D и E. Пресметај ги должините $\overline{CE}$ и $\overline{CD}$ ако $\overline{CE}:\overline{CD}=m:n$ ($m<n$) и $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$, ($a<b$).



Решение. Нека пресечните точки на дадените прави со страната AB се D и E, при што $\overline{CD}=y$ и $\overline{CE}=x$ и $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$, ($m<n$).

Ако $\gamma=3\phi$, тогаш $\varphi=\measuredangle ACD=\measuredangle DCE=\measuredangle ECB$. Според тоа јасни се равенствата

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ADC}+P_{\triangle DBC}=\tfrac{1}{2}by\sin\varphi+\tfrac{1}{2}ay\sin 2\varphi$$

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AEC}+P_{\triangle EBC}=\tfrac{1}{2}bx\sin 2\varphi+\tfrac{1}{2}ax\sin\varphi$$

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ADC}+P_{\triangle DEC}+P_{\Delta EBC}=\tfrac{1}{2}by\sin\varphi+\tfrac{1}{2}yx\sin\varphi+\tfrac{1}{2}ax\sin\varphi$$

Од првото и третото равенство имаме $2ay\cos\varphi=x(a+y)$, а од второто и третото равенство $2bx\cos\varphi=y(b+x)$. Од последните две добиени равенства имаме

$$\cos\varphi = \frac{x(a+y)}{2ay}$$

и ако замениме во второто равенство добиваме

$$bx^2(a+y) = ay^2(b+x).$$

Ако го решиме системот

$$\begin{cases} bx^2(a+y) = ay^2(b+x) \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \end{cases}$$

во кој непознати се само x и y добиваме

$$x = \frac{ab(n^2-m^2)}{n(mb-an)},\ y = \frac{ab(n^2-m^2)}{m(mb-an)}\ .$$

62. Определи го триаголникот со најголема плоштина, ако должините на неговите страни a,b,c го задоволуваат условот: $1 < a \le 2 \le b \le 5 < c \le 6$.

Решение. Прво ќе го определиме триаголникот со најголема плоштина со страни a,b и c за кој се исполнети условите $1 < a \le 2 \le b \le 5$. Нека аголот што го зафаќаат страните a и b е γ. Тогаш плоштината на триаголникот е $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

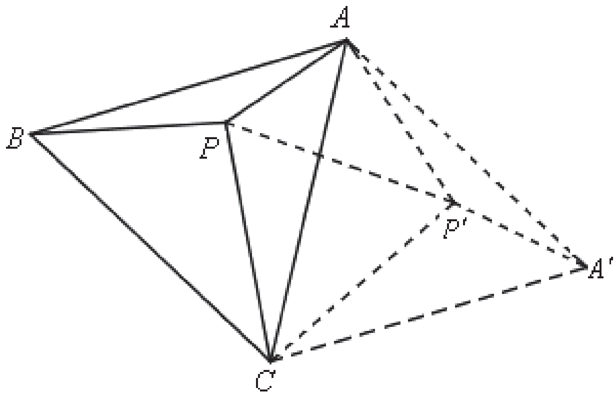
При фиксни a и b, најголема вредност P има за $\sin\gamma = 1$, т.е. $\gamma = 90^\circ$. Значи триаголникот кој има најголема плоштина при фиксни a и b е правоаголен и неговата најголема плоштина при ограничувањата $1 < a \le 2 \le b \le 5$ е за $a = 2$ и $b = 5$ и таа изнесува $P = 5$. Во тој случај c е хипотенуза на правоаголен триаголник и $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$.

Конечно, бидејќи $5 < \sqrt{29} < 6$, добиваме дека бараниот триаголник е правоаголен со катети 2 и 5.

63. Во внатрешноста на рамностраниот $\triangle ABC$ е избрана точка P тавка што $\overline{PA} = 3$, $\overline{PB} = 4$ и $\overline{PC} = 5$. Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека при ротација со центар во C и агол -60°, слика на точката A е точка A', а на P е P', додека слика на B е A. Тогаш

$$\overline{CP'} = \overline{CP} = 5,\ \overline{A'P'} = \overline{AP} = 3 \text{ и } \overline{AP'} = \overline{BP} = 4.$$



Од $\overline{CP'} = \overline{CP} = 5$ и $\measuredangle PCP' = 60^\circ$, следува дека $\triangle PCP'$ е рамностран и затоа $\overline{PP'} = 5$. Бидејќи $\overline{AP} = 3$, $\overline{AP'} = 4$ и $\overline{PP'} = 5$ следува дека $\triangle APP'$ е правоаголен. Понатаму, важи $\triangle BCP \cong \triangle ACP'$ и $\triangle BPA \cong \triangle AP'A'$. Од $\measuredangle BAA' = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$ и $\measuredangle PAP' = 90^\circ$ следува

$$\measuredangle BAP + \measuredangle P'AA' = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ,\ \measuredangle AA'P' + \measuredangle P'AA' = 30^\circ,\ 180^\circ - \measuredangle AP'A' = 30^\circ,$$

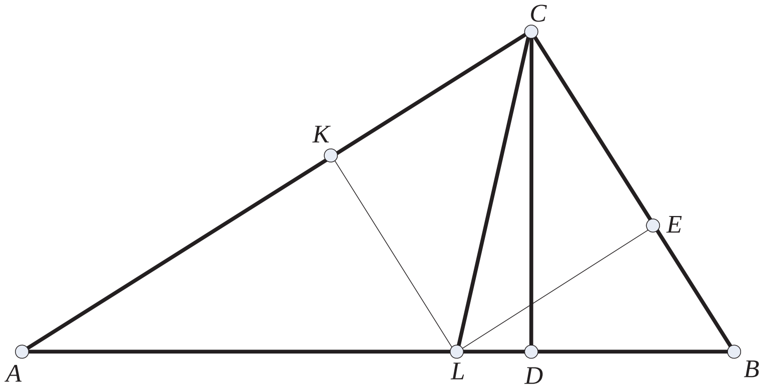
односно $\measuredangle AP'A' = 150^\circ$. Тогаш:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABP} + P_{\triangle BCP} + P_{\triangle APC} = P_{\triangle A'AP'} + P_{\triangle ACP'} + P_{\triangle APC}$$

$$= P_{\triangle A'AP'} + P_{APCP'} = \frac{3 \cdot 4 \sin 150^\circ}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 9.$$

64. Висината и симетралата повлечени од темето на правиот агол имаат должини 3 и 4 соодветно. Определи ја плоштината на триаголникот.

Решение. Триаголник BCA е правоаголен со теме на правиот агол во точката C. Нека CD и CL се висина и симетрала на правиот агол (види цртеж).



Точките E и K се подножја на нормалите спуштени од точката L кон катетите BC и AC соодветно. Бидејќи $LE \parallel KC$, $LK \parallel CE$, $\measuredangle ECK = 90^\circ$ и $\measuredangle ECL = \measuredangle LCK = 45^\circ$ четириаголникот $LECK$ е квадрат во кој CL е негова дијагонала.

Триаголниците LEC и LKC ре рамнокраки и правоаголни во кои хипотенузата им е еднаква на $\overline{CL} = 4$. Затоа

$$\overline{LE} = \overline{LK} = \overline{CL} \sin 45^\circ = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Со стандардните ознаки за страните на триаголникот $\overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$, добиваме

$$P_{ABC} = P_{ACL} + P_{LCB} = \tfrac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{KL} + \tfrac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{LE} = \tfrac{1}{2}2\sqrt{2} \cdot a + \tfrac{1}{2}2\sqrt{2} \cdot b = \sqrt{2}(a+b).$$

Од друга страна

$$P_{ABC} = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}ch = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot 3.$$

Од равенството $\frac{1}{2}ab = \sqrt{2}(a+b)$, добиваме $a+b = \frac{1}{2\sqrt{2}}ab$. Според тоа од равенството $ab = \sqrt{a^2+b^2} \cdot 3$ имаме

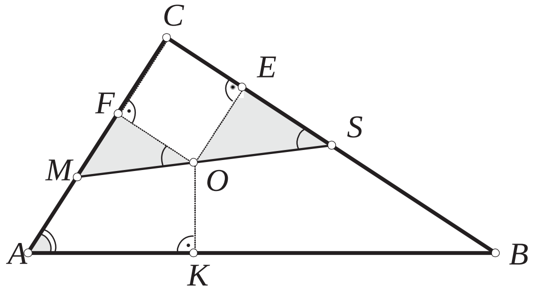
$$a^2b^2 = 9(a^2+b^2) = 9[(a+b)^2 - 2ab] = 9[(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}ab)^2 - 2ab] = 9(\tfrac{a^2b^2}{8} - 2ab).$$

Сега, од $a^2b^2 = 9(\frac{a^2b^2}{8} - 2ab)$ добиваме $ab = 144$, па затоа

$$P_{ABC} = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}144 = 72.$$

65. Низ центарот O на впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$) и средината S на катетата BC е повлечена права, која ја сече катетата AC во точката M.

Докажи дека $\overline{AM} : \overline{MC} = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.



Решение. Нека E,F,K се допирните точки на впишаната кружница $k(O,r)$ со страните BC, CA, AB соодветно (види цртеж). Од правоаголните триаголници MSC, MOF и OSE имаме

$$\begin{cases} \measuredangle OMF = 90^\circ - \measuredangle MOF \\ \measuredangle SMC = 90^\circ - \measuredangle MSC \end{cases}$$

Оттука $\measuredangle MOF = \measuredangle OSE$, па следува дека триаголниците MOF и OSE се слични, од што добиваме

$$\overline{MF} : \overline{OF} = \overline{OE} : \overline{SE}, \quad \overline{MF} = \frac{\overline{OE} \cdot \overline{OF}}{\overline{SE}}.$$

Нека s е полупериметарот на $\triangle ABC$, тогаш:

$$\overline{AK} = s-a, \quad \overline{BE} = s-b, \quad \overline{CF} = s-c.$$

Имајќи предвид дека $r = \frac{a+b-c}{2}$, добиваме:

$$\overline{MF} = \frac{r \cdot r}{\frac{a}{2} - r} = \frac{2r^2}{a-2r} = \frac{2\frac{(a+b-c)^2}{4}}{a-2\frac{a+b-c}{2}} = \frac{(a^2+b^2)+c^2+2ab-2ac-2bc}{2(c-b)} = \frac{c^2-ac+ab-bc}{c-b}$$

$$= \frac{c(c-a)-b(c-a)}{c-b} = c-a = c-a-b+b = b-(a+b-c) = b-2r.$$

Тогаш за $\overline{AM}$ и $\overline{MC}$ наоѓаме:

$$\overline{AM} = \overline{AC} - \overline{CF} - \overline{FM} = b-(b-2r)-r = r$$

$$\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = b-r = b - \frac{a+b-c}{2} = s-a$$

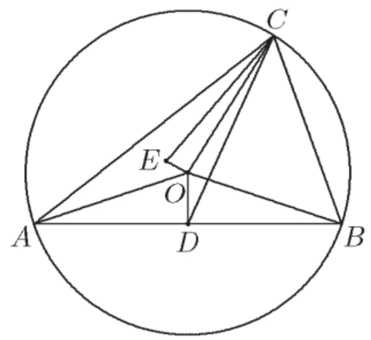
Бидејќи од $\triangle AKO$ е $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OK}}{\overline{AK}} = \frac{r}{s-a}$, следува $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{r}{s-a} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

66. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а D е средината на AB. Нека E е тежиштето на $\triangle ACD$. Докажи, дека правата CD е нормална на OE ако и само ако $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на триаголник. Ќе докажеме дека скаларниот производ на векторите $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{CD}$ е нула ако и само ако $\overline{AB} = \overline{AC}$. Бидејќи E е тежиштето на $\triangle ACD$, добиваме $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ и $\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$. Освен тоа,

$\overline{OD} = |R\cos\gamma|$, $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = |90^\circ - \beta|$,

$\measuredangle OAB = |90^\circ - \gamma|$ и $\measuredangle OCB = |90^\circ - \alpha|$.



Пресметуваме:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CA} = Rb\sin\beta,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = Rb\sin(\beta-\gamma),$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CA} = -Rb\sin\beta,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = -Ra\sin\alpha,$$

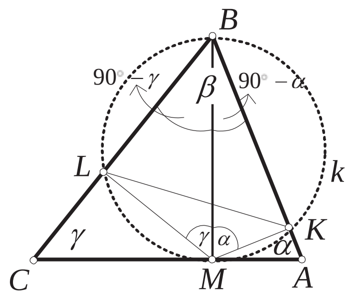
$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CA}=Rb\cos\gamma\sin\alpha\,,\ \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CB}=Ra\cos\gamma\sin\beta\,.$$

Ако искористиме дека $b\sin\alpha=a\sin\beta$, добиваме

$$\begin{aligned}6\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\\&=Ra(\sin(\beta-\gamma)+2\cos\gamma\sin\beta-\sin\alpha)\\&=Ra(\sin(\beta-\gamma)+2\cos\gamma\sin\beta-\sin(\gamma+\beta))\\&=2Ra(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)=2Ra\sin(\beta-\gamma).\end{aligned}$$

Според тоа, скаларниот производ $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}$ е еднаков на нула ако и само ако $\sin(\beta-\gamma)=0$, т.е. ако и само ако $\beta=\gamma$, што значи ако и само ако $\overline{AB}=\overline{AC}$.

67. Во триаголникот ABC висината BM е дијаметар на кружница k, која страната AB ја сече во точката K а страната BC во точката L. Ако $\measuredangle A=\alpha$ и $\measuredangle C=\gamma$ колку е односот на плоштините на триаголниците KLM и ABC.



Решение. Од условот на задачата $BM\perp AC$, $\measuredangle CAB=\alpha$, $\measuredangle ACB=\gamma$. Точките K и L се пресеци на кружницата k, со дијаметар BM, со страните AB и BC соодветно (види цртеж).

Ако $\overline{BM}=h,$ тогаш од правоаголните триаголници CMB и BMC, имаме

$$\overline{AM}=h\,\mathrm{ctg}\alpha,\ \overline{CM}=h\,\mathrm{ctg}\gamma$$

и

$$\begin{aligned}P=P_{\triangle ABC}&=\tfrac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{BM}+\tfrac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{BM}=\tfrac{1}{2}\overline{BM}(\overline{AM}+\overline{CM})\\&=\tfrac{1}{2}h(h\,\mathrm{ctg}\alpha+h\,\mathrm{ctg}\gamma)=\tfrac{1}{2}h^2\tfrac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}.\end{aligned}$$

Триаголниците BMA и BMC се правоаголни, па според тоа

$$\measuredangle ABM=90^\circ-\alpha\,,\quad \measuredangle CBM=90^\circ-\gamma\,,$$

а од тоа што триаголниците BKM и BLM се исто така правоаголни, имаме

$$\measuredangle BMK=\alpha\,,\qquad \measuredangle BML=\gamma\,.$$

Сега, $\overline{KM}=h\cos\alpha$, $\overline{LM}=h\cos\gamma$, и од $\measuredangle LMK=\alpha+\beta$, добиваме

$$P_{\triangle KLM}=\tfrac{1}{2}h\cos\alpha h\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)=\tfrac{1}{2}h^2\cos\alpha\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Конечно,

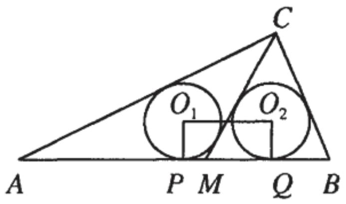
$$\begin{aligned}\frac{P_{\triangle KLM}}{P_{\triangle ABC}}&=\frac{\frac{1}{2}h^2\cos\alpha\cos\gamma\sin(\alpha+\gamma)}{\frac{1}{2}h^2\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}}=\cos\alpha\cos\gamma\sin\alpha\sin\gamma\\&=\tfrac{1}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\gamma\cos\gamma)=\tfrac{1}{4}\sin2\alpha\sin2\gamma\,.\end{aligned}$$

68. Точката M од страната AB на $\triangle ABC$ е таква што радиусите на впишаните кружници во $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ се еднакви. Центрите на кружниците се означени со O_1 и O_2, а нивните допирни точки до страната AB со M и Q, соодветно. Познато е дека $\frac{P_{ABC}}{P_{PQO_1O_2}}=6$.

а) Докажи, дека $10\overline{CM}+5\overline{AB}=7(\overline{AC}+\overline{BC})$.

б) Определи го односот $\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AB}}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните на триаголникот. Нека радиусите на двете кружници се r .



а) Бидејќи $P_{ABC}=r(\frac{a+b+c}{2}+\overline{CM})$ и

$$P_{PQO_1O_2}=r(\overline{MQ}+\overline{MP})=r(\frac{\overline{MB}+\overline{CM}-a}{2}+\frac{\overline{MA}+\overline{CM}-b}{2})$$

$$=r(\overline{CM}+\frac{c}{2}-\frac{a+b}{2})$$

точно е равенството

$$\frac{a+b+c}{2}+\overline{CM}=6(\overline{CM}+\frac{c}{2}-\frac{a+b}{2})$$

кое е еквивалентно на даденото равенство.

б) Прво ќе докажеме дека $\overline{CM}=\sqrt{p(p-c)}$, каде $p=\frac{a+b+c}{2}$. Ако $\measuredangle AMC=\varphi$, тогаш

$$\overline{PM}+\overline{QM}=r(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})=\frac{2r}{\sin\varphi}$$

и затоа

$$2r=\overline{PQ}\sin\varphi=(\overline{CM}+\frac{c}{2}-\frac{a+b}{2})\sin\varphi=(\overline{CM}-(p-c))\sin\varphi .$$

Исто така, имаме

$$P_{ABC}=r(p+\overline{CM})=\frac{(\overline{CM}-(p-c))\sin\varphi}{2}(p+\overline{CM}) .$$

Бидејќи $P_{ABC}=\frac{c\cdot\overline{CM}\sin\varphi}{2}$, добиваме дека $(\overline{CM}-(p-c))(p+\overline{CM})=c\cdot\overline{CM}$, што е еквивалентно со $\overline{CM}=\sqrt{p(p-c)}$.

Затоа $10\overline{CM}+5a=7(b+c)$ и $4\overline{CM}^2=(a+b+c)(a+b-c)$. Ставаме $\frac{\overline{CM}}{c}=m$ и $\frac{a+b}{c}=n$ и го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}10m+5=7n\\ 4m^2=(n+1)(n-1)=n^2-1.\end{cases}$$

Овој систем има решенија $(m,n)=(\frac{3}{8},\frac{5}{4})$ и $(m,n)=(\frac{2}{3},\frac{5}{3})$. Затоа бараниот однос е $\frac{5}{4}$ или $\frac{5}{3}$.

69. Нека O е центарот на опишаната кружница околу рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB . Правата AO ја сече страната BC во точка D . Познато е дека $\overline{BD}$ и $\overline{CD}$ се природни броеви, а $\overline{AO}-\overline{CD}$ е прост број. Определи ги овие броеви.

Решение. Да означиме $\overline{AO}=R, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$ и $\overline{OD}=d$. Бидејќи CO е симетрала на агол во $\triangle ACD$ важи $\frac{d}{R}=\frac{c}{b+c}$. Од друга страна, ако правата AO ја сече опишаната кружница во точка E , тогаш од својството на секантите AE и BC следува $(R+d)(R-d)=bc$.

Ако во последното равенство заменима $d=\frac{cR}{b+c}$, добиваме

$$R^2=\frac{(b+c)^2c}{b+2c}.$$

Нека $k=\text{NZD}(b,c,R), m=\text{NZD}(\frac{b}{k},\frac{c}{k}), R_1=\frac{R}{k}, b_1=\frac{b}{km}$ и $c_1=\frac{c}{km}$. Тогаш

$$R_1^2=\frac{m^2(b_1+c_1)^2c_1}{b_1+2c_1}.$$

Бидејќи $\text{NZD}(m,R_1)=1$ и $\text{NZD}(b_1+2c_1,b_1+c_1)=\text{NZD}(b_1+2c_1,c_1)=\text{NZD}(b_1,c_1)=1$ добиваме $R_1^2=(b_1+c_1)^2c_1$ и $m^2=b_1+2c_1$. Според тоа, c_1 е точен квадрат, на пример $c_1=n^2$. Тогаш

$$c=kmc_1=kmn^2,\ b=kmb_1=km(m^2-2n^2)\ \text{и}\ R=kR_1=kn(m^2-n^2).$$

Бидејќи $1>\sin\measuredangle BAC=\frac{b+c}{2R}=\frac{m}{2n}$, заклучуваме $\sqrt{2}n<m<2n$. (Обратно, при овој услов триаголникот постои и е остроаголен, т.е. правата AO го сече кракот BC.) Во случајов $n\geq 2$. Бидејќи $R-c=kn(m^2-n^2-mn)$ е прост број, добиваме дека n е прост број, $k=1$ и $m^2-n^2-mn=1$, т.е. $(m-1)(m+1)=n(m+n)$. Можни се два случаја:

1) $m-1=nl$ и тогаш $l(nl+2)=nl+1+n$, т.е. $n=\frac{1-2l}{l^2-l-1}$. Последниот број е негативен за $l\geq 2$. Затоа $l=1$ и оттука $n=1$, што е противречност.
2) $m+1=nl$ и тогаш $l(nl-2)=ml-1+n$, т.е. $n=\frac{2l-1}{l^2-l-1}$. Последниот број е помал или еднаков на 1 за $l\geq 3$, а за $l=1$ е еднаков на -1. Останува $l=2$ и оттука $n=R-c=3, m=5, b=35$ и $c=45$.

4.2. ПРИМЕНА НА СИНУСНАТА И КОСИНУСНАТА ТЕОРЕМА

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ и точки M,N и P од отсечките AB,CM и BN, соодветно. Ако $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{CN}=\overline{BN}$ и $\measuredangle APC=\measuredangle BPC$, докажи дека $\measuredangle PAC=\measuredangle MCA$.

Решение. Од синусната теорема за $\triangle CPB$ и $\triangle CPA$ имаме

$$\frac{a}{\sin\measuredangle CPB}=\frac{\overline{CP}}{\sin\measuredangle PBC}\ \text{и}\ \frac{b}{\sin\measuredangle CPA}=\frac{\overline{CP}}{\sin\measuredangle PAC}.$$

Ако ги поделиме горните равенства наоѓаме $a\sin\measuredangle PBC=b\sin\measuredangle PAC$. Од друга страна $P_{AMC}=P_{BMC}$ следува дека $a\sin\measuredangle NCB=b\sin\measuredangle NCA$. Од $\overline{CN}=\overline{BN}$ следува дека $\measuredangle PBC=\measuredangle NBC=\measuredangle NCA$ и од горните две равенства добиваме

$$\sin\measuredangle PAC=\sin\measuredangle NCA.$$

Бидејќи $\triangle ABC$ е остроаголен, добиваме $\measuredangle PAC=\measuredangle NCA=\measuredangle MCA$.

2. Во триаголникот ABC, $\measuredangle A=\frac{\pi}{7}$, $\measuredangle B=\frac{2\pi}{7}$ и $\measuredangle C=\frac{4\pi}{7}$. Докажи дека $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ каде $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{CA}=b$.

Решение. Според синусна теорема за ΔABC имаме

$$\frac{a}{\sin\measuredangle A}=\frac{b}{\sin\measuredangle B}=\frac{c}{\sin\measuredangle C}=2R \Leftrightarrow a=2R\sin\measuredangle A, b=2R\sin\measuredangle B, c=2R\sin\measuredangle C$$

Равенството $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ кое треба да го докажеме е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} \qquad (*)$$

Од друга страна

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

Според тоа и почетното равенство е исполнето.

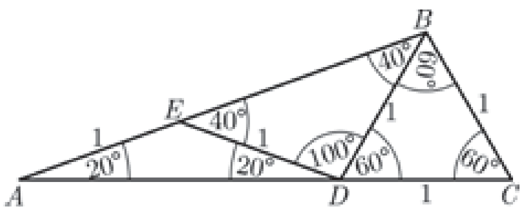
3. Докажи дека

$$\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Решение. Да го разгледаме триаголникот ABC со агли $\measuredangle A=20^\circ$, $\measuredangle B=100^\circ$ и $\measuredangle C=60^\circ$ и $\overline{BC}=1$ (види цртеж).

Нека точките D и E лежат на страните AC и AB, соодветно, така што $\overline{DC}=\overline{ED}=\overline{BC}=\overline{BD}=1$ и $\overline{AE}=1$. Сега имаме

$$\begin{aligned}\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}&=1+2\cos 40^\circ\\ &=2(\tfrac{1}{2}+\cos 40^\circ)\\ &=2(\cos 60^\circ+\cos 40^\circ) \qquad (1)\\ &=2\cdot 2\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 10^\circ\\ &=4\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ.\end{aligned}$$



Со примена на синусната теорема на триаголникот ABC добиваме $\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sin 20^\circ}$, од што следува

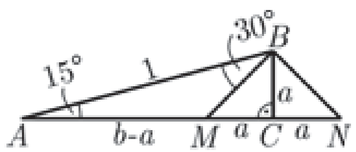
$$\overline{AB}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\begin{aligned}4\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}&\Leftrightarrow 4\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\sin 60^\circ\\ &\Leftrightarrow 4\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

4. Докажи дека

$$\frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=\sqrt{3}.$$



Решение. Да го разгледаме правоаголниот триаголник ABC со $\measuredangle A=15^\circ$ и $\measuredangle C=90^\circ$ и $\overline{AB}=1$ (види цртеж). Тогаш $a=\overline{BC}=\sin 15^\circ$ и $b=\overline{AC}=\cos 15^\circ$. На AC и на нејзиното продолжение да земеме две точки M и N така што $\overline{CM}=\overline{CN}=a$. Сега, $\overline{AN}=a+b$ и $\overline{AM}=b-a$, па затоа $\measuredangle ABM=30^\circ$ (Докажи!). Со примена на синусната теорема на триаголниците ABM и ABN добиваме $\frac{\overline{BM}}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{AM}}{\sin 30^\circ}$ и $\frac{\overline{BN}}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{AN}}{\sin 120^\circ}$, па заради $\overline{BM}=\overline{BN}$ следува

$$\frac{\overline{AM}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AN}}{\sin 120^\circ}\Leftrightarrow\frac{b-a}{\sin 30^\circ}=\frac{b+a}{\sin 120^\circ}\Leftrightarrow\frac{b+a}{b-a}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}\Leftrightarrow\frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

5. Во рамнокракиот триаголник ABC, аголот кај темето C е еднаков на 20°. Точките M и N се избрани на AC односно BC, така што $\measuredangle ABM=60^\circ$ и $\measuredangle BAN=50^\circ$. Најди го аглот BMN.

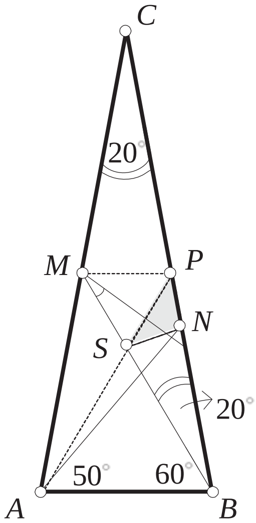
Решение. *Прв начин*. Повлекуваме отсечка AP, така што $\measuredangle BAP=60^\circ$ (види цртеж 1). На таков начин добиваме два рамнострани триаголници ABS и MPS, па затоа

$$\overline{AB}=\overline{BS} \tag{1}$$
$$\overline{MS}=\overline{MP} \tag{2}$$

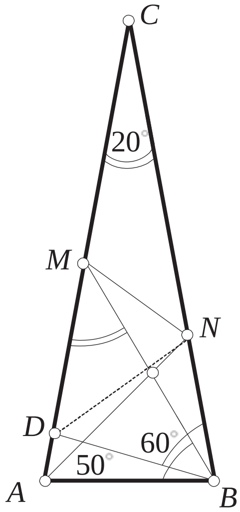
Од рамностраниот ΔANB ($\measuredangle A=\measuredangle N=50^\circ$) следува

$$\overline{AB}=\overline{BN} \tag{3}$$

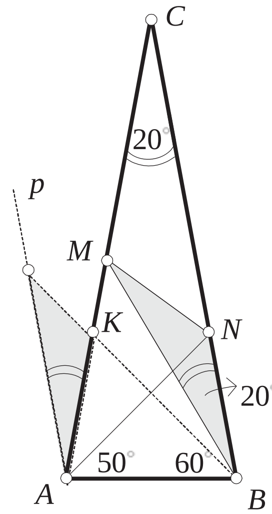
Од (1) и (3) следува дека $\overline{BS}=\overline{BN}$, т.е. ΔSNB е рамнокрак, со агли $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$. Ќе покажеме дека $\measuredangle SPN=\measuredangle PSN$. Имаме



цртеж 1



цртеж 2



цртеж 3

$$\measuredangle CPM+\measuredangle MPS+\measuredangle SPN=180^\circ,$$
$$\measuredangle MSP+\measuredangle PSN+\measuredangle NSB=180^\circ,$$
$$80^\circ+60^\circ+\measuredangle SPN=180^\circ,$$
$$60^\circ+\measuredangle PSN+80^\circ=180^\circ,$$
$$\measuredangle SPN=40^\circ,\quad \measuredangle PSN=40^\circ.$$

Оттука следува дека

$$\overline{NS} = \overline{NP} \tag{4}$$

Од (2) и (4) следува дека MN е симетрала на страната SP од рамностраниот $\triangle MPS$, т.е. симетралата на $\measuredangle SMP$. Според тоа, бараниот агол е $\measuredangle BMN = 30^\circ$.

Втор начин. Повлекуваме BD, така што $\measuredangle ABD = 20^\circ$ (види цртеж 2). Тогаш, $\measuredangle ADB = \measuredangle DAB = 80^\circ$, а оттука

$$\overline{AB} = \overline{DB}. \tag{1}$$

Од рамнокракиот ΔANB ($\measuredangle A = \measuredangle N = 50^\circ$) следува

$$\overline{AB} = \overline{NB} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $\overline{DB} = \overline{NB}$, а поради $\measuredangle DBN = 60^\circ$, следува дека ΔDBN е рамностран, и затоа

$$\overline{DN} = \overline{DB} \tag{3}$$

Од рамнокракиот ΔBMD ($\measuredangle B = \measuredangle M = 40^\circ$) следува

$$\overline{DB} = \overline{DM}. \tag{4}$$

Понатаму имаме:

$$\measuredangle ADB + \measuredangle BDN + \measuredangle NDM = 180^\circ$$

$$80^\circ + 60^\circ + \measuredangle NDM = 180^\circ,$$

$$\measuredangle NDM = 40^\circ. \tag{5}$$

Од (3), (4) и (5) следува дека ΔMND е рамнокрак, со агли $40^\circ, 70^\circ$ и 70°.

Бидејќи $\measuredangle BMD = 40^\circ$, следува дека $\measuredangle BMN = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Трет начин. Низ A повлекуваме права $p \parallel BC$, нанесуваме $\overline{AK} = \overline{BN}$ и $L = p \cap AK$ (види цртеж 3). Ќе покажеме дека $\Delta ALK \cong \Delta BMN$. Имаме

$$\measuredangle ABK = 50^\circ,\ \measuredangle LAK = 20^\circ, \measuredangle ALB = 30^\circ.$$

Применувајќи ја синусната теорема за триаголниците ABM и ABL добиваме:

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{AB} \cdot 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 2\overline{AB} \cdot \cos 40^\circ$$

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AB} \cdot \cos 40^\circ}{0,5} = 2\overline{AB} \cdot \cos 40^\circ,$$

па $\overline{BM} = \overline{AL}$. Според признакот САС, $\Delta ALK \cong \Delta BMN$, од каде што следува дека $\measuredangle BMN = 30^\circ$.

Четврт начин. Да ставиме $\overline{AC} = \overline{BC} = b$; тогаш $\overline{BN} = \overline{AB} = 2b\sin 30^\circ$ (бидејќи ΔANB е рамнокрак), и $\overline{BM} = \frac{b}{2\cos 20^\circ}$ (ΔBCM е рамнокрак), од каде што следува

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} = 4\cos 20^\circ \sin 10^\circ = 1 - 2\sin 10^\circ. \tag{1}$$

Понатаму имаме $\overline{CN} = b - \overline{BN} = b(1 - 2\sin 10^\circ)$, а оттука

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{AC}} = 1 - 2\sin 10^\circ \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AC}}$, т.е. $\triangle BMN \sim \triangle CAN$, па затоа

$$\measuredangle BMN = \measuredangle CAN = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ.$$

6. Во рамнокрак триаголник ABC, со основа AB, е повлечена бисектриса AD. Правата низ D и нормална на AD ја сече AB во точката E. Најди $\overline{AE}$, ако $\overline{BD} = 1$.

Решение. *Прв начин.* Нека AD е симетрала на аголот кај темето A и нека $DE \perp AD$ (види цртеж 1). Опишуваме кружница околу правоаголниот $\triangle AED$, со центар во O, тогаш

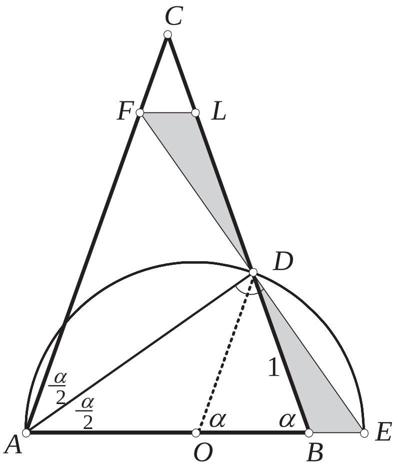
$$\overline{AO} = \overline{OE} = \overline{OD} = r$$

$$\measuredangle EOD = 2\angle EAD = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha$$

(како централен агол над ист лак).

Оттука следува дека ΔOBD е рамнокрак, т.е. $\overline{OD} = \overline{BD} = 1$, па имаме

$$\overline{AE} = 2\overline{AO} = 2\overline{OD} = 2\cdot 1 = 2.$$



цртеж 1

Втор начин. Нека DE ја сече AC во точката F, тогаш AD е и висина и тежишна линија на $\triangle AEF$, па следува дека тој е рамнокрак триаголник, т.е. $\overline{AE} = \overline{AF}$.

Нека $FL \parallel AB$, тогаш $\triangle BED \cong \triangle LFD$ (според признак ACA, бидејќи $\overline{DE} = \overline{DF}$, $\measuredangle BED = \measuredangle LDF$ како накрсни и $\measuredangle DBE = \measuredangle DLF$ како наизменични).

Од складноста на овие триаголници следува дека

$$\overline{DL} = \overline{BD} = 1, \quad \overline{BL} = 2.$$

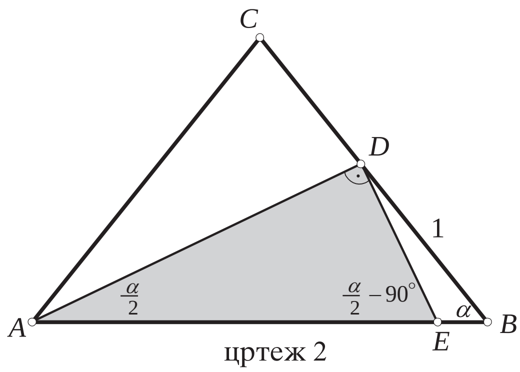
Бидејќи $\overline{AE} = \overline{AF}$ и $\overline{AF} = \overline{BL}$, следува дека $\overline{AE} = 2$.

Трет начин. Според синусната теорема за $\triangle BDE$ од $\overline{BD} = 1$ (цртеж 2) имаме

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{\overline{DE}}{\sin\alpha}, \text{ т.е. } \overline{DE} = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Слично, од $\triangle ABD$ наоѓаме

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BD}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ т.е. } \overline{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$



цртеж 2

На крај, според Питагоровата теорема од правоаголниот $\triangle AED$ наоѓаме:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 4\cos^2\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4,$$

т.е. $\overline{AE} = 2$.

Четврт начин. Од триаголникот ABD и $\overline{BD} = 1$ (види цртеж 2) според синусната теорема наоѓаме:

$$\frac{\overline{DB}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\sin\alpha}, \text{ т.е. } \overline{AD} = 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Од правоаголниот триаголник AED добиваме $\overline{AD} = \overline{AE}\cos\frac{\alpha}{2}$. Оттука заклучуваме дека $\overline{AE} = 2$.

Петти начин. Нека $DG \parallel AB$ и нека: $\overline{AE} = x$, $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, $\overline{BD} = 1$, $\overline{DC} = b-1$ (види цртеж 3), тогаш $\triangle AED \cong \triangle AFD$, според ACA (бидејќи AD е заедничка страна, $\measuredangle EAD = \measuredangle FAD = \frac{\alpha}{2}$ и аголот кај D е прав). Оттука следува дека $\overline{ED} = \overline{DF}$, т.е. D е средина на EF. Бидејќи $DG \parallel AE$, следува дека DG е средна линија во $\triangle AEF$, т.е.

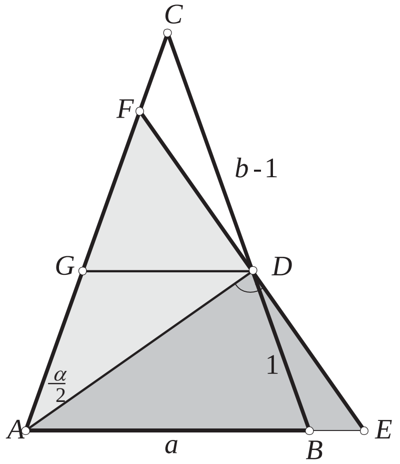
$$\overline{DG} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{x}{2}.$$

Според теоремата за симетралата AD на аголот кај темето A во $\triangle ABC$ имаме: $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$, $a : b = 1 : (b-1)$, т.е.

$$a = \frac{b}{b-1} \qquad (1)$$

Од сличноста на триаголниците ABC и GDC имаме $\overline{AB} : \overline{GD} = \overline{BC} : \overline{DC}$, $a : \frac{x}{2} = b : (b-1)$, т.е.

$$a = \frac{x}{2}\frac{b}{b-1} \qquad (2)$$



цртеж 3

Од споредбата на (1) и (2) заклучуваме дека $\frac{x}{2} = 1$, т.е. $x = 2$. Да забележиме дека до ист резултат доаѓаме, ако симетралата AD ја сече отсечката AB.

Шести начин. Нека $DF \parallel AC$ (види цртеж 4), тогаш ΔFDB е рамнокрак т.е. $\overline{FD} = \overline{BD} = 1$. Понатаму

$$\measuredangle ADF = \measuredangle DAC = \frac{\alpha}{2},$$

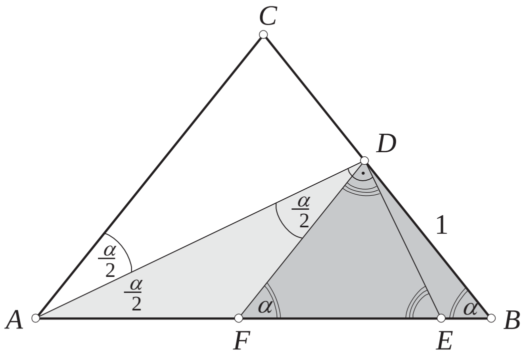
како наизменични, па следува дека $\triangle ADF$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AF} = \overline{DF} = 1$. Бидејќи

$$\measuredangle EDF = 90^\circ - \alpha \text{ и } \measuredangle FED = 90^\circ - \alpha,$$

следува дека и ΔEDF е рамнокрак, т.е.

$$\overline{EF} = \overline{DF} = 1.$$

Оттука: $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE} = 1 + 1 = 2$.



цртеж 4

40. Докажи дека $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$, каде a, b, c се должини на страните на триаголник, а α и β се неговите агли.

Решение. Ќе ја трансформираме левата страна на равенството

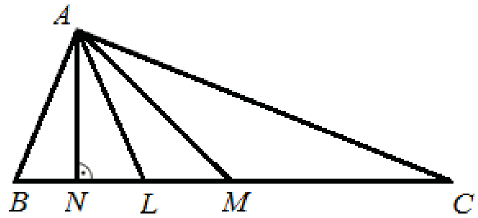
$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}{\sin^2(\pi-\gamma)}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - \sin^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}$$

Ако ја искористиме синусната теорема, имаме $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{a}{c}$ и $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{b}{c}$, од каде со замена се добива бараното равенство.

7. На страната BC на триаголникот ABC редоследно лежат точките N, L, M, при што N е најблиску до B и AN е висина, AL симетрала на $\measuredangle CAB$ и AM е тежишната линија. Нека $\measuredangle NAB=\measuredangle LAN=\measuredangle MAL=\measuredangle CAM$. Определи ги аглите на триаголникот ABC.



Решение. Од синусната теорема, применета на $\triangle ALM$ добиваме

$$\frac{\overline{AM}}{\sin\measuredangle ALM}=\frac{\overline{AL}}{\sin\measuredangle AML}. \qquad (1)$$

Од условот на задачата следува

$\sin\measuredangle ALM=90^\circ+\frac{\alpha}{4}$ и $\sin\measuredangle AML=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$,

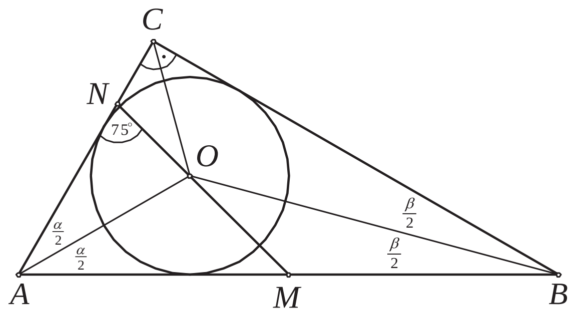
$\triangle ABL$ е рамнокрак и $\overline{AB}=\overline{AL}=c$. Со замена во равенството (1) добиваме $\overline{AM}=\frac{c\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Од друга страна, точката M е средина на страната BC, па затоа $P_{\Delta ABC}=2P_{\Delta AMC}$, односно $\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha=\overline{AM}\cdot b\cdot\sin\frac{\alpha}{4}$. Од последните две равенства добиваме

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ т.е. } 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

па затоа $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Сега лесна се добива дека

$$\alpha=90^\circ,\ \beta=90^\circ-\frac{\alpha}{4},\ \gamma=90^\circ-\beta=\frac{\alpha}{4}.$$

8. Во правоаголен триаголник $\triangle ABC$ ($\measuredangle C=90^\circ$), правата што минува низ средината на хипотенузата и центарот на впишаната кружница ја сече катетата AC во точка N под агол од 75°. Одреди ги острите агли во $\triangle ABC$.



Решение. Ако O е центар на впишаната кружница, тогаш $\frac{\alpha+\beta}{2}=45^\circ$ и $\measuredangle AOB=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}=135^\circ$. Заради претходното $\measuredangle AON=180^\circ-(75^\circ+\frac{\alpha}{2})$, $\measuredangle AOM=180^\circ-\measuredangle AON=75^\circ+\frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle BOM=135^\circ-\measuredangle AOM=60^\circ-\frac{\alpha}{2}$. За $\triangle AOM$, според синусна теорема $\frac{\overline{OM}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\overline{AM}}{\sin(75^\circ+\frac{\alpha}{2})}$ т.е. $\overline{AM}=\overline{OM}\frac{\sin(75^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. За ΔBOM според синусна теорема $\frac{\overline{OM}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\overline{BM}}{\sin(60^\circ+\frac{\alpha}{2})}$, т.е. $\overline{BM}=\overline{OM}\frac{\sin(60^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\beta}{2}}$. Точката M е средина на отсечката AB, па затоа $\overline{AM}=\overline{BM}$, т.е.

$$\overline{OM}\,\frac{\sin(75^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\overline{OM}\,\frac{\sin(60^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Ако во последното равенство замениме $\frac{\beta}{2}=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$, добиваме

$$\sin(75^\circ+\tfrac{\alpha}{2})\sin(45^\circ-\tfrac{\beta}{2})=\sin(60^\circ-\tfrac{\alpha}{2})\sin\tfrac{\alpha}{2}$$

Користејќи адициони теореми добиваме

$$\cos 120^\circ-\cos(30^\circ+\alpha)=\cos 60^\circ-\cos(60^\circ-\alpha)\Rightarrow$$

$$\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(30^\circ+\alpha)=\cos 60^\circ-\cos 120^\circ=1 \quad\Rightarrow\quad -2\sin 45^\circ\sin(15^\circ-\alpha)=1$$

$$\Rightarrow\ 2\sin 45^\circ\sin(\alpha-15^\circ)=1\Rightarrow \sin(\alpha-15^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \alpha-15^\circ=45^\circ$$

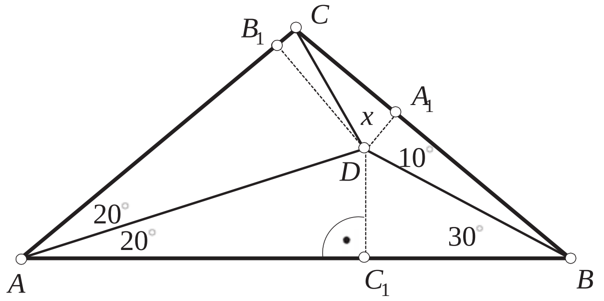
Значи, аглите на триаголникот се $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$.

9. Во рамнокрак триаголник ABC, со $\measuredangle ACB=100^\circ$, дадена е точка D, таква што $\measuredangle BAD=20^\circ$ и $\measuredangle ABD=30^\circ$. Најди го $\measuredangle BCD$.

Решение. Ако ја примениме синусната теорема за триаголниците ABD, BCD, CAD (види цртеж), добиваме

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ},\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\sin x}{\sin 10^\circ},$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin(100^\circ-x)}.$$



цртеж 2

Множејќи ги овие равенства, добиваме

$$1=\frac{\sin 30^\circ\sin x}{\sin 10^\circ\sin(100^\circ-x)},$$

$$\sin 10^\circ\sin(100^\circ-x)=\sin 30^\circ\sin x$$

$$2\sin 10^\circ\cos(x-10^\circ)=\sin x$$

$$\sin(10^\circ+x-10^\circ)+(10^\circ-x+10^\circ)=\sin x$$

$$\sin(20^\circ+x)=0,$$

од каде што, поради $0^\circ<x<100^\circ$ следува $x=20^\circ$.

10. Докажи дека

$$a\sin(\beta-\gamma)+b\sin(\gamma-\alpha)+c\sin(\alpha-\beta)=0,$$

каде a,b,c се должини на страни на триаголник, а α,β,γ се соодветните агли.

Решение. Од синусна теорема имаме

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

од каде добиваме

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\ \text{ и }\ \frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Според тоа

$$
\begin{aligned}
a\sin(\beta-\gamma)+b\sin(\gamma-\alpha)+c\sin(\alpha-\beta) &= \\
&= a[\sin(\beta-\gamma)+\tfrac{b}{a}\sin(\gamma-\alpha)+\tfrac{c}{a}\sin(\alpha-\beta)] \\
&= a[\sin(\beta-\gamma)+\tfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin(\gamma-\alpha)+\tfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\beta)] \\
&= \tfrac{a}{\sin\alpha}[\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)]=(*)
\end{aligned}
$$

За аглите на триаголникот α,β,γ исполнето е равенството $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Бидејќи $\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$, и $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, $\alpha+\gamma=\pi-\beta$, $\beta+\gamma=\pi-\alpha$ добиваме

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]=\tfrac{1}{2}[\cos(\pi-2\beta)-\cos(\pi-2\gamma)]$$

$$\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)=\tfrac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma+\alpha)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]=\tfrac{1}{2}[\cos(\pi-2\gamma)-\cos(\pi-2\alpha)]$$

$$\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=\tfrac{1}{2}[\cos(\gamma-\alpha+\beta)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)]=\tfrac{1}{2}[\cos(\pi-2\alpha)-\cos(\pi-2\beta)].$$

Ако замениме во (*) добиваме:

$$
\begin{aligned}
(*) &= \tfrac{a}{2\sin\alpha}[\cos(\pi-2\beta)-\cos(\pi-2\gamma)+\cos(\pi-2\gamma) \\
&\quad -\cos(\pi-2\alpha)+\cos(\pi-2\alpha)-\cos(\pi-2\beta)] \\
&= \tfrac{a}{2\sin\alpha}\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

11. Докажи дека

$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=0,$$

каде α,β,γ се агли во триаголник а a,b и c се соодветните страни.

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=k$, па

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} &= (\tfrac{a}{\sin\alpha})^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+(\tfrac{b}{\sin\beta})^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+ \\
&\quad +(\tfrac{c}{\sin\gamma})^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) \\
&= k^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+k^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+k^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) \\
&= k^2[\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)] \\
&= k^2[\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+\sin\beta(\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)+ \\
&\quad +\sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)]= \\
&= k^2[\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha- \\
&\quad -\sin\beta\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta-\sin\gamma\cos\alpha\sin\beta= \\
&= k^2\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

12. Нека O е центарот на опишаната кружница, а T тежиштето на триаголникот ABC, кој не е рамностран. Докажи дека OT е нормална на тежишната линија CC_1 ако и само ако за страните на триаголникот важи $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2\overline{AB}^2$.

Решение. Нека γ е аголот на триаголникот кај темето C, нека R е радиусот на опишаната кружница и нека a, b, c се страните BC, CA, AB соодветно, на триаголникот ABC. Тогаш, $\overline{CC_1} = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$, $\overline{OC_1} = R\cos\gamma$ и $c = 2R\sin\gamma$. Ако OT е нормално на CC_1, бидејќи T ја дели CC_1 во однос 2:1, добиваме дека $R^2 = \overline{OT}^2 + \frac{4\overline{CC_1}^2}{9}$ и $R^2\cos^2\gamma = \overline{OT}^2 + \frac{\overline{CC_1}^2}{9}$, од каде со одземање се добива $R^2\sin^2\gamma = \frac{\overline{CC_1}^2}{3}$, односно $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$, т.е. $2c^2 = a^2 + b^2$. Обратно, нека X е проекцијата на точката O на CC_1 и нека $\overline{C_1X} : \overline{CC_1} = k$. Тогаш,

$$R^2 = \overline{OX}^2 + (1-k)^2\overline{CC_1}^2,\ R^2\cos^2\gamma = \overline{OX}^2 + k^2\overline{CC_1}^2,$$

од каде со одземање и со користење на равенството $2c^2 = a^2 + b^2$ се добива

$$\frac{c^2}{4} = R^2\sin^2\gamma = (1-2k)\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} = (1-2k)\frac{3c^2}{4},$$

т.е. $k = \frac{1}{3}$, односно $X \equiv T$.

12. Точката D на страната AB на $\triangle ABC$ и точката E на отсечката CD се такви што $\overline{AD} = 2\overline{BD}$, $\measuredangle AED = \measuredangle ACB$ и $2\measuredangle BED = \measuredangle ABC$. Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Нека $\theta = \measuredangle ADC$, направи цртеж. При стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$, од синусната теорема следува, дека $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\sin\theta}{\sin\gamma}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\beta}{2}}$, па затоа

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\gamma}. \tag{1}$$

На полуправата ED постои единствена точка F таква што $\measuredangle EAF = \alpha$. Тогаш $\measuredangle AFE = \beta$, што значи дека четириаголникот $AFBE$ е тетивен. Повторно од синусната теорема следува дека $\frac{\overline{AE}}{\overline{FE}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{FE}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma+\frac{\beta}{2})}$, па затоа

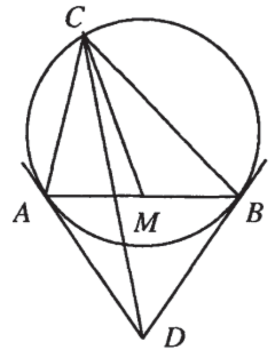
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\sin\beta\sin(\gamma+\frac{\beta}{2})}{\sin^2\alpha}. \tag{2}$$

Сега од (1) и (2) добиваме

$$\sin^2\alpha = \sin\gamma\cos\frac{\beta}{2}\sin(\gamma+\frac{\beta}{2}).$$

Десната страна на последното равенство е еднаква на $\frac{\sin\gamma(\sin\alpha+\sin\gamma)}{2}$, па затоа за $x = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ добиваме $2x^2 = x + 1$, т.е. $x = 1$ или $x = -\frac{1}{2}$. Но, $x > 0$, па затоа $x = 1$, што значи $\alpha = \gamma$, т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак.

14. Тангентите на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$ повлечени во точките A и B се сечат во точката D. Ако M е средината на страната AB докажи дека, $\measuredangle ACM = \measuredangle BCD$.



Решение. Од синусната теорема за триаголниците AMC и BMC следува

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}=\frac{\sin\measuredangle ACM}{\sin\alpha},\quad \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}=\frac{\sin(\gamma-\measuredangle ACM)}{\sin\beta}.$$

Оттука, бидејќи $\overline{AM}=\overline{BM}$, добиваме

$$\frac{\sin\measuredangle ACM}{\sin\alpha}=\frac{\sin(\gamma-\measuredangle ACM)}{\sin\beta},\text{ т.е.}$$

$$\operatorname{tg}\measuredangle ACM=\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta+\sin\alpha\cos\gamma}. \qquad (1)$$

Од синусната теорема за триаголниците ADC и BDC добиваме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\sin\measuredangle BCD}{\sin(\beta+\gamma)},\quad \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\sin(\gamma-\measuredangle BCD)}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Оттука, бидејќи $\overline{AD}=\overline{BD}$, добиваме $\frac{\sin\measuredangle BCD}{\sin\alpha}=\frac{\sin(\gamma-\measuredangle BCD)}{\sin\beta}$, т.е.

$$\operatorname{tg}\measuredangle BCD=\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta+\sin\alpha\cos\gamma}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\operatorname{tg}\measuredangle ACM=\operatorname{tg}\measuredangle BCD$. Понатаму, бидејќи и двата агли се остри, а функцијата tg строго монотоно расте на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$ следува $\measuredangle ACM=\measuredangle BCD$.

15. Од сите триаголници ABC со фиксна големина α на аголот $\measuredangle BAC$ и фиксна должина a на страната BC, најголем периметар има рамнокракиот триаголник со основа BC. Докажи!

Решение. Нека R е радиусот на опишаната кружица околу триаголник кој ги задоволува условите на задачата. Од синусна теорема следува дека $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, што значи дека должината на радиусот на опишаната кружници околу било кој триаголник кој што ги исполнува условите на задачата е константна. Периметарот на троаголникот ќе биде најголем кога збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$ е најголем. Сега, прво од синусна теорема, а потоа од адиционите формули следува

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{AC}&=2R(\sin\gamma+\sin\beta)=4R\sin\tfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta-\gamma}{2}\\&=4R\sin(90^\circ-\tfrac{\alpha}{2})\cos\tfrac{\beta-\gamma}{2}\\&=4R\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta-\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Но, R и α се константни, па затоа збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$ ќе биде најголем кога $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ ќе биде најголем, што значи кога $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=1$. Според тоа, збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$, т.е. периметарот има најголема вредност кога $\beta=\gamma$, односно кога ABC е рамнокрак триаголник со основа BC.

16. Нека a,b,c се страните, а α,β,γ соодветните агли во триаголникот ABC со плоштина P. Докажи дека

$$a^2(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)+b^2(\sin 2\gamma+\sin 2\alpha)+c^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=12P.$$

Решение. Ќе ги прегрупираме собироците на левата страна од равенството во облик

$$(a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha) + (b^2\sin 2\gamma + c^2\sin 2\beta) + (c^2\sin 2\alpha + a^2\sin 2\gamma)\ .$$

Со примена на синусната теорема и формулата за синус од двоен агол, ќе ги трансформираме збировите во заградите. Од $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, т.е. $a\sin\beta = b\sin\alpha$, со замена, првиот збир го добива обликот

$$\begin{aligned} a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha &= 2a^2\sin\beta\cos\beta + 2b^2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= 2ab\sin\alpha\cos\beta + 2ab\sin\beta\cos\alpha \\ &= 2ab(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ &= 2ab\sin(\alpha+\beta) = 2ab\sin(\pi-\gamma) \\ &= 2ab\sin\gamma = 4P. \end{aligned}$$

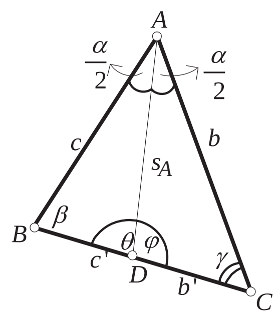
Аналогно, добиваме $b^2\sin 2\gamma + c^2\sin 2\beta = 4P$ и $c^2\sin 2\alpha + a^2\sin 2\gamma = 4P$. Според тоа,

$$(a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha) + (b^2\sin 2\gamma + c^2\sin 2\beta) + (c^2\sin 2\alpha + a^2\sin 2\gamma) = 12P\ ,$$

што и требаше да се докаже.

17. Катетите на правоаголниот триаголник имаат должини a и b. Пресметај ја должината на симетралата на правиот агол.

Решение. Ќе разгледаме произволен триаголник ABC, во кој што $\measuredangle BAC = \alpha$ и AD е негова симетрала, при што $\overline{BD} = c'$, $\overline{DC} = b'$, $\overline{AB} = c$ и $\overline{AC} = b$ (види цртеж). Ако воведеме ознаки $\measuredangle BDA = \theta$ и $\measuredangle ADC = \varphi$, од триаголниците BDA и ADC, според синусна теорема добиваме



$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\sin\theta} \text{ и } \frac{\overline{DC}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{AC}}{\sin\varphi}\ , \qquad (1)$$

односно

$$\frac{c'}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\sin\theta} \text{ и } \frac{b'}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sin\varphi}\ . \qquad (2)$$

Од равенството $\theta + \varphi = 180^\circ$, користејќи ги адиционите теореми, добиваме

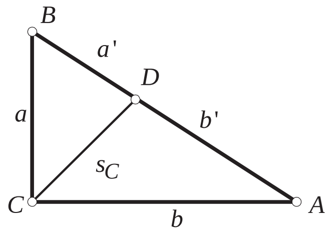
$$\sin\theta = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin 180^\circ\cos\varphi - \cos 180^\circ\sin\varphi = \sin\varphi\ ,$$

па од равенствата (2) имаме

$$\frac{c'}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\theta} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi} = \frac{b'}{b}\ .$$

Да забележиме дека ако a е должината на третата страна, тогаш $b' + c' = a$. Ако $n = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$ е коефициентот на пропорционалност, тогаш $c' = nc, b' = nb$, од каде се добива $nc + nb = a$, т.е. $n = \frac{a}{b+c}$, па според тоа $c' = \frac{ac}{b+c}, b' = \frac{ab}{b+c}$.

Во наредниот дел, користејќи го првиот дел на оваа задача и претходната задача 891 ќе ја пресметаме должината на симетралата на правиот агол во правоаголен триаголник ABC, при што ќе претпоставиме дека правиот агол е кај темето C (види цртеж). Во овој случај



$$a' = \frac{ca}{a+b},\ b' = \frac{cb}{a+b}, \qquad (3)$$

каде $c = \overline{AB}$ е хипотенузата на правоаголниот триаголник, и

$$s_C^2 = ab - a'b'. \qquad (4)$$

Ако во (4) ги замениме (3) и ја искористиме Питагоровата теорема, добиваме:

$$s_C^2 = ab - \frac{c^2}{(a+b)^2}ab = ab(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}) = ab\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Конечно, $s_C = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

18. Во внатрешноста на триаголникот ABC избрана е точка M така што

$$\measuredangle MAB = \measuredangle MBC = \measuredangle MCA = \varphi.$$

Докажи дека

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

Решение. Имаме $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABM} + P_{\Delta BCM} + P_{\Delta CAM}$. Натаму важи

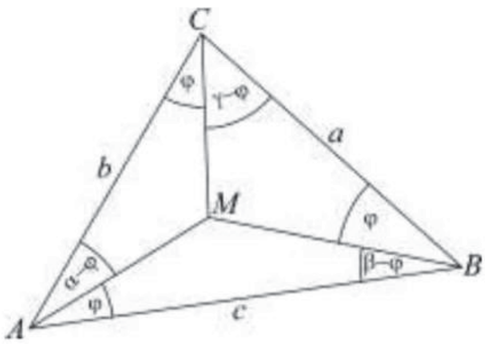
$$P_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin(180^\circ - (\varphi + \beta - \varphi)) = \frac{1}{2}\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin\beta$$

$$P_{\Delta BCM} = \frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin(180^\circ - (\varphi + \gamma - \varphi)) = \frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin\gamma$$

$$P_{\Delta CAM} = \frac{1}{2}\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin(180^\circ - (\varphi + \alpha - \varphi)) = \frac{1}{2}\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin\alpha,$$

па оттука за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P = \frac{1}{2}(\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin\beta + \overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin\gamma + \overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin\alpha).$$



Сега да ја примениме синусната теорема на триаголникот CAM:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AC}} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - (\varphi + \alpha - \varphi))} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

односно $\overline{MA} = b\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$. Слично ако ја примениме синусната теорема на триаголниците ABM и BCM добиваме $\overline{MB} = c\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$ и $\overline{MC} = a\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$. Последниве три равенства ги замениме во изразот за плоштината на триаголникот ABC и добиваме

$$P = \frac{1}{2}(bc\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin\beta}\sin\beta + ac\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\gamma + ab\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin\gamma}\sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}bc\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha} + \frac{1}{2}ac\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta} + \frac{1}{2}ab\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma}$$

Но, за плоштината P на триаголникот ABC важи

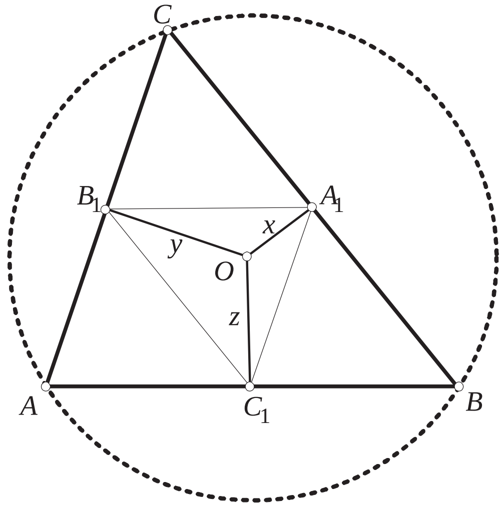
$$P = \frac{1}{2}bc\sin\beta = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

па затоа

$$P = \frac{P}{\sin\alpha}\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha} + \frac{P}{\sin\beta}\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta} + \frac{P}{\sin\gamma}\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma}.$$

Делејќи го последново равенство со $P\sin^2\varphi$ го добиваме бараното равенство.

19. Должините на страните на остроаголниот триаголник ABC се a, b и c, а растојанијата од центарот на опишаната кружница до страните a, b и c се x, y и z, соодветно. Докажи дека $ayz + bzx + cxy = \frac{abc}{4}$.



Решение. Нека C_1, A_1 и B_1 се средините на страните AB, BC и CA, соодветно, O е центарот на опишаната кружница и α, β и γ се аглите во триаголникот ABC. Триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични, со коефициент на сличност 2 и затоа

$$P_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{P_{\triangle ABC}}{4} = \frac{abc}{16R},$$

каде R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Бидејќи x, y и z се растојанијата од центарот на опишаната кружница до страните a, b и c, имаме $\overline{OA_1} = x$, $\overline{OB_1} = y$ и $\overline{OC_1} = z$. Од тетивноста на четириаголниците CB_1OA_1, AC_1OB_1 и BA_1OC_1 следува дека

$$\measuredangle B_1OA_1 = 180^\circ - \gamma,\ \measuredangle C_1OB_1 = 180^\circ - \alpha \text{ и } \measuredangle A_1OC_1 = 180^\circ - \beta.$$

Тогаш:

$$P_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{xy\sin(180^\circ-\gamma)}{2} + \frac{yz\sin(180^\circ-\alpha)}{2} + \frac{zx\sin(180^\circ-\beta)}{2} = \frac{xy\sin\gamma}{2} + \frac{yz\sin\alpha}{2} + \frac{zx\sin\beta}{2}$$

Од синусната теорема имаме: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\beta = \frac{b}{2R}$ и $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Заменувајќи ги во горното равенство добиваме

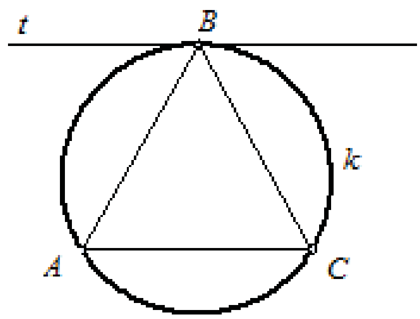
$$P_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{xyc}{2R} + \frac{yza}{2R} + \frac{zxb}{2R}.$$

Тогаш

$$\frac{abc}{16R} = \frac{xyc}{4R} + \frac{yza}{4R} + \frac{zxb}{4R}$$

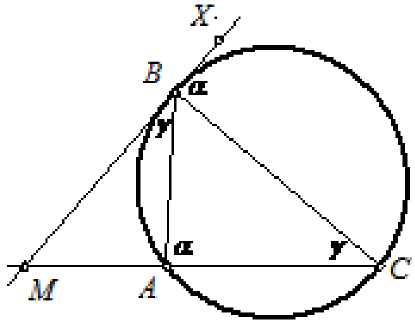
и оттука се добива бараното равенство.

20. Тангентата t во точката B кон опишаната кружница k околу триаголникот ABC ја сече правата AC во точка M Определи го $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}$ ако $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$.



Решение. Ако триаголникот ABC е рамнокрак со $\overline{AB} = \overline{BC}$, тогаш $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$. Правата која минува низ B и е нормална на тангентата t

повлечена во B минува низ ценарот на опишаната кружница и е нормална на отсечката AC. Според тоа $t \parallel AC$ и $t \cap AC = \varnothing$ (види цртеж. Затоа овој случај не го разгледуваме (не ги исполнува условите од задачата).



Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $\overline{AB} < \overline{BC}$ (цртеж десно). Нека X е точка од тангентата t така што B е меѓу M и X (види цртеж). Аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle MBA$ се еднакви , како перифериски агол над кружен лак и агол меѓу тетива определена со крајните точки на кружниот лак и тангентата во една од крајните точки на лакот. Од исти причини точно е и равенството $\measuredangle XBC = \measuredangle CAB$. Според тоа

$$\sin\measuredangle MBC = \sin(180^\circ - \measuredangle CBX) = \sin\measuredangle CBX = \sin\measuredangle CAB. \tag{1}$$

Од синусната теорема за триаголникот ABC имаме

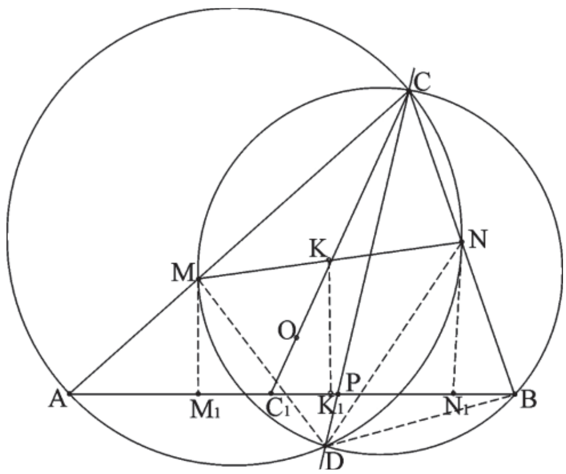
$$\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle CAB} = \frac{\overline{BA}}{\sin\measuredangle BCA} = \frac{\overline{BA}}{\sin\measuredangle MBA}. \tag{2}$$

Од формулите за пресметување на плоштина на триаголник и од равенствата (1) и (2), имаме

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \frac{P_{\triangle MBA}}{P_{\triangle MBC}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{BA}\cdot\sin\measuredangle MBA}{\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\measuredangle MBC} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\,\frac{\sin\measuredangle MBA}{\overline{BA}}\,\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle MBC}$$

$$= \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\,\frac{\sin\measuredangle MBA}{\overline{BA}}\,\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle BAC} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\cdot 1 = k^2.$$

21. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека M и N се внатрешни точки на страните AC и BC, соодветно, а K е средината на отсечката MN. Кружниците опишани околу триаголниците CAN и BCM се сечат во точката D. Докажи дека правата CD минува низ центарот O на опишаната кружница околу триаголникот ABC ако и само ако симетралата на страната AB минува низ точката K.



Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница опишана околу триаголникот ABC, а C_1 е пресекот на правите CO и AB. Лесно се докажува дека важи равенството

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}.$$

Со P да го означиме пресекот на правите CD и AB. Ќе докажеме дека симетралата на страната AB минува низ точката K ако и само ако $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$, со што задачата е решена.

Нека M_1, N_1, K_1 се ортогоналните проекции соодветно на точките M, N, K врз правата AB. Симетралата на страната AB минува низ K ако и сако ако $\overline{AM_1} = \overline{BN_1}$, што е еквивалентно со

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\cos B}{\cos A}.$$

Понатаму, од

$$\measuredangle BND = \pi - \measuredangle DNC = \measuredangle MAD \text{ и } \measuredangle NBD = \pi - \measuredangle CMD = \measuredangle AMD$$

следува дека триаголниците AMD и NBD се слични. Затоа,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{BD}}.$$

Од синусната теорема следува

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{BD}} = \frac{\sin ACD}{\sin BCD}.$$

Од друга страна, според синусната теорема за триаголникот APC добиваме

$$\frac{\overline{AP}}{\sin ACP} = \frac{\overline{CP}}{\sin A},$$

а за триаголникот BPC имаме

$$\frac{\overline{BP}}{\sin BCP} = \frac{\overline{CP}}{\sin B}.$$

Од досега изнесеното следува

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\sin ACP \sin B}{\sin BPC \sin A} = \frac{\overline{MD} \sin B}{\overline{BD} \sin A} = \frac{\overline{AM} \sin B}{\overline{BN} \sin A}.$$

Од последната релација и од $\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\cos B}{\cos A}$ добиваме

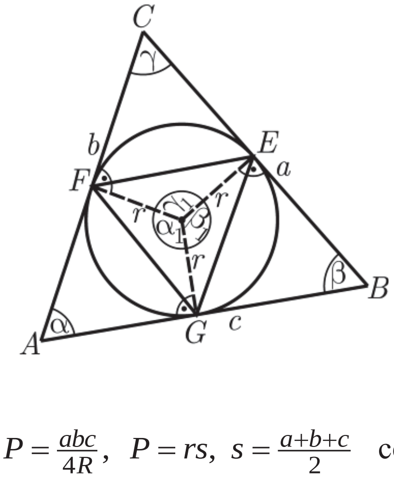
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AM} \sin B}{\overline{BN} \sin A} = \frac{\cos B \sin B}{\cos A \sin A} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A},$$

што и требаше да се докаже.

22. Во триаголник ABC со страни a, b и c, вписана е кружница. Допирните точки на кружницата со страните на триаголникот определуваат триаголник EFG. Пресметај ја плоштината на $\triangle EFG$, ако плоштината на $\triangle ABC$ е P.

Решение. Нека се R и r радиусите на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$ соодветно, а O центарот на впишаната кружница. Нека е P_1 е плоштината на $\triangle EFG$. Важи

$$P_1 = P_{\triangle EOF} + P_{\triangle FOG} + P_{\triangle GOE}$$
$$= \frac{r^2}{2}(\sin\alpha_1 + \sin\beta_1 + \sin\gamma_1)$$



Од друга страна

$$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha,\ \beta_1 = 180^\circ - \beta \text{ и } \gamma_1 = 180^\circ - \gamma,$$

па затоа

$$P_1 = \frac{r^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Користејќи ја синусната теорема добиваме

$$P_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right) = \frac{r^2}{4R}(a+b+c).$$

Ако се искористат уште и познатите равенства $P = \frac{abc}{4R},\ P = rs,\ s = \frac{a+b+c}{2}$ се добива $P_1 = \frac{2P^3}{sabc}$.

23. На страната AB на $\triangle ABC$ избрани се точки M и N при што M е меѓу

A и N. Правата низ M паралелна со AC ја сече опишаната кружница околу $\triangle MNC$ во точката P, а правата низ M паралелна со NC ја сече опишаната кружница околу $\triangle AMC$ во точката Q. Аналогно правата низ N паралелна со BC ја сече опишаната кружница околу $\triangle MNC$ во точката K и правата низ N паралелна со MC ја сече опишаната кружница околу $\triangle BNC$ во точката L.

а) Докажи, дека точките P,Q и C лежат на една права.

б) Докажи, дека точките P,Q,K и L лежат на една кружница ако и само ако $\overline{AM}=\overline{BN}$.

Решение. а) Имаме

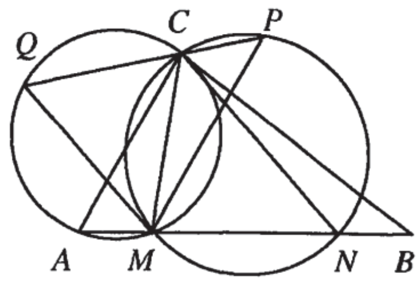
$$\measuredangle QCA=\measuredangle QMA=\measuredangle CNA \text{ и } \measuredangle PCN=\measuredangle PMN=\measuredangle NAC.$$

Според тоа,

$$\measuredangle QCP=\measuredangle QCA+\measuredangle ACN+\measuredangle NCP$$

$$=\measuredangle CNA+\measuredangle ACN+\measuredangle NAC=180^\circ$$

т.е. точките P,Q и C лежат на една права.



б) Нека $\measuredangle ACM=\varphi$ и $\measuredangle NCM=\psi$, а R_1 и R_2 се радиусите на опишаните кружници околу $\triangle AMC$ и $\triangle MNC$, соодветно. Од синусната теорема следува

$$\overline{QC}=2R_1\sin\measuredangle QMC=2R_1\sin\psi,$$

$$\overline{CP}=2R_1\sin\measuredangle PMC=2R_2\sin\varphi,$$

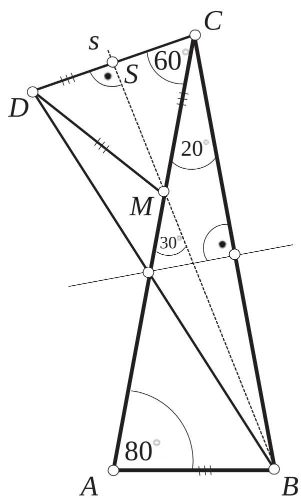
$$\overline{AM}=2R_1\sin\varphi,\ \overline{BM}=2R_2\sin\psi.$$

Според тоа, $\overline{QC}\cdot\overline{CP}=\overline{AM}\cdot\overline{BM}$. Како во а) се докажува дека точките L,C и K лежат на една права, а на потполно ист начин како погоре се докажува дека $\overline{KC}\cdot\overline{CL}=\overline{AN}\cdot\overline{BN}$. Бидејќи кружницата опишана околу $\triangle MNC$ минува низ K,C и P, не е можно правите PQ и KL да се совпаѓаат. Според тоа, точките P,Q,K и L лежат на една кружница ако и само ако $\overline{QC}\cdot\overline{CP}=\overline{KC}\cdot\overline{CL}$ ако и само ако $\overline{AM}\cdot\overline{BM}=\overline{AN}\cdot\overline{BN}$ ако и само ако $\overline{AM}\cdot\overline{MN}=\overline{BN}\cdot\overline{MN}$ ако и само ако $\overline{AM}=\overline{BN}$.

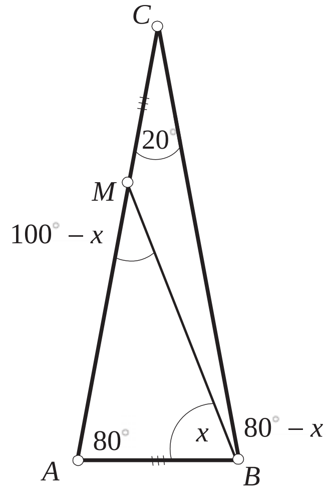
24. Даден е рамнокрак триаголник ABC со краци AC и BC и агол меѓу нив од 20°. На кракот CA е нанесена отсечка $\overline{CM}=\overline{AB}$. Да се најде големината на аголот ABM.

Решение. *Прв начин.* Нека a е симетрала на страната BC (види цртеж 1). Тогаш $D=\delta_a(A)$, $B=\delta_a(C)$, $C=\delta_a(B)$, па $\triangle ABC\cong\triangle DCB$. Понатаму, $\overline{CM}=\overline{CD}$ и $\measuredangle DCM=\measuredangle DCB-\measuredangle MCB=80^\circ-20^\circ=60^\circ$. Тоа, пак, значи дека триаголникот CDM е рамностран. Правата s симетрала на $\measuredangle CMD$, па $\measuredangle CMS=30^\circ=\measuredangle AMB$, од каде добиваме $\measuredangle ABM=70^\circ$.

Втор начин. Да го означиме бараниот агол со x (види цртеж 2) и да ја примениме синусната теорема за триаголниците ABM и BCM. Последователно добиваме:



цртеж 1



цртеж 2

$$\frac{\overline{MB}}{\sin 80^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin(100^\circ-x)}\,; \qquad \frac{\overline{MB}}{\sin 20^\circ}=\frac{\overline{MC}}{\sin(80^\circ-x)}\,;$$

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\sin(80^\circ-x)}{\sin(100^\circ-x)}\,; \qquad \frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos(10^\circ+x)}{\cos(10^\circ-x)}$$

$$(\cos x\cos 10^\circ+\sin x\sin 10^\circ)2\sin 10^\circ=\cos x\cos 10^\circ-\sin x\sin 10^\circ$$

$$2\sin 10^\circ(\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\,\mathrm{tg}x)=\cos 10^\circ-\sin 10^\circ-\mathrm{tg}x$$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{2\cos 10^\circ(\frac{1}{2}-\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ(\sin 10^\circ+\frac{1}{2})}=\mathrm{ctg}10^\circ\,\frac{\sin 30^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ+\sin 30^\circ}=\mathrm{ctg}\,20^\circ=\mathrm{tg}\,70^\circ,$$

т.е. $x=70^\circ$.

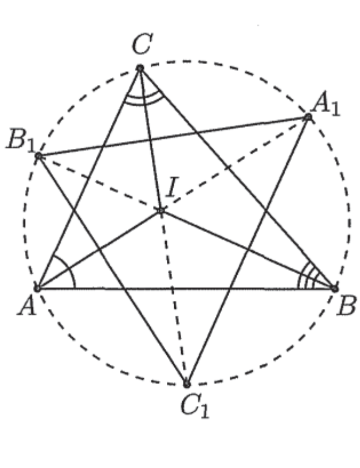
25. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и A_1, B_1 и C_1 се центрите на опишаните кружници околу $\triangle BIC, \triangle CIA$ и $\triangle AIB$, соодветно. Докажи, дека

а) Правите AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во една точка.

б) $\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}}=\frac{R}{2r}$, каде R и r се радиусите на впишаната и опишаната кружница на $\triangle ABC$, соодветно.

Решение. а) Имаме

$$\measuredangle BIC_1=\frac{180^\circ-\measuredangle BC_1I}{2}=\frac{180^\circ-2\measuredangle BAI}{2}$$
$$=\frac{180^\circ-\measuredangle BAC}{2}=\measuredangle IBC+\measuredangle BCI.$$



Според тоа, точките C, I, C_1 лежат на една права. Аналогно и правите AA_1 и BB_1 ја содржат точката I.

б) Бидејќи $\measuredangle BC_1I=2\measuredangle BAI=\measuredangle BAC$, заклучуваме дека C_1 лежи на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и е средина на лакот AB кој не ја содржи точката C. Аналогно важи и за точките A_1 и B_1. Тогаш

$$\measuredangle A_1BC_1 = \measuredangle ABC_1 + \measuredangle CBA + \measuredangle A_1BC = \frac{\measuredangle C}{2} + \measuredangle B + \frac{\measuredangle A}{2} = 90^\circ + \frac{\measuredangle B}{2}$$

и од синусната теорема добиваме $\overline{A_1C_1} = 2R\cos\frac{\measuredangle B}{2}$. Аналогно, $\overline{B_1C_1} = 2R\cos\frac{\measuredangle A}{2}$.

Бидејќи $\measuredangle A_1C_1B_1 = 90^\circ - \frac{\measuredangle C}{2}$, добиваме дека

$$P_{A_1B_1C_1} = 2R^2\cos\frac{\measuredangle A}{2}\cos\frac{\measuredangle B}{2}\cos\frac{\measuredangle C}{2}.$$

Сега бараното равенство следува од познатата формула $\cos\frac{\measuredangle A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, аналогните формули за другите агли, Хероновата формула и $abc = 4RP,\ P = pr$.

26. Во остроаголен $\triangle ABC$ со плоштина 1 избрани се точки $A_1 \in BC,\ B_1 \in CA,$ $C_1 \in AB$ така што $\measuredangle CC_1B = \measuredangle AA_1C = \measuredangle BB_1A = \varphi$, каде φ е остар агол. Отсечките $AA_1,\ BB_1$ и CC_1 се сечат во точките M, N и P.

а) Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle MNP$ се совпаѓа со ортоцентарот на $\triangle ABC$.

б) Ако $P_{MNP} = 2-\sqrt{3}$, определи го аголот φ.

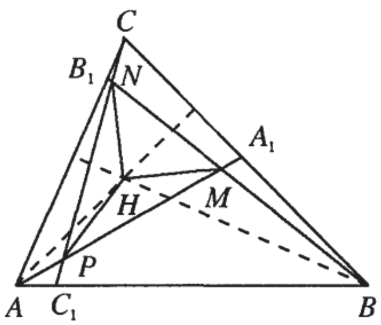
Решение. а) Нека

$AA_1 \cap BB_1 = M,\ CC_1 \cap BB_1 = N$ и $CC_1 \cap AA_1 = P$.

Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на триаголникот. Имаме

$$\measuredangle PMA = \varphi - \measuredangle B_1BC = \varphi - (\varphi - \gamma) = \gamma$$

и аналогно $\measuredangle MNP = \alpha$ и $\measuredangle NPM = \beta$. Според тоа, $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.



Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$. Од равенството $\measuredangle HCC_1 = \measuredangle HBB_1 = \measuredangle HAA_1 = 90^\circ - \varphi$ следува дека четириаголниците $ABMH,\ BCNH,\ ACHP$ се тетивни. Според тоа,

$$\measuredangle HMA = \measuredangle HBA = 90^\circ - \alpha \text{ и } \measuredangle HPM = 180^\circ - \measuredangle APH = \measuredangle ACH = 90^\circ - \alpha,$$

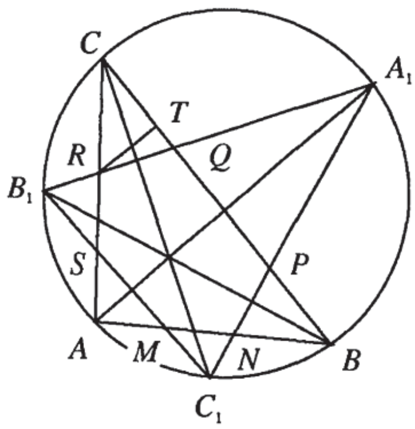
од каде следува дека H е центар на опишаната кружница околу $\triangle MNP$.

б) Докажавме дека точките A, B, M и H лежат на една кружница. Од синусната теорема имаме $\frac{\overline{MH}}{\sin(90^\circ-\varphi)} = \frac{c}{\sin(180^\circ-\gamma)}$, т.е. $\overline{MH} = 2R\cos\varphi$. Ако земеме предвид дека MH е радиус на опишаната кружница околу $\triangle MNP$ добиваме дека коефициентот на сличност за $\triangle MNP$ и $\triangle ABC$ е $2\cos\varphi$. Според тоа, $4\cos^2\varphi = 2-\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos 2\varphi = -\sqrt{3}$ и како $0^\circ < 2\varphi < 180^\circ$ добиваме $2\varphi = 150^\circ$, т.е. $\varphi = 75^\circ$.

27. Симетралите на $\measuredangle BAC, \measuredangle ABC$ и $\measuredangle ACB$ во $\triangle ABC$ ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките A_1, B_1 и C_1, соодветно. Страната AB ги сече правите A_1C_1 и A_1B_1 во точките P и Q, соодветно, а страната AC ги сече правите B_1A_1 и B_1C_1 во точките R и S, соодветно.

а) Докажи дека висината во $\triangle CRQ$ повлечена во темето R е еднаква на радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

б) Докажи, дека правите MQ, NR и SP се сечат во една точка.



Решение. а) Ако RT е висината во $\triangle CRQ$ повлечена во темето R, тогаш

$$\overline{RT} = \overline{CR}\sin\gamma\,. \tag{1}$$

Од синусната теорема за $\triangle B_1RC$ следува

$$\overline{CR} = \frac{\overline{B_1C}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2R_1\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

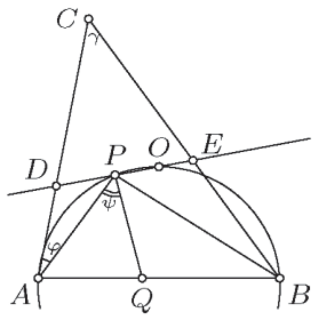
каде R_1 е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Со замена во (1) добиваме

$$\overline{RT} = 4R_1\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\,.$$

Но, $r = 4R_1\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, каде r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, па затоа $\overline{RT} = r$.

б) Аналогно на а) висината повлечена од N во $\triangle BNP$ е еднаква на r, што значи дека NR е паралелна со BC и е на растојание r од неа. Според тоа, $I \in NR$, каде I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Аналогно се докажува дека I лежи на правите MQ и SR.

28. Нека O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Права која минува низ O ги сече страните AC и BC во точките D и E, соодветно и ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABO$ во точка P (внатрешна за $\triangle ABC$) различна од O. Точката Q припаѓа на страната AB и важи $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{PE}}$. Докажи, дека $\measuredangle APQ = 2\measuredangle CAP$.



Решение. Да означиме $\measuredangle PAD = \varphi$, $\measuredangle QPA = \psi$ и $\measuredangle BAC = \gamma$. Од

$$\measuredangle APB = 2\gamma \text{ и } \measuredangle DAP + \measuredangle EBP = \measuredangle APB - \measuredangle ACB = \gamma$$

следува

$$\measuredangle PBE = \gamma - \varphi \text{ и } \measuredangle BPQ = 2\gamma - \psi\,.$$

Бидејќи $\measuredangle APD = \measuredangle BPE = 90^\circ - \gamma$, добиваме

$$\measuredangle ADP = 90^\circ + \gamma - \varphi \text{ и } \measuredangle BEP = 90^\circ + \varphi\,.$$

Од синусната теорема применета на триаголниците APD и PBE следува

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{PE}} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\gamma-\varphi)\cos(\gamma-\varphi)}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(2\gamma-2\varphi)}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\,.$$

Од друга страна

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{QB}} = \frac{\sin\psi}{\sin(2\gamma-\psi)}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}\,.$$

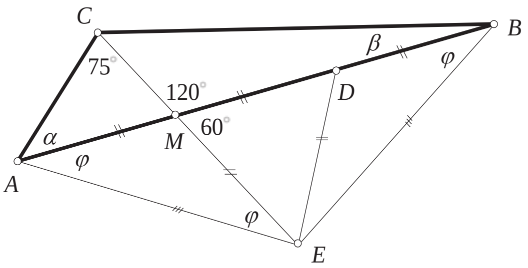
Сега условот $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{PE}}$ се сведува на $f(2\varphi) = f(\psi)$, каде

$$f(x) = \frac{\sin(2\gamma - x)}{\sin x} = \sin 2\gamma \operatorname{ctg} x - \cos 2\gamma .$$

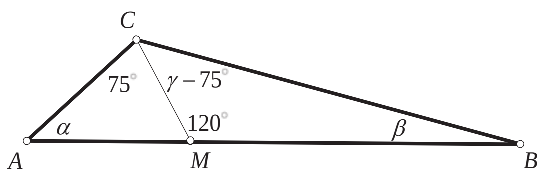
Јасно, функцијата f строго опаѓа на интервалот $(0, 2\gamma)$, па мора да важи $\psi = 2\varphi$.

29. Точката M припаѓа на страната AB на $\triangle ABC$ и е таква што $\overline{BM} = 2\overline{AM}$, $\measuredangle ACM = 75^\circ$ и $\measuredangle BMC = 120^\circ$. Да се пресметаат аглите на $\triangle ABC$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи аголот BMC е надворешен за $\triangle AMC$ (види цртеж 1), следува дека $\alpha = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.



цртеж 1



цртеж 2

На правата CM да определиме точка E, таква што $\overline{CE} = \overline{AE}$, т.е. $\triangle ACE$ да биде рамнокрак, со основа AC и агли при основата од 75°. Тогаш $\measuredangle MAE = \measuredangle MEA = 30^\circ$, т.е. $\triangle AEM$ е рамнокрак со краци $\overline{AM} = \overline{ME}$. Нека D е средина на MB; тогаш од условот на задачата $\overline{BM} = 2\overline{AM}$, следува дека $\overline{AM} = \overline{MD} = \overline{DB}$. Поради $\measuredangle DME = 60^\circ$ и $\overline{MD} = \overline{ME}$ следува дека $\triangle MDE$ е рамностран, т.е. $\overline{MD} = \overline{DE}$. Од $\overline{DE} = \overline{DB}$ следува дека триаголникот BDE е рамнокрак, со агол при темето D од 120°, односно агли при основата $\measuredangle DBE = \measuredangle DEB = 30^\circ$. Сега е јасно дека и триаголникот ABE е рамнокрак, со агли при основата AB од 30°, па $\overline{AE} = \overline{BE}$. Но, поради $\overline{AE} = \overline{CE}$, следува дека $\overline{BE} = \overline{CE}$ и уште $\measuredangle BEC = 90^\circ$, т.е. ΔBCE е рамнокрак правоаголен триаголник со агли при основата BC од 45°.

Тогаш аглите во $\triangle ABC$ се:

$$\alpha = 45^\circ,\ \beta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \text{ и } \gamma = 45^\circ + 75^\circ = 120^\circ .$$

Втор начин. Очигледно е $\measuredangle AMC = 60^\circ$, па $\alpha = 45^\circ$. Согласно синусната теорема, за $\triangle AMC$ добиваме $\frac{\overline{MC}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AM}}{\sin 75^\circ}$, т.е.

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\overline{AM}}{\sin 75^\circ} . \qquad (1)$$

Користејќи ја истата теорема за $\triangle BCM$, добиваме $\frac{\overline{BM}}{\sin(\gamma - 75^\circ)} = \frac{\overline{MC}}{\sin \beta}$, т.е.

$$\overline{MC} = \frac{\overline{BM}\sin\beta}{\sin(\gamma - 75^\circ)} \qquad (2)$$

Од (1) и (2), земајќи го предвид условот $\overline{BM} = 2\overline{AM}$, добиваме

$$\frac{2\sin\beta}{\sin(\gamma-75^\circ)} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin 75^\circ}. \qquad (3)$$

Ако од триаголникот BCM го изразиме β преку γ ($\beta = 135^\circ - \gamma$), и замениме во (3), ќе добиеме

$$\frac{2\sin(135^\circ - \gamma)}{\sin(\gamma-75^\circ)} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin 75^\circ},$$

од каде што, по упростувањето ќе добиеме $\gamma = 120^\circ$ и, конечно $\beta = 15^\circ$.

Значи аглите во триаголникот ABC се: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

30. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник. Определи го аголот спроти страната со должина c, ако е исполнето равенството $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = c^2$.

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во обликот

$$a^3 + b^3 + c^3 = c^2(a+b+c) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = c^3 + c^2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) = c^2(a+b)$$

Бидејќи a и b се должини на страни во триаголник, имаме $a + b \neq 0$, па затоа $c^2 = a^2 - ab + b^2$. Од косинусната теорема имаме дека $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Од последните две равенства следува $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, односно $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

31. Должините на страните триаголникот ABC се a, b, c и $\measuredangle A = 60^\circ$ (со стандардни ознаки). Докажи дека

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}.$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со

$$3(a+b)(a+c) = (a+b+c)[(a+c)+(a+b)]$$

$$3a^2 + 3ab + 3ac + 3bc = (a+b+c)^2 + a(a+b+c)$$

$$3a^2 + 3ab + 3ac + 3bc = 2a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 2bc + 3ac$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc. \qquad (1)$$

Според косинусна теорема, за триаголникот ABC имаме

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cos(\measuredangle BAC),$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cos 60^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) го добиваме тврдењето на задачата.

32. Даден е $\triangle ABC$. Нека I е пресечната точка на симетралите AE и BD на внатрешните агли при темињата A и B, ($E \in BC, D \in AB$). Ако $P_{ABI} = P_{CDIE}$, определи ја најголемата можна вредност на $\measuredangle ACB$.

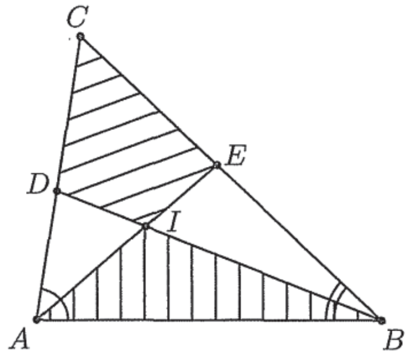
Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Од условот следува дека

$$P_{ABD} = P_{ABI} + P_{AID} = P_{CDIE} + P_{AID} = P_{AEC},$$

т.е. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$, од каде добиваме $\frac{c}{a+c} = \frac{b}{b+c}$, т.е. $ab = c^2$. Сега, од косинусната теорема следува

$$\cos\measuredangle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-ab}{2ab} \geq \frac{1}{2}.$$

Според тоа, $\measuredangle ACB \leq 60^\circ$ и знак за равенство важи кога $\triangle ABC$ е рамностран.



33. Даден е $\triangle ABC$ за кој $\overline{AC} = 3, \overline{BC} = 4$ и $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Нека $CL, L \in AB$ е симетралата на $\measuredangle ACB$ и O е точка од отсечката CL. Ако M е подножната точка на нормалата повлечена од O кон BC и $AM \perp BO$, определи ја должината на отсечката CO.

Решение. Од $AM \perp BO$ (направи цртеж), следува $\overline{AO}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OM}^2$, па затоа

$$\overline{AN}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OM}^2.$$

Но, $\overline{ON} = \overline{OM}$, па затоа $\overline{AB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{BM}^2$. Сега, од косинусната теорема имаме

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 60^\circ = 13$$

и ако $\overline{CN} = \overline{CM} = x$, тогаш $\overline{AN} = 3 - x, \overline{BM} = 4 - x$, од каде следува

$$13 = (3-x)^2 + (4-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Корените на последната равенка се 1 и 6. За $x = 6$ точката O е надворешна за отсечката CL и затоа $x = 1$. Тогаш $\overline{CO} = \frac{x}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

34. Во триаголникот ABC точката O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, точката M е средината на страната AB. Опишаната кружница околу триаголникот AMO ја сече страната AC во точка K. Ако $\overline{AK} = 3, \overline{MK} = 4$ и $\measuredangle AOM = 45^\circ$, тогаш

а) определи ги должините на страните AC и BC;

б) определи ја должината на страната AB.

Решение. Од условот на задачата $\measuredangle AOM = 45^\circ$ следува, дека $\measuredangle ACB = 45^\circ$ или $\measuredangle ACB = 135^\circ$. Од тоа што OM е симетрала на AB, следува дека OK е симетрала на AC.

а) Од досега изнесеното наоѓаме дека

$$\overline{AC} = 2\cdot\overline{AK} = 2\cdot 3 = 6 \text{ и } \overline{BC} = 2\cdot\overline{MK} = 2\cdot 4 = 8$$

(MK е средна линија).

б) За страната AB ја применуваме косинусната теорема и добиваме

Ако $\measuredangle ACB = 45^\circ$, тогаш $\overline{AB}^2 = 36 + 64 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\overline{AB} = \sqrt{100 - 48\sqrt{2}}$.

Ако $\measuredangle ACB = 135^\circ$, тогаш $\overline{AB}^2 = 36 + 64 + 2\cdot 6\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\overline{AB} = \sqrt{100 + 48\sqrt{2}}$.

35. Докажи дека во секој триаголник важи $a^2 = (b-c)^2 + 4P\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, каде a,b,c се должините на страните на триаголникот, α е аголот помеѓу страните b и c и P е плоштината на триаголникот.

Решение. Од косинусна теорема имаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = (b-c)^2 + 4P\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Од друга страна, имаме

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Конечно, од добиените две равенства следува бараното равенство.

36. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник. Определи го аголот спроти страната со должина c, ако е исполнето равенството $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = c^2$.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$a^3 + b^3 + c^3 = c^2(a+b+c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = c^3 + c^2(a+b)$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = c^2(a+b).$$

Бидејќи a и b се должини на страни во триаголник, имаме $a+b \neq 0$, па

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3}. \qquad (1)$$

Од косинусна теорема имаме

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) добиваме $\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}$, т.е. $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

37. Нека за аглите α, β и γ во триаголникот ABC важи равенството

$$\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1.$$

Пресметај го аголот α.

Решение. Применувајќи ги синусната и косинусната теорема даденото равенство го трансформираме на следниов начин

$$1 = \frac{\frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2}}{\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{bc} = \frac{2bc\cos\alpha}{bc} = 2\cos\alpha.$$

Според тоа, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Бидејќи α е агол во триаголник добиваме $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

38. Пресметај го аголот γ во триаголникот ABC, ако $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, каде a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC наспроти темињата A, B, C, соодветно, а γ е аголот кај темето C.

Решение. Го множиме равенството $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ со $a+b+c>0$ го и добиваме еквивалентното равенство $\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$, т.е. $\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=1$. Последното равенство го множиме со $(a+c)(b+c)>0$ и го добиваме еквивалентното равенство $b^2+bc+a^2+ac=ab+ac+cb+c^2$, т.е.

$$c^2=b^2+a^2-ab. \qquad (1)$$

Од друга страна според косинусна теорема имаме $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, а заради (1) добиваме $\cos\gamma=\frac{1}{2}$, од каде добиваме дека $\gamma=60^\circ$.

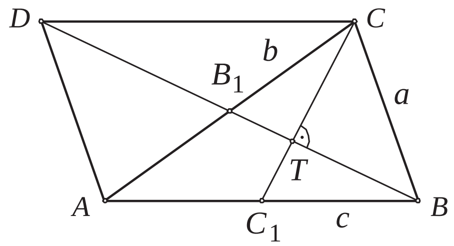
39. Нека се $b=\overline{CA}$ и $c=\overline{AB}$ страни на триаголникот ABC и l_a е должината на симетралата на аголот при темето A. Докажи дека ако важи $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{l_a}$, тогаш $\measuredangle BAC=120^\circ$.

Решение. Нека D е пресечната точка на симетралата на внатрешниот агол кај темето A и страната BC. Тогаш, $\overline{BD}:\overline{DC}=c:b$ (од својство на симетрала на агол). Од косинусната теорема применета на триаголниците ABD и ADC добиваме: $b^2+l_a{}^2-2bl_a\cos\frac{\alpha}{2}=\overline{DC}^2$ и $c^2+l_a{}^2-2cl_a\cos\frac{\alpha}{2}=\overline{BD}^2$, па ако првото равенство го помножиме со c^2, а второто со b^2, а потоа ги одземеме, ќе добиеме $l_a{}^2(c^2-b^2)=2bcl_a\cos\frac{\alpha}{2}(c-b)$. Ако $c\neq b$, добиваме $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{l_a}$, па од условот на задачата следи $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, а бидејќи α е агол во триаголник, следи $\alpha=120^\circ$. Ако $b=c$, од условот на задачата добиваме дека $b=c=2l_a$, па $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, односно $\alpha=120^\circ$ и во овој случај.

40. За страните a,b,c на триаголникот ABC исполнето е равенството

$$b^2+c^2=5a^2.$$

Докажи дека $t_b\perp t_c$.



Решение. За дадениот триаголник, според косинусна теорема имаме

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha,$$

т.е. $5a^2=5(b^2+c^2)-10bc\cdot\cos\alpha$. Од равенството од условите на задачата имаме

$$2a^2=bc\cdot\cos\alpha. \qquad (*)$$

Ако ја примениме косинусна теорема на триаголниците BB_1A и CC_1A ги добиваме равенствата

$$t_b=c^2+\frac{b^2}{4}-bc\cdot\cos\alpha\overset{(*)}{=}\frac{4c^2+b^2-8a^2}{4}=\frac{3c^2-3a^2}{4}$$

$$t_c=b^2+\frac{c^2}{4}-bc\cdot\cos\alpha\overset{(*)}{=}\frac{4b^2+c^2-8a^2}{4}=\frac{3b^2-3a^2}{4}$$

Со примена на овие две равенства за триаголникот CTB_1, бидејќи $\overline{CT}=\frac{2}{3}t_c$ и $TB_1=\frac{1}{3}t_b$, добиваме

$$(\tfrac{2}{3}t_c)^2+(\tfrac{1}{3}t_b)^2=\tfrac{4}{9}\tfrac{3b^2-3a^2}{4}+\tfrac{1}{9}\tfrac{3c^2-3a^2}{4}=\tfrac{12b^2-3c^2-15a^2}{36}=\tfrac{9b^2}{36}=(\tfrac{b}{2})^2$$

т.е. $(\frac{2}{3}t_c)^2+(\frac{1}{3}t_b)^2=(\frac{b}{2})^2$. Значи, $\triangle CTB_1$ е правоаглен, т.е. $CT\perp BT$.

41. Триаголникот ABC е зададен со: $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\beta=120^\circ$. Правата низ A што е нормална на AB ја сече правата низ C што е нормална на BC во точката D. Пресметај ја должината на отсечката CD.

Решение. *Прв начин.* По услов е: $AD\perp AB$, $CD\perp BC$. Ако $BE\parallel AD$, $EF\parallel AB$ (види цртеж 1), тогаш: $\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{ED}$. Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, следува $\measuredangle D=60^\circ$. Но тогаш $\measuredangle BEC=60^\circ$, од каде што:

$$\overline{CE}=\overline{BC}\cdot\operatorname{tg}30^\circ=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Од $\triangle DEF$ имаме $\frac{\overline{EF}}{\overline{ED}}=\sin 60^\circ$, од каде што: $\overline{ED}=\frac{\overline{EF}}{\sin 60^\circ}=\frac{6}{\sqrt{3}}$. Според тоа,

$$\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{ED}=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Втор начин. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен (види цртеж 1). За да ја најдеме должината на отсечката CD, доволно е да го одредиме дијаметарот BD на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Според косинусната теорема за ΔABC добиваме:

$$\overline{AC}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos120^\circ=37,\ \text{т.е.е}\ \overline{AC}=\sqrt{37}.$$

Но, $\overline{AC}=2R\sin\beta$, $\sqrt{37}=2R\sin120^\circ$, а оттука $\overline{BD}=2R=\frac{2\sqrt{37}}{\sqrt{3}}$. Од Питагоровата теорема за $\triangle BCD$ добиваме $\overline{CD}^2=\overline{BD}^2-\overline{BC}^2=\frac{100}{3}$. Значи, $\overline{CD}=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Трет начин. Нека точката P е пресек на правите BC и AD. Тогаш $\measuredangle P=30^\circ$ (види цртеж 2), па од правоаголните триаголници ABP и CDP добиваме: $\overline{BP}=2\overline{AB}=6$, $\overline{PC}=10$, $\overline{PD}=2\overline{CD}$, па според Питагоровата теорема за ΔPCD имаме: $\overline{PC}^2+\overline{CD}^2=\overline{PD}^2$, т.е. $10^2+\overline{CD}^2=4\overline{CD}^2$, па затоа $\overline{CD}=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

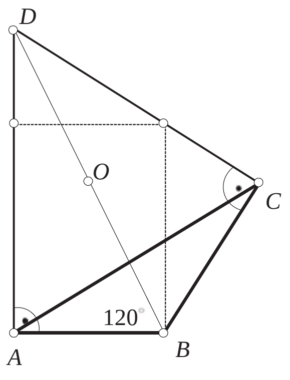
Четврт начин. Нека Q е пресек на правите AB и CD. Тогаш $\measuredangle Q=30^\circ$ (види цртеж 2), па од правоаголниот триаголник BQC имаме:

$$\overline{BQ}=2\overline{BC}=8,\ \overline{CQ}=8^2-4^2=48,\ \overline{CQ}=4\sqrt{3}.$$

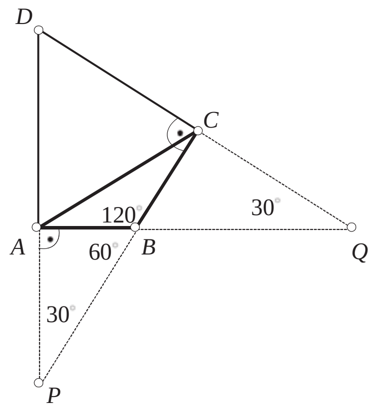
Од правоаголниот $\triangle AQD$, бидејќи $\overline{DQ}=2\overline{AD}$, добиваме:

$$\overline{DQ}^2=\overline{AD}^2+\overline{AQ}^2,\ \text{т.е.}\ 4\overline{AD}^2=\overline{AD}^2+11^2,$$

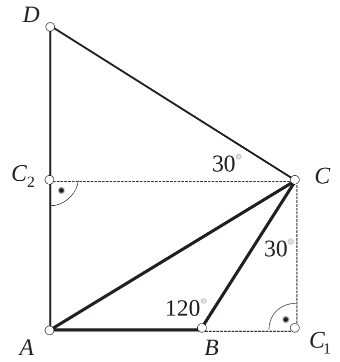
од каде што $\overline{AD}=\frac{11}{\sqrt{3}}$, $\overline{AD}=\frac{22}{\sqrt{3}}$. Тогаш: $\overline{CD}=\overline{DQ}-\overline{CQ}=\frac{10}{\sqrt{3}}$.



цртеж 1



цртеж 2



цртеж 3

Петти начин. Бидејќи $\overline{CP}=10$, $\overline{CQ}=4\sqrt{3}$ (од претходните две решенија), од сличноста на ΔBQC и ΔDPC добиваме: $\overline{BC}:\overline{CQ}=\overline{DC}:\overline{CP}$, т.е. $4:4\sqrt{3}=\overline{CD}:10$, од каде што $\overline{CD}=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Шести начин. Нека $CC_1\perp AB$, $CC_2\perp AD$ (види цртеж 3). Тогаш правоаголните триаголници BCC_1, DCC_2 имаат по еден остар агол 30°, па имаме

$$\overline{BC_1}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}=2,\ \overline{C_2C}=\overline{AC_1}=5,\ \overline{CD}=x \text{ и } \overline{C_2D}=\tfrac{x}{2}.$$

Значи, $x^2=5^2+(\frac{x}{2})^2$, т.е. $3x^2=100$, $x=\frac{10}{\sqrt{3}}$, односно $\overline{CD}=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Седми начин. Нека $BS_2\parallel CD$, $DS_2\parallel BC$ (види цртеж 4). Тогаш четириаголникот $BCDS_2$ е правоаголник, па важи

$$\overline{CD}=\overline{BS_2}=\overline{BS_1}+\overline{S_1S_2}. \qquad (*)$$

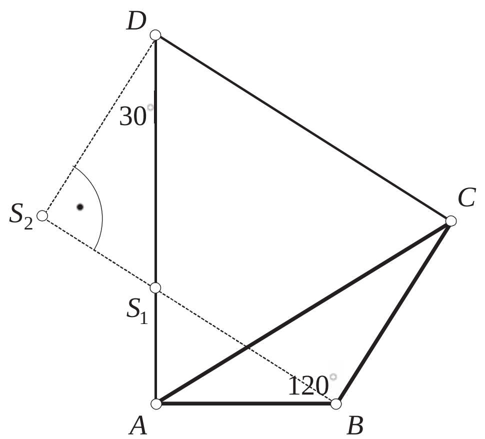
Правоаголните триаголници ABS_1 и DS_2S_1 имаат по еден остар агол од 30°, па имаме:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{S_1B}}=\sin 60^\circ \quad\Rightarrow\quad \overline{S_1B}=\frac{6}{\sqrt{3}},$$

и

$$\frac{\overline{S_1S_2}}{\overline{S_2D}}=\mathrm{tg}30^\circ \quad\Rightarrow\quad \overline{S_1S_2}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Имајќи го предвид (*) добиваме: $\overline{CD}=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

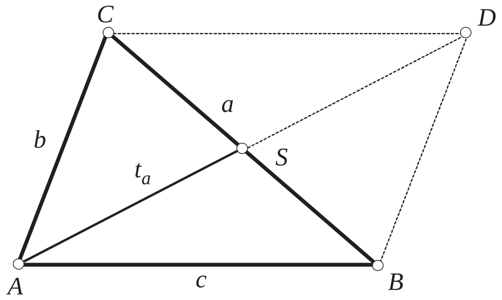


цртеж 4

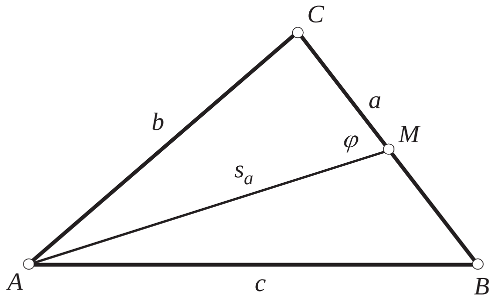
42. Да се изразат преку страните a, b и c на триаголникот:
а) неговите тежишни линии,
б) неговите симетрали на агли.

Решение. а) Ќе ја најдеме тежишната линија t_a, а аналогно и за t_b и t_c. Нека D е точка, таква што четириаголникот $ABCD$ е паралелограм (види цртеж). Овој паралелограм е со страни b, c и дијагонали $a,\ 2t_a$, па имаме

$$a^2+4t_a^2=2(b^2+c^2),\ \text{т.е.}\ t_a^2=\tfrac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2).$$



цртеж 1



цртеж 2

б) Ќе ја најдеме само симетралата s_a на аголот α. Точката M ја дели страната b во однос $c:b$, т.е. $\overline{BM}:\overline{MC}=c:b$, од каде што добиваме:

$$\overline{BM}=\frac{ac}{b+c},\ \overline{CM}=\frac{ab}{b+c}. \qquad (1)$$

Нека $\measuredangle AMC=\varphi$ (види цртеж). Според косинусната теорема, од триаголниците ACM и ABM добиваме:

$$b^2=s_a^2+\overline{CM}^2+2s_a\overline{CM}\cos\varphi$$

$$c^2=s_a^2+\overline{BM}^2-2s_a\overline{BM}\cos\varphi.$$

Ако првата од овие равенки ја помножиме со $\overline{BM}$, а втората со $\overline{CM}$ и ги собереме, ќе добиеме

$$b^2\overline{BM}+c^2\overline{CM}=s_a^2(\overline{BM}+\overline{CM})+\overline{BM}\cdot\overline{CM}(\overline{BM}+\overline{CM}),$$

па, заменувајќи ги $\overline{BM}$ и $\overline{CM}$ од (1), добиваме

$$s_a^2=\frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2-a^2].$$

43. Дадени се пет отсечки, така што од секои три од нив може да се состави триаголник. Докажи дека барем еден од тие триаголници е остроаголен.

Решение: Нека должините на дадените отсечки се a,b,c,d и e, при што $a\le b\le c\le d\le e$. Да претпоставиме дека ниту еден од триаголниците кои се добиваат не е остроаголен. Ако искористиме дека за триаголник кој не е остроаголен, со страни $x\le y\le z$, од косинусната теорема важи

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos\gamma\ge x^2+y^2$$

(γ не е остар, па $\cos\gamma\le 0$), добиваме релации

$$e^2\ge d^2+c^2,\ d^2\ge c^2+b^2,\ c^2\ge b^2+a^2.$$

Со собирање на последните три неравенства се добива

$$e^2\ge a^2+2b^2+a^2\ge a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

односно $e\ge a+b$, што е противречност на условот дека од отсечките со должини a,b и e, може да се состави триаголник.

Конечно, од добиената противречност следува дека барем еден од триаголниците да е остроаголен.

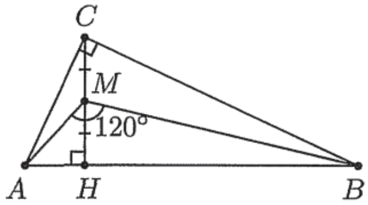
44. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и $\overline{AC} \le \overline{BC}$. Ако M е средината на висината $CH, H \in AB$ и $\measuredangle AMB = 120^\circ$, определи го односот $\overline{AC} : \overline{BC}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Прво

$$P_{ABC} = 2P_{ABM} = \overline{AM} \cdot \overline{BM} \sin 120^\circ,$$

па затоа $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \frac{ab}{\sqrt{3}}$. Од косинусната теорема за $\triangle ABM$ следува

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{AM} \cdot \overline{BM} \cos 120^\circ \\ &= \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{AM} \cdot \overline{BM},\end{aligned}$$



па затоа

$$\begin{aligned}\overline{AM} \cdot \overline{BM} &= \overline{AB}^2 - (\overline{AH}^2 + \overline{HM}^2) - (\overline{BH}^2 + \overline{HM}^2) \\ &= 2\overline{AH} \cdot \overline{BH} - 2\overline{HM}^2 = \frac{3}{2}h^2 = \frac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)}.\end{aligned}$$

Според тоа, $\frac{ab}{\sqrt{3}} = \frac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$, т.е. $2(\frac{b}{a})^2 - 3\sqrt{3}\,\frac{b}{a} + 2 = 0$. Но, $b \le a$, па од последното равенство следува $\overline{AC} : \overline{BC} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}$.

45. Точката M на страната AB во рамностраниот $\triangle ABC$ е таква што односот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ е еднаков на $\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} - 1$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} - 1$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AB} = 1$. Нека $\overline{BM} = x, \overline{CM} = y$ и k е бараниот соодност (направи цртеж). Од формулата $P = sr$ следува, дека

$$\frac{1-x}{x} = k\,\frac{2-x+y}{1+x+y}, \text{ т.е. } ((k+1)x-1)y = (k-1)x^2 - 2kx + 1.$$

Од друга страна, од косинусната теорема следува $y^2 = x^2 - x + 1$, а според условот имаме $y = (k+1)x$. Тогаш

$$y(y-1) = (k-1)(x^2 - x + 1) - (k+1)x + 2 - k = (k-1)y^2 - y + 2 - k,$$

па затоа $(k-2)(y^2-1) = 0$, т.е. $k = 2$.

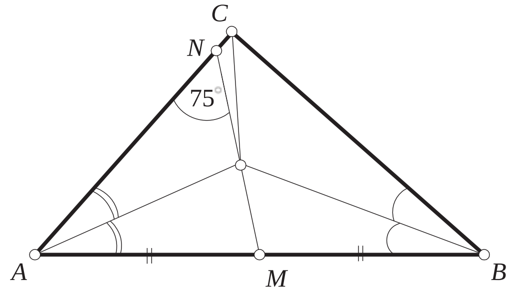
46. Во правоаголен триаголник правата што минува низ средината на хипотенузата и низ центарот на впишаната кружница, ја сече катетата под агол од 75°. Одреди ги острите агли на триаголникот.

Решение. Нека M е средина на хипотенузата на правоаголниот ΔABC, O е центар на впишаната кружница во него, а N пресек на AC со MO (види цртеж). По услов $\measuredangle AMN = 75^\circ$.

За $\triangle ABO$ важи $\measuredangle AOB = 135^\circ$, бидејќи $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$. Понатаму,

$$\measuredangle AOM = 75^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

како надворешен за ΔABO;



$$\measuredangle BOM = 135^\circ - (75^\circ + \tfrac{\alpha}{2}) = 60^\circ - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Со примена на косинусна теорема за триаголниците AMO и MBO добиваме:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(75^\circ + \frac{\alpha}{2})}, \quad \frac{\overline{OM}}{\overline{MB}} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}.$$

Бидејќи $\overline{AM} = \overline{MB}$ и $\sin\frac{\beta}{2} = \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$, добиваме

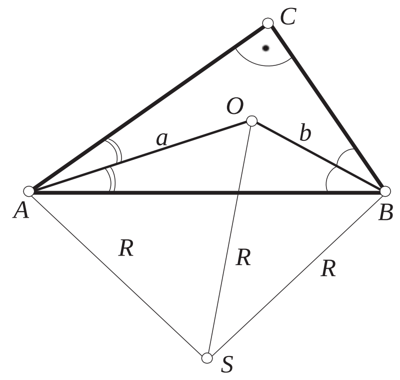
$$\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin(60^\circ - \tfrac{\alpha}{2}) = \sin(45^\circ - \tfrac{\alpha}{2})\sin(75^\circ + \tfrac{\alpha}{2}),$$

од што со примена на адиционите теореми наоѓаме $\sin(\alpha - 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па затоа $\alpha - 15^\circ = 45^\circ$. Следствено, бараните агли се: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

47. Нека O е центарот на впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$). Изрази го радиусот R на опишаната кружница околу триаголникот ABO, преку $a = \overline{OA}$ и $b = \overline{OB}$.

Решение. Од $\alpha + \beta = 90^\circ$ следува $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$, а оттука:

$$\measuredangle AOB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$



Прво ја пресметуваме страната $\overline{AB}$ по косинусна теорема за триаголникот ABO:

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos 135^\circ = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2},$$

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}}.$$

Нека S е центарот на опишаната кружница k околу триаголникот ABO (види цртеж), тогаш:

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SO} = R.$$

Во кружницата k, од односот на централниот и периферниот агол, имаме:

$$\measuredangle ASO = 2\measuredangle ABO = \beta, \quad \measuredangle BSO = \alpha.$$

Тогаш:

$$\measuredangle ASB = \measuredangle ASO + \measuredangle BSO = \alpha + \beta = 90^\circ,$$

што значи дека ΔABS е рамнокрак правоаголен, па имаме

$$R = \tfrac{1}{2}\overline{AB} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}}.$$

48. Да се докаже дека постои единствен триаголник чии страни се последователни природни броеви и еден од аглите е двапати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. Нека страните на триаголникот се $a=n-1$, $b=n$ и $c=n+1$; тогаш $\alpha<\beta<\gamma$, па можни се следниве случаи: (i) $\beta=2\alpha$, (ii) $\gamma=2\beta$, (iii) $\gamma=2\alpha$. Ќе ги разгледаме посебно сите три случаи.

(i) Според синусната теорема, имаме

$$\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin\beta},\quad \frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin 2\alpha},\ \frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$

од каде што добиваме

$$\cos\alpha=\frac{n}{2n-1}. \tag{1}$$

Според косинусна теорема, имаме

$$(n-1)^2=n^2+(n+1)^2-2n(n+1)\cos\alpha,$$

т.е.

$$\cos\alpha=\frac{n+4}{2(n+1)}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) го добиваме равенството $\frac{n}{2n-1}=\frac{n+4}{2(n+1)}$, т.е. $n=2$, па страните на триаголникот се $a=1$, $b=2$, $c=3$, што не е можно, зошто $a+b=c$.

(ii) Слично како во (1), користејќи ги синусната и косинусната теорема, добиваме

$$\cos\beta=\frac{n+1}{2n}=\frac{n^2+2}{2(n^2-1)},$$

т.е. $n^2-3n-1=0$, чии што корени не се природни броеви.

(iii) Во овој случај го добиваме равенството

$$\frac{n+1}{2(n-1)}=\frac{n+4}{2(n+1)},$$

т.е. $n=5$, па страните на триаголникот се $a=4, b=5, c=6$.

49. Одреди правоаголен триаголник кај кој аголот меѓу тежишните линии на катетите достигнува најголема вредност.

Решение. Нека $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$. Ако ја примениме косинусната теорема на $\triangle ADT$, добиваме $2\overline{AT}\cdot\overline{DT}\cdot\cos\varphi=\overline{AT}^2+\overline{DT}^2-\overline{AD}^2$, т.е.

$$\tfrac{4}{9}\overline{AE}\cdot\overline{DT}\cdot\cos\varphi=(\tfrac{2}{3}\overline{AE})^2+(\tfrac{1}{3}\overline{BD})^2-\tfrac{b^2}{4} \tag{1}$$

Со замена на равенствата $\overline{AE}^2=b^2+\frac{a^2}{4}$ и $\overline{BD}^2=a^2+\frac{b^2}{4}$ во (1) добиваме

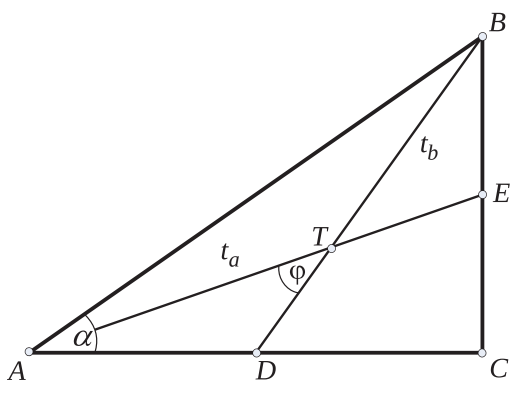
$$\tfrac{1}{9}\sqrt{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}\cdot\cos\varphi=\tfrac{2}{9}(a^2+b^2)$$

т.е.

$$\cos\varphi=\frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}} \tag{2}$$

од каде следува дека

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{3ab}{\sqrt{(a^2+4b^2)(4a^2+b^2)}} \tag{3}$$



Од (2) и (3) добиваме дека $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3ab}{2c^2}$. Ако во последното равенство замениме $a = c \cdot \sin\alpha$, $b = c \cdot \cos\alpha$ добиваме $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}\sin 2\alpha$. Најголемата вредност на $\operatorname{tg}\varphi$ (а со тоа и за φ се достигнува за $\sin 2\alpha = 1$, т.е. за $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Значи бараниот триаголник е рамнокрак правоаголен триаголник.

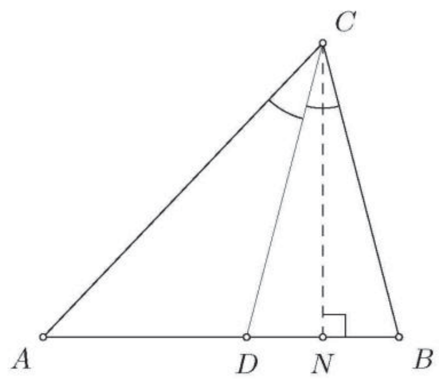
50. Во триаголникот ABC симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D. Определи ја должината на страната AC ако $\overline{CB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = 4$ и $\overline{DB} = 3$.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \alpha, \measuredangle ABC = \beta, \measuredangle ACB = \gamma$. Со примена на синусната теорема на $\triangle ABC$ добиваме $\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$, а со примена на $\triangle ACD$ добиваме $\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AD}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Но, $\overline{CB} = \overline{CD}$, па затоа од последните две равенства следува $\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} = \frac{\overline{AD}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Понатаму, ако се земе предвид дека $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, од последното равенство добиваме $\overline{AB} = 2\overline{AD}\cos\frac{\gamma}{2}$. Понатаму, ако земеме предвид дека $\overline{AD} = 4$ и $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 7$, од последното равенство добиваме $7 = 2 \cdot 4\cos\frac{\gamma}{2}$, т.е. $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{7}{8}$. Според тоа, $\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1 = \frac{17}{32}$.

Понатаму, од синусната теорема применета на триаголниците ADC и BCD следува

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\sin\measuredangle ADC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\measuredangle BDC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}},$$

па затоа $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{BD} = 4:3$. Затоа можеме да земеме $\overline{AC} = 4x$ и $\overline{BC} = 3x$. Сега, од косинусната теорема применета на $\triangle ABC$ добиваме



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}\cos\gamma,$$

па затоа

$$7^2 = (4x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3x \cdot \frac{17}{32},$$

од каде добиваме $x^2 = 4$, т.е. $x = 2$. Конечно, $\overline{AC} = 4 \cdot 2 = 8$.

51. Нека a, b, c се страни на триаголник, $2s$ е периметарот на триаголникот, P е неговата плоштина и $a \le c$, $b \le c$. Докажи дека, триаголникот е правоаголен ако и само ако $(s-a)(s-b) = P$.

Решение. Левата страна на равенството, користејќи ја косинусна теорема, ќе ја запишеме во облик:

$$(s-a)(s-b) = \frac{1}{4}(b+c-a)(a+c-b) = \frac{1}{4}(c-(a-b))(c+(a-b))$$
$$= \frac{1}{4}(c^2 - (a-b)^2) = \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab)$$

$$=\frac{1}{4}(2ab-2ab\cos\gamma)=\frac{1}{2}ab(1-\cos\gamma)$$

Бидејќи $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, равенството $(s-a)(s-b)=P$ е исполнето ако и само ако $1-\cos\gamma=\sin\gamma$, т.е. $\cos\gamma-\cos^2\gamma=0$. Бидејќи $0<\gamma<180^\circ$, добиваме $\cos\gamma=0$, т.е. $\gamma=90^\circ$.

52. Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Нека $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$ и $\overline{CD}=\frac{ab}{a+b}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

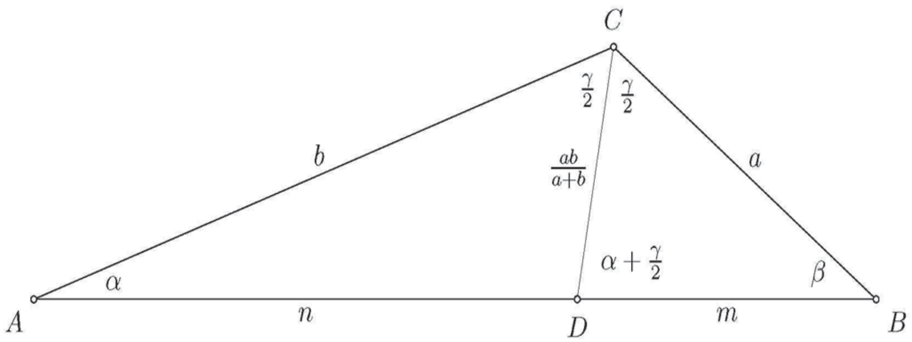
Решение. *Прв начин.* Нека α,β,γ се големините на аглите при темињата A,B,C на $\triangle ABC$, соодветно. Нека $n=\overline{AD}$, $m=\overline{BD}$ и $\overline{AB}=c$. Од својството на симетралата на аголот на триаголникот следува $m:n=a:b$. Но, $m+n=c$, па затоа $m=\frac{ac}{a+b}$. Сега од косинусната теорема, применета на $\triangle BCD$, следува

$$\frac{a^2c^2}{(a+b)^2}=a^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}-\frac{2a^2b}{a+b}\cos\beta\text{, т.е. }\cos\beta=\frac{(a+b)^2+c^2-b^2}{2c(a+b)}=\frac{a^2+2ab+c^2}{2c(a+b)}.$$

Но, од косинусната теорема применета на $\triangle ABC$ имаме $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$, па затоа $\frac{a^2+2ab+c^2}{2c(a+b)}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$, од каде добиваме $a^2+b^2+ab=c^2$. Повторно од косинусната теорема за $\triangle ABC$ следува $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$, па затоа $\gamma=120^\circ$.

Втор начин. При ознаки како во првиот начин аналогно докажуваме дека $m=\frac{ac}{a+b}$ и $n=\frac{bc}{a+b}$. Понатаму, бидејќи $\overline{CD}=d=\frac{ab}{a+b}$ со замена во формулата на Стјуарт $b^2m+a^2n=c(d^2+mn)$, после средувањето добиваме $a^2+b^2+ab=c^2$, од што како и во првиот начин заклучуваме дека $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$, т.е. $\gamma=120^\circ$.

Трет начин. Нека α,β,γ се големините на аглите при темињата A,B,C на $\triangle ABC$, соодветно.



Имаме $\measuredangle BDC=\alpha+\frac{\gamma}{2}$. Од синусната теорема применета на $\triangle BCD$ следува $\frac{ab}{a+b}:a=\sin\beta:\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})$, т.е. $\frac{b}{a+b}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}$. Понатаму, $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1$, па затоа $\frac{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1$, т.е. $\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})=\sin\alpha+\sin\beta$. Сега, бидејќи

$$\sin\beta = \sin(180^\circ - \beta) = \sin(\alpha+\gamma)\,,$$

од последното равенство и адиционите формули добиваме

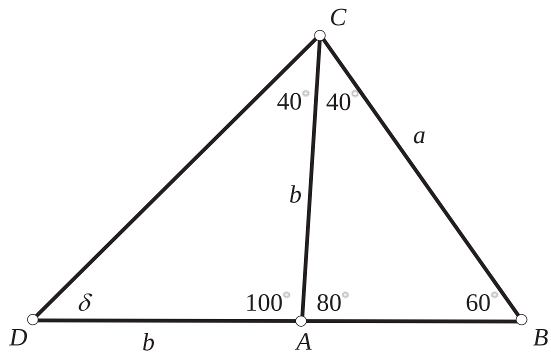
$$\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2}) = \sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma) = 2\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})\cos\tfrac{\gamma}{2}\,.$$

Понатаму, $\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2}) \neq 0$, бидејќи во спротивно ќе важи $\alpha+\frac{\gamma}{2} = 180^\circ$, што не е можно. Конечно, од последното равенство следува $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, па затоа $\frac{\gamma}{2} = 60^\circ$, т.е. $\gamma = 120^\circ$.

Четврт начин. Нека α, β, γ се големините на аглите при темињата A, B, C на $\triangle ABC$, соодветно. Нека $n = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ и $\overline{AB} = c$. Од својството на симетралата на агол следува $m : n = a : b$. Но, $m + n = c$, па затоа $m = \frac{ac}{a+b}$. Од синусната теорема применета на $\triangle BCD$ следува $\sin\frac{\gamma}{2} : \sin\beta = \frac{ac}{a+b} : \frac{ab}{a+b} = \frac{c}{b}$. Од синусната теорема применета на $\triangle BCD$ следува $\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, што заедно со горното равенство дава $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, т.е. $\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. Не е можно $\sin\frac{\gamma}{2} = 0$, бидејќи тогаш $\gamma = 0$, па затоа од последното равенство следува $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\frac{\gamma}{2} = 60^\circ$, односно $\gamma = 120^\circ$.

53. Ако аглите во триаголникот ABC се $\alpha = 80^\circ$ и $\beta = 60^\circ$, тогаш за неговите страни важи равенството $a^2 = (b+c)c$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Да повлечеме права CD која гради $\measuredangle ACD = 40^\circ$ (види цртеж). Тогаш $\delta = 60^\circ$, па $\triangle CDA$ е рамнокрак, со $\overline{AD} = \overline{AC} = b$. Очигледно $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (имаат еднакви агли); оттука:



$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CB} : \overline{BD}$$
$$c : a = a : (b+c)\,,$$

или $a^2 = (b+c)c$.

Втор начин. Од косинусната теорема имаме:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Со собирање на овие две равенства добиваме:

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 - 2b(c\cdot\cos 80^\circ + a\cdot\cos 40^\circ)$$
$$2b^2 = 2b(c\cdot\cos 80^\circ + a\cdot\cos 40^\circ)$$
$$b = c(2\cos^2 40^\circ - 1) + a\cdot\cos 40^\circ$$

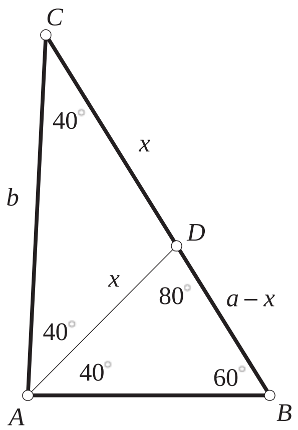
$$b+c=2c\cos^2 40^\circ + a\cdot\cos 40^\circ \qquad (*)$$

Од синусната теорема имаме:

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}=2\cos 40^\circ, \text{ т.е. } \cos 40^\circ=\frac{a}{2c}.$$

Заменувајќи ја оваа вредност во (*) добиваме $b+c=2c\frac{a^2}{4c^2}+a\frac{a}{2c}$, а оттука $(b+c)c=a^2$.

Трет начин. Нека $AD=x$ е симетрала на аголот $S_3=\frac{1}{2}ca$ (види цртеж); тогаш:



$$\triangle ABC \sim \triangle DBA$$
$$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{DA}:\overline{BA}$$
$$b:a=x:c$$
$$x=\frac{bc}{a}.$$

Но, $\overline{AD}=\overline{CD}$, бидејќи ΔACD е рамнокрак, со агли од 40° при основата AC, па $\overline{BD}=a-x=a-\frac{bc}{a}=\frac{a^2-bc}{a}$. За отсечките BD и CD, што симетралата AD на аголот α ги отсекува на страната BC, важи:

$$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{BD}$$
$$b:c=x:(a-x)$$
$$b:c=\frac{bc}{a}:\frac{a^2-bc}{a}$$
$$a^2b-b^2c=bc^2$$

54. Да се докаже дека во било кој триаголник ABC е точно равенството

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}.$$

(a,b,c и α,β се стандардните ознаки за должините на страните и големините на аглите на триаголникот).

Решение. Од косинусна теорема имаме

$$\begin{aligned} b^2&=a^2+c^2-2ac\cos\beta \\ a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \end{aligned},$$

од каде што имаме

$$\begin{aligned} a^2+c^2-b^2&=2ac\cos\beta, \\ b^2+c^2-a^2&=2bc\cos\alpha. \end{aligned}.$$

Според тоа

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2ac\cos\beta}{2bc\cos\alpha}=\frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}=(*)$$

Според синусна теорема имаме $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Според тоа

$$(*)=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

што и требаше да се докаже.

55. Во рамнокрак триаголник ABC важи $\overline{AC}=\overline{BC}=1$. За која вредност на $\gamma=\measuredangle ACB$, изразот $g=\frac{\overline{AB}^2+2}{P_{\Delta ABC}}$ достигнува најмала вредност.

Решение. Од косинусната теорема имаме $\overline{AB}^2=2-2\cos\gamma$, а за плоштината на триаголникот важи

$$P_{\Delta ABC}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\gamma=\tfrac{\sin\gamma}{2}.$$

Тогаш добиваме

$$g(\gamma)=\frac{2(4-2\cos\gamma)}{\sin\gamma}=\frac{4(2-\cos\gamma)}{\sin\gamma}.$$

Ќе воведеме смена $x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ пр што важи $\sin\gamma=\frac{2x}{1+x^2}$, $\cos\gamma=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ и добиваме $g=g(x)=\frac{2(1+3x^2)}{x}$. Но, $\gamma\in(0,\pi)$, односно $\frac{\gamma}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$, па затоа $x>0$ и притоа важи $g>0$.

Ќе ја одредиме најмалата вредност која ја достигнува функцијата $g(x)$, $x\in(0,\infty)$. Нека $g_{\min}=y$. Ќе определиме за која вредност на x истата се достигнува. Значи, ја решаваме равенката $y=g(x)=\frac{2(1+3x^2)}{x}$, односно равенката $6x^2-yx+2=0$. Последната равенка треба да има реални корени, па затоа дискриминантата е ненегативна, т.е. $D\geq 0$. Тогаш

$$y^2-48\geq 0 \Leftrightarrow y\leq -4\sqrt{3} \quad \text{или } y\geq 4\sqrt{3}.$$

Бидејќи $g>0$ го разгледуваме само случајот $y\geq 4\sqrt{3}$. Значи, најмалата вредност која функцијата може да ја достигне е $y=4\sqrt{3}$ и истата се достигнува кога $6x^2-4x\sqrt{3}+2=0$. Од последната равенка наоѓаме $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и притоа соодветниот агол на триаголникот е $\gamma=\frac{\pi}{3}$. Бидејќи триаголникот е рамнокрак, добиваме дека тој е рамностран.

56. Нека R,r,r_a,r_b,r_c и се радиусите на опишаната, впишаната и припишаните кружници, а α,β,γ се аглите на $\triangle ABC$. Докажи дека

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}$

б) $-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{r_a}{R}-1$,

в) $\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma=\frac{r_b}{R}-1$,

г) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=\frac{r_c}{R}-1$.

Решение. Ќе ја докажеме точноста на равенството под б). Од $abc=4RP$ имаме $R=\frac{abc}{4P}$ и ако замениме во равенството

$$-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{r_a}{R}-1,$$

добиваме

$$-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1=\frac{r_a}{\frac{abc}{4P}}$$

$$-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1=\frac{4r_aP}{abc}$$

односно го добиваме равенството

$$2abc(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)=8Pr_a.$$

Нека $L=2abc(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)$ и $D=8Pr_a$. Од косинусна теорема имаме

$$2bc\cos\alpha=-a^2+b^2+c^2,\quad 2ac\cos\beta=-b^2+a^2+c^2,\quad 2ab\cos\gamma=-c^2+a^2+b^2,$$

па затоа

$$\begin{aligned}L&=-a(-a^2+b^2+c^2)+b(a^2-b^2+c^2)+c(a^2+b^2-c^2)+2abc\\&=a^3+a^2(b+c)-a(b^2+c^2-2bc)-b^3+b^2c+bc^2-c^3\\&=a^2(a+b+c)-(b-c)^2(a+b+c)=(a+b+c)[a^2-(b-c)^2]\\&=(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=2s(2s-2b)(2s-2c)\\&=8s(s-b)(s-c)=\frac{8P^2}{s-a}=\frac{8r_a^2(s-a)^2}{s-a}=8r_a(s-a)r_a=8Pr_a=D.\end{aligned}$$

57. Дадени се пет отсечки, така што од секои три од нив може да се состави триаголник. Докажи дека барем еден од тие триаголници е остроаголен.

Решение. Нека должините на дадените отсечки се a,b,c,d и e, при што $a\le b\le c\le d\le e$. Да претпоставиме дека ниту еден од триаголниците кои се добиваат не е остроаголен. Ако искористиме дека за триаголник кој не е остроаголен, со страни $x\le y\le z$, од косинусната теорема важи

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos\gamma\ge x^2+y^2$$

(γ не е остар, па $\cos\gamma\le 0$), добиваме релации

$$e^2\ge d^2+c^2,\ \ d^2\ge c^2+b^2,\ \ c^2\ge b^2+a^2.$$

Со собирање на последните три неравенства се добива

$$e^2\ge a^2+2b^2+a^2\ge a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

односно $e\ge a+b$, што е противречност на условот дека од отсечките со должини a,b и e, може да се состави триаголник. Јасно , мора барем еден од триаголниците да е остроаголен.

58. Односот на радиусот R на опишаната кружница и радиусот r на впишаната кружница во триаголник $\triangle ABC$ кој е рамнокрак е k. Пресметај ја вредноста $\cos\alpha$ ако со α е означен аголот при основата на $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, A_1,B_1,C_1 се допирните точки впишаната кружница со страните на триаголникот и $\frac{R}{r}=k$. Од $\triangle AOC_1$ имаме $\frac{r}{2}=\frac{r}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Од друга страна од синусна теорема имаме

$$\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$$\frac{c}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=2R$$

$$\frac{c}{2}=R\sin\alpha$$

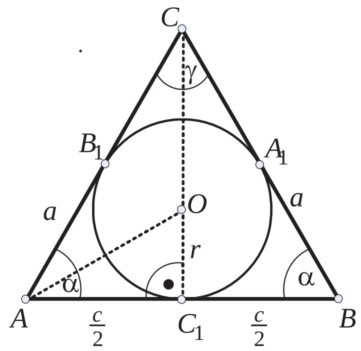
Тогаш

$$r=R\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$$

$$2\frac{R}{r}\cos\alpha(1-\cos\alpha)=1$$

$$2k\cos\alpha-2k\cos^2\alpha-1=0\,.$$



Со решавање на последната квадратна равенка добиваме

$$\cos\alpha=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-8k}}{4k}=\frac{2k\pm2\sqrt{k^2-2k}}{4k}\,,$$

односно $\cos\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{k^2-2k}}{2k}$.

59. Триаголникот ABC е остроаголен. Докажи дека броевите

а) $a\cos\alpha,\ b\cos\beta,\ c\cos\gamma$

б) $a\sin\alpha,\ b\sin\beta,\ c\sin\gamma$

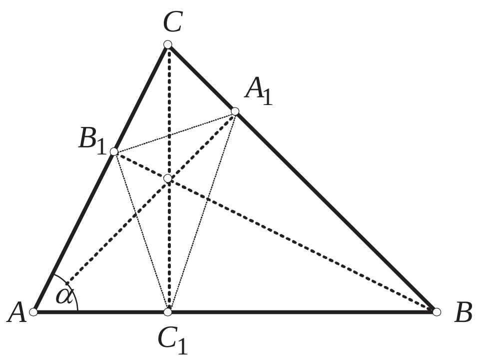
се страни на некој триаголник.

Решение. а) Нека AA_1, BB_1, CC_1 се висините во $\triangle ABC$ (види цртеж), тогаш од правоаголните триаголници ABB_1 и ACC_1 имаме:

$$\overline{AB_1}:\overline{AB}=\overline{AC_1}:\overline{AC}=\cos\alpha$$

т.е.

$$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{AB}:\overline{AC}$$



па следува дека $\triangle AB_1C_1\sim\triangle ABC$. Тогаш $\overline{B_1C_1}:\overline{BC}=\cos\alpha$, т.е. $\overline{B_1C_1}=a\cos\alpha$.

Аналогно докажуваме дека $\overline{A_1B_1}=c\cos\gamma$, $\overline{A_1C_1}=b\cos\beta$, па значи $\triangle A_1B_1C_1$ е тој чии страни се броевите: $a\cos\alpha,\ \ b\cos\beta,\ \ c\cos\gamma$.

б) Според косинусна теорема имаме

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Бидејќи триаголникот ABC е остроаголен, следува

$$\cos\alpha>0 \quad \text{и} \quad a^2<b^2+c^2\,.$$

Нека R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC, тогаш

$$\frac{a^2}{2R}<\frac{b^2}{2R}+\frac{c^2}{2R}$$

Според синусната теорема имаме:

$$\frac{a}{2R}=\sin\alpha\,,\quad \frac{b}{2R}=\sin\beta\,,\quad \frac{c}{2R}=\sin\gamma$$

па добиваме

$$a\sin\alpha < b\sin\beta + c\sin\gamma .$$

Аналогно докажуваме дека

$$b\sin\beta < a\sin\alpha + c\sin\gamma \quad \text{и} \quad c\sin\gamma < a\sin\alpha + b\sin\beta$$

од каде заклучуваме дека постои триаголник, чии страни се броевите:

$$a\sin\alpha, b\sin\beta, c\sin\gamma .$$

60. Докажи дека за произволна точка P која припаѓа на впишаната кружница на рамностраниот триаголник ABC важи равенството

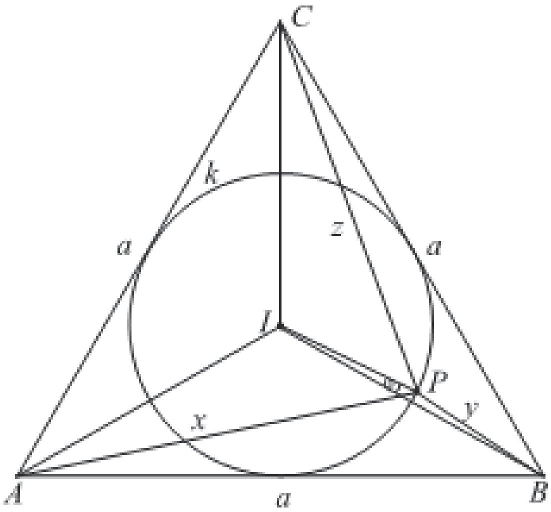
$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \tfrac{5a^2}{4}, \qquad (1)$$

каде a е должина на страната на триаголникот.

Решение. Да воведеме ознаки како на цртежот:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a,\ \ \overline{IA} = \overline{IB} = \overline{IC} = \tfrac{a\sqrt{3}}{3},\ \ \overline{IP} = r = \tfrac{a\sqrt{3}}{6}; (P \in k) \text{ и } \measuredangle BIP = \varphi .$$

Ако ја примениме косинусната теорема на $\triangle AIP, \triangle BIP$ и $\triangle CIP$, последователно, добиваме:



$$\overline{PA}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IA}^2 - 2\overline{IP}\cdot\overline{IA}\cos\measuredangle AIP ,$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IB}^2 - 2\overline{IP}\cdot\overline{IB}\cos\measuredangle BIP ,$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IC}^2 - 2\overline{IP}\cdot\overline{IC}\cos\measuredangle CIP ,$$

а отткука заради

$$\overline{IP} = r = \tfrac{a}{6}\sqrt{3},\ \overline{IA} = \overline{IB} = \overline{IC} = \tfrac{a}{3}\sqrt{3},$$

$$\measuredangle AIP = 120^\circ + \varphi, \measuredangle BIP = \varphi,$$

$$\measuredangle CIP = 120^\circ - \varphi$$

(бидејќи $\measuredangle AIB = \measuredangle BIC = \measuredangle AIC = 120^\circ$) по собирањето на горните три равенства имаме:

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= 3\cdot\tfrac{a^2}{12} + 3\cdot\tfrac{a^2}{3} - 3\cdot\tfrac{a^2}{3}[\cos(120^0+\varphi) + \cos\varphi + \cos(120^0-\varphi)] \\ &= \tfrac{a^2}{4} + a^2 - a^2(2\cos 120^0\cos\varphi + \cos\varphi) \\ &= \tfrac{5a^2}{4} - a^2(-\cos\varphi + \cos\varphi) = \tfrac{5a^2}{5}\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

61. Во триаголникот ABC точката O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, точката M е средината на страната AB. Опишаната кружница околу триаголникот AMO ја сече страната AC во точка K. Ако $\overline{AK} = 3, \overline{MK} = 4$ и $\measuredangle AOM = 45^\circ$, тогаш

а) определи ги должините на страните AC и BC;

б) определи ја должината на страната AB.

Решение. Од условот на задачата $\measuredangle AOM = 45^\circ$ следува, дека $\measuredangle ACB = 45^\circ$ или $\measuredangle ACB = 135^\circ$. Од тоа што OM е симетрала на AB, следува дека OK е симетрала на AC.

а) Од досега изнесеното наоѓаме дека $\overline{AC}=2\cdot\overline{AK}=2\cdot3=6$ и $\overline{BC}=2\cdot\overline{MK}=2\cdot4=8$ (MK е средна линија).

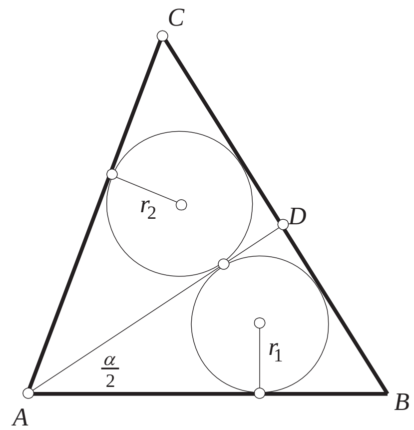
б) За страната AB ја применуваме косинусната теорема и добиваме

Ако $\measuredangle ACB=45^\circ$, тогаш $\overline{AB}^2=36+64-2\cdot6\cdot8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\overline{AB}=\sqrt{100-48\sqrt{2}}$.

Ако $\measuredangle ACB=135^\circ$, тогаш $\overline{AB}^2=36+64+2\cdot6\cdot8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\overline{AB}=\sqrt{100+48\sqrt{2}}$.

62. Триаголникот ABC е зададен со: $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=15$ и $\overline{BC}=18$; AD е симетрала на $\measuredangle A$. Најди го односот $r_1:r_2$, каде што r_1 и r_2 се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABD и ACD.

Решение. За да ги одредиме радиусите r_1 и r_2 на триаголниците ABD и ACD (види цртеж), треба да ги најдеме страните на тие триаголници. Бидејќи AD е симетрала на $\measuredangle A$ имаме:



$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$$
$$12:15=\overline{BD}:\overline{DC}$$
$$(12+15):15=(\overline{BD}+\overline{DC}):\overline{BD}$$
$$27:12=18:\overline{BD}$$

од каде што добиваме $\overline{BD}=8$.

Тогаш, $\overline{DC}=\overline{BC}-\overline{BD}=18-8=10$. Да ја пресметаме сега должината l на отсечката AD. Од косинусната теорема за триаголниците ABD и ACD имаме:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{12^2+l^2-8^2}{2\cdot12\cdot l},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{15^2+l^2-10^2}{2\cdot15\cdot l},$$

од каде што по изедначување на десните страни наоѓаме $l=10$.

Сега ги пресметуваме плоштините P_1 и P_2 на триаголниците ABD и ACD по Хероновата формула:

$$s_1=\frac{12+8+10}{2}=15,\qquad P_1=\sqrt{15\cdot3\cdot7\cdot5}=15\sqrt{7}$$

$$s_2=\frac{10+10+15}{2}=\frac{35}{2},\qquad P_2=\sqrt{\frac{35}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{75\sqrt{7}}{4}.$$

На крајот ги одредуваме радиусите r_1 и r_2:

$$r_1=\frac{P_1}{s_1}=\frac{15\sqrt{7}}{15}=\sqrt{7},\ r_2=\frac{P_2}{s_2}=\frac{15\sqrt{7}}{14}$$

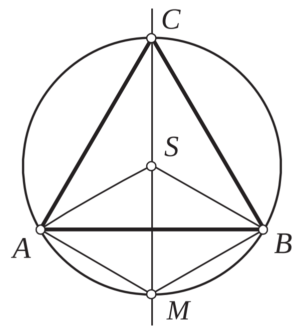
и конечно наоѓаме дека $r_1:r_2=14:15$.

63. Околу рамностраниот триаголник ABC опишана е кружница. Докажи дека за секоја точка M од лакот AB, на кој не припаѓа точката C, важи $\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{MC}$.

Решение. *Прв начин.* Да ја примениме косинусната теорема на триаголниците AMC и MBC. Добиваме

$$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2-2\,\overline{AM}\cdot\overline{MC}\cdot\cos\measuredangle AMC \text{ и}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MB}\cdot\overline{MC}\cdot\cos\measuredangle CMB.$$



Бидејќи

$$\measuredangle AMC = \measuredangle ABC = \measuredangle BAC = \measuredangle CMB = 60^\circ$$

(периферни агли над ист кружен лак) добиваме

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{AM}\cdot\overline{MC} \quad \text{и}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{MB}\cdot\overline{MC}.$$

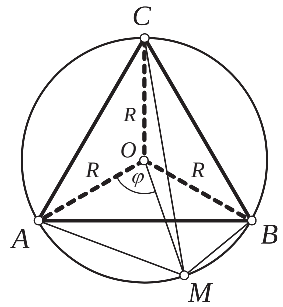
Одземајќи ги последниве две равенства и имајќи предвид дека $\overline{AC} = \overline{BC}$, добиваме

$$0 = \overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC}\cdot(\overline{AM} - \overline{MB}). \qquad (1)$$

Ако $\overline{AM} - \overline{MB} \neq 0$, равенството (1) го делиме со $\overline{AM} - \overline{MB}$ и добиваме $0 = \overline{AM} + \overline{MB} - \overline{MC}$, односно $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{MC}$.

Ако $\overline{AM} - \overline{MB} = 0$, тогаш CM минува низ центарот S на опишаната кружница, па важи $\measuredangle ASM = \frac{1}{2}\measuredangle ASB = \frac{1}{2}\cdot 2\measuredangle AMC = \measuredangle AMS$. Според тоа триаголникот ASM е рамнокрак со основа SM. Но $\overline{SM} = \overline{SA}$, па тој е и рамностран. Слично, и триаголникот MSB е рамностран. Според тоа $\overline{MC} = \overline{MS} + \overline{MS} = \overline{MA} + \overline{MB}$.

Втор начин. Нека $\measuredangle AOM = \varphi$. Тогаш



$$\measuredangle AOB = \measuredangle BOC = \measuredangle COA = 120^\circ, \ \measuredangle MOB = 120^\circ - \varphi,$$

$$\measuredangle MOC = 240^\circ - \varphi, \ \measuredangle MAO = \measuredangle AMO = \frac{180^\circ - \varphi}{2},$$

$$\measuredangle MBO = \measuredangle BMO = \frac{180^\circ - (120^\circ - \varphi)}{2} = \frac{60^\circ + \varphi}{2}, \text{ и}$$

$$\measuredangle MCO = \measuredangle CMO = \frac{180^\circ - (240^\circ - \varphi)}{2} = \frac{\varphi - 60^\circ}{2}.$$

Сега да ја примениме синусната теорема на триаголниците MOA, MOB и MOC, соодветно:

$$\frac{\overline{MA}}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\frac{180^\circ - \varphi}{2}} \Rightarrow \overline{MA} = R\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{180^\circ - \varphi}{2}} = R\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin(90^\circ - \frac{\varphi}{2})} = R\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = 2R\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{\overline{MB}}{\sin(120^\circ - \varphi)} = R\frac{1}{\sin\frac{180^\circ - (120^\circ - \varphi)}{2}} \Rightarrow \overline{MB} = 2R\sin\frac{120^\circ - \varphi}{2} \quad \text{и}$$

$$\frac{\overline{MC}}{\sin(240^\circ - \varphi)} = \frac{R}{\sin\frac{180^\circ - (240^\circ - \varphi)}{2}} \Rightarrow \overline{MC} = R\frac{\sin(240^\circ - \varphi)}{\sin(90^\circ - \frac{240^\circ - \varphi}{2})} = 2R\cos\frac{60^\circ - \varphi}{2}.$$

Според тоа

$$\overline{MA} + \overline{MB} = 2R(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{120^\circ - \varphi}{2}) = 4R\sin\frac{\frac{\varphi}{2} + \frac{120^\circ - \varphi}{2}}{2}\cos\frac{\frac{120^\circ - \varphi}{2} - \frac{\varphi}{2}}{2}$$

$$= 4R\sin 30^\circ\cos\frac{60^\circ - \varphi}{2} = 4R\frac{1}{2}\cos\frac{60^\circ - \varphi}{2} = 2R\cos\frac{60^\circ - \varphi}{2} = \overline{MC}.$$

64. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се висини во триаголникот ABC ($AC \neq BC$).

Определи го аголот $\measuredangle ACB$, ако $\measuredangle AA_1C_1 = \measuredangle BB_1C_1$.

Решение. Без ограничувањена општоста можеме да претпоставимедека $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека A' е симетрична точка на точката A во однос на симетралата CC_1, а I е пресек на симетралите на аглите на триаголникот. Следствено,

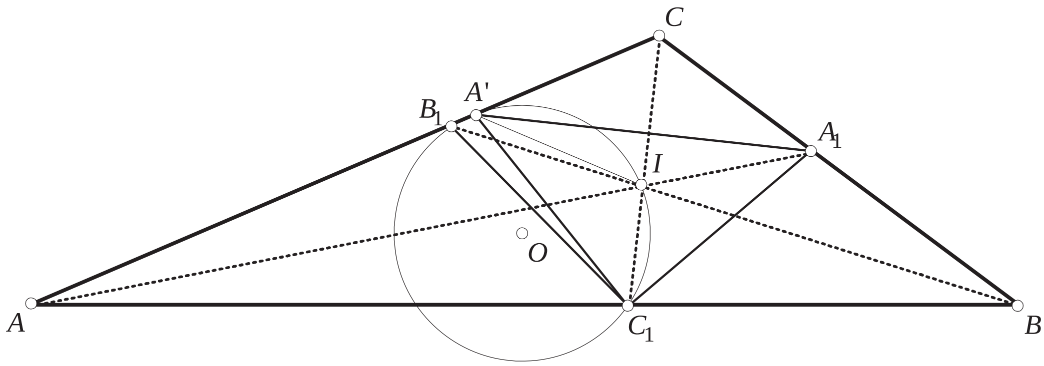
$$\measuredangle IA'C_1 = \measuredangle IA_1C_1 = \measuredangle IB_1C_1.$$

Од последните равенства, добиваме дека четириаголникот $IA'B_1C_1$ е тетивен и според тоа

$$\overline{CA'} \cdot \overline{CB_1} = \overline{CI} \cdot \overline{CC_1}. \qquad (1)$$

Ако воведеме стандардни ознаки $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$,од особини на симетрали на агли имаме

$$\overline{CA'} = \overline{CA_1} = \frac{ab}{b+c},\ \overline{CB_1} = \frac{ab}{a+c},\ \overline{CI} \cdot \overline{CC_1} = \frac{a+b}{a+b+c}\overline{CI}^2 = \frac{a+b-c}{a+b}ab.$$



Ако замениме во равенството (1), имаме

$$\frac{ab}{b+c}\frac{ab}{a+c} = \frac{a+b-c}{a+b}ab,$$

кое е еквивалентно со равенството

$$a^2 + b^2 + ab = c^2. \qquad (2)$$

Од друга страна пак, од косинусна теорема имаме

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad (3)$$

Од (2) и (3) имаме $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$, односно $\gamma = 120^\circ$.

65. Докажи дека

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{abc},$$

каде α, β, γ се агли во триаголник, a, b, c се соодветните страни, а s е полупериметарот на триаголникот.

Решение. Ако го искористиме идентитетот за двоен агол $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$, за $\theta = \alpha, \beta, \gamma$, десната страна на равенството ќе го добие обликот:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{a}\frac{1+\cos\alpha}{2} + \frac{1}{b}\frac{1+\cos\beta}{2} + \frac{1}{c}\frac{1+\cos\gamma}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{bc+ca+ab}{abc} + \frac{1}{2}\frac{bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma}{abc} = (*)$$

Ако за триаголникот ја искористиме косинусна теорема

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

односно

$$bc\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2),\ ac\cos\beta = \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \text{ и } ab\cos\gamma = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

и замениме во (*), добиваме:

$$(*) = \frac{1}{4}\frac{2bc+2ca+2ab}{abc} + \frac{1}{4}\frac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{abc}$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{4abc} = \frac{(a+b+c)^2}{4abc} = \frac{(\frac{a+b+c}{2})^2}{abc} = \frac{s^2}{abc}.$$

66. За $\triangle ABC$ со ортоцентар H важат равенствата

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = 7 \text{ и } \overline{AH}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CH} = 3.$$

а) Определи го радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

б) Определи ги страните на $\triangle ABC$ со максимална плоштина.

Решение. а) Ако $\triangle ABC$ е остроаголен, тогаш од косинусната теорема за $\triangle AHB$ следува

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 - 2\overline{AH}\cdot\overline{BH}\cos(\pi-\gamma).$$

Бидејќи $\overline{AB} = 2R\sin\gamma$ и $\overline{CH} = 2R\cos\gamma$, добиваме $\overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 = 4R^2$ и затоа

$$4R^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 + \frac{\overline{AH}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CH}}{R}.$$

Тогаш $4R^3 = 7R + 3$, т.е. $(R+1)(2R+1)(2R-3) = 0$, од каде наоѓаме $R = \frac{3}{2}$.

Ако $\triangle ABC$ е тапоаголен, аналогно наоѓаме

$$4R^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 - \frac{\overline{AH}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CH}}{R}$$

и затоа

$$4R^3 = 7R - 3, \text{ т.е. } (R-1)(2R-1)(2R+3) = 0.$$

Бидејќи $3 = \overline{AH}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CH} < (2R)^2$, заклучуваме дека $R = 1$. Егзистенцијата на $\triangle ABC$ со $R = \frac{3}{2}$ и $R = 1$ следува од б).

б) Со P да ја означиме плоштината на $\triangle ABC$. Од $P = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4R}$ следува

$$P^2 = \frac{(4R^2-\overline{AH}^2)(4R^2-\overline{BH}^2)(4R^2-\overline{CH}^2)}{16R^2}.$$

Ако ставиме $x = \overline{AH}^2$, $y = \overline{BH}^2$, $z = \overline{CH}^2$, $t = 4R^2$ добиваме

$$P^2 = \frac{t^3-7t^2+t(zy|yz+zt)-9}{4t}.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x \geq y \geq z$. Тогаш $x \geq \frac{7}{3}$ и затоа

$$xy+yz+zx=\frac{9}{x}+x(7-x)=15-\frac{(x-3)^2(x-1)}{x}\le 15,$$

При што знак за равенство важи за $x=3$. Затоа $P^2\le\frac{t^3-7t^2+15t-9}{4t}$. Бидејќи $R=\frac{3}{2}$ и $R=1$, заклучуваме дека $P_{\max}=\sqrt{8}$ и оваа вредност се добива за остроаголен триаголник со $R=\frac{3}{2}$, $\overline{AH}=\overline{BH}=\sqrt{3},\overline{CH}=1$. Конечно страните на овој триаголник се еднакви на $\sqrt{8}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{6}$.

67. Даден е четириаголник $ABCD$, таков што

$$\overline{AB}=5\sqrt{2},\ \overline{BC}=5-\sqrt{3},\ \overline{DC}=2,\ \overline{AD}=4 \text{ и } \overline{AC}=2\sqrt{7}.$$

а) Определи ги аглите на четириаголникот.

б) Определи ја должината на отсечката која ги поврзува средините на дијагоналите на четириаголникот.

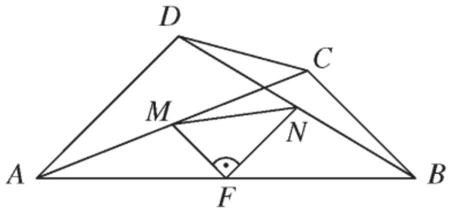
Решение. а) Од косинусната теорема, за $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, добиваме

$\cos\measuredangle ABC=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $\measuredangle ABC=45^\circ$,

$\cos\measuredangle ADC=-\frac{1}{2}$, т.е. $\measuredangle ADC=120^\circ$,

$\cos\measuredangle ACD=\frac{2}{\sqrt{7}}$, т.е. $\sin\measuredangle ACD=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, и

$\cos\measuredangle ACB=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, т.е. $\sin\measuredangle ACB=\frac{5}{2\sqrt{7}}$.



Затоа

$$\cos\measuredangle BCD=\cos\measuredangle BCA\cdot\cos\measuredangle ACD-\sin\measuredangle BCA\cdot\sin\measuredangle ACD=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ т.е. } \measuredangle BCD=150^\circ.$$

Конечно, $\measuredangle BAD=45^\circ$.

б) Нека M, N и F се средините на отсечките AC, BD и AB, соодветно. Бидејќи NF и MF се средни линии во $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$, соодветно, добиваме дека $NF\parallel AD$, $\overline{NF}=2$ и $MF\parallel BC$, $\overline{MF}=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$. Тогаш $\measuredangle MFN=\measuredangle(AC,BC)=90^\circ$ и од Питагоровата теорема за $\triangle MFN$ наоѓаме $\overline{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{44-10\sqrt{3}}$.

68. Нека X е произволна точка од хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC, при што $\overline{AX}=m$, $\overline{BX}=n$ и $\overline{CX}=d$. Докажи дека

$$a^2m^2+b^2n^2=c^2d^2.$$

Решение. Бидејќи $\frac{b}{c}=\cos\alpha$, според косинусната теорема за триаголникот ACX (направи цртеж) имаме

$$d^2=m^2+b^2-2mb\cos\alpha=m^2+b^2-2mb\frac{b}{c}=m^2+b^2-\frac{2mb^2}{c}.$$

Од равенството $m+n=c$, добиваме $n=c-m$ и

$$a^2m^2+b^2n^2=a^2m^2+b^2(c-m)^2=a^2m^2+b^2(c^2-2mc+m^2)$$
$$=a^2m^2+b^2m^2+b^2c^2-2cmb^2=m^2(a^2+b^2)+b^2c^2-2cmb^2$$

$$=m^2c^2+b^2c^2-2cmb^2=c^2(m^2+b^2-\frac{2mb^2}{c})=c^2d^2$$

што и требаше да се докаже.

69. Во било кој триаголник односот меѓу најмалата висина и најмалата бисектриса е поголем од $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Докажи!

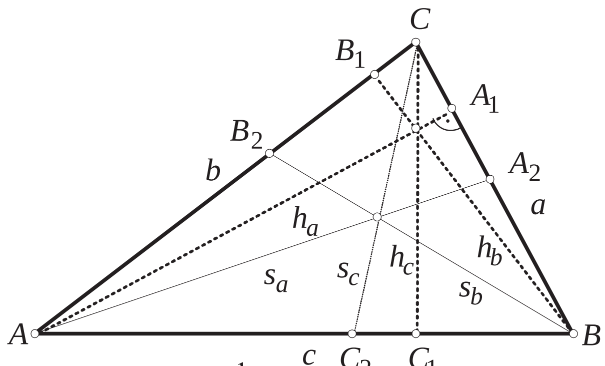
Решение. Најпрво ќе докажеме: Ако a,b и c се страни во триаголник и $a<b<c$, тогаш $h_a>h_b>h_c$, каде h_a,h_b и h_c се висините во триаголникот спуштени кон a, b и c, соодветно. Навистина, за плоштината на триаголникот имаме $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}$, т.е.

$$ah_a=bh_b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}.$$

Значи $\frac{h_b}{h_a}=\frac{a}{b}<1$, па $h_b<h_a$.

Аналогно се докжува и $h_c<h_b$.

Значи на помала страна во триаголникот одговара поголема висина (соодветна на страната). Ќе докажеме дека аналогно тврдење важи и за бисектрисите: на поголема страна во триаголникот соодветствува помала бисектриса. Нека a,b и c се страни во триаголник и $a<b<c$. Тогаш $h_a>h_b>h_c$.



цртеж 1

Ќе го докажеме следново тврдење:

За бисектрисите важат равенствата

$$s_a^2=\frac{bc((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2},\quad s_b^2=\frac{ac((a+c)^2-b^2)}{(a+c)^2}\quad \text{и}\quad s_c^2=\frac{ab((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2}.$$

Доказ. Нека s_a ја сече страната BC во точка A_2 (види цртеж 1). Плоштината на триаголникот ABA_2 е $P_1=cs_a\sin\frac{\alpha}{2}$, а плоштината на триаголникот AA_2C е $P_2=bs_a\sin\frac{\alpha}{2}$. Плоштината на триаголникот ABC е $P=bc\sin\alpha$. Бидејќи $P=P_1+P_2$ добиваме

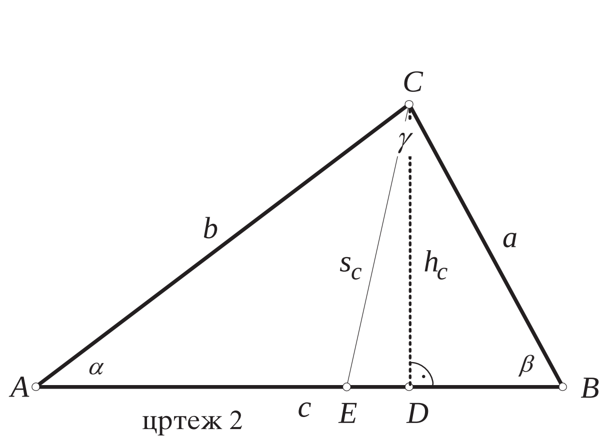
$$bc\sin\alpha=s_a(b+c)\sin\frac{\alpha}{2},$$

т.е. $s_a=\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. Значи ,

$$s_a=\frac{bc2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Со квадрирање на ова равенство добиваме

$$s_a{}^2=(\frac{2bc}{b+c})^2\cos^2\frac{\alpha}{2}=(\frac{2bc}{b+c})^2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$



цртеж 2

Од косинусната теорема за триаголникот ABC имаме $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ и со замена во s_a^2 добиваме $s_a^2 = \frac{bc((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2}$.

Аналогно се докажува и за s_b^2 и s_c^2.

Натаму имаме

$$s_b^2 - s_c^2 = a(\frac{c((a+c)^2-b^2)}{(a+c)^2} - \frac{b((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2}) = \ldots$$
$$= a(c-b+\frac{bc}{(a+b)^2(b+c)^2}(a^2(c-b)+2a(c^2-b^2)+c^3-b^3))$$

Бидејќи $a<b<c$ следува $c-b>0$, па $s_b^2 - s_c^2 > 0$. Заради $s_b, s_c > 0$ добиваме $s_b > s_c$. Аналогно се докажува дека $s_a > s_b$. Со тоа тврдењето за бисектрисите е докажано.

Сега во триаголникот ABC, при претпоставка дека $a<b<c$, најмалата висина е h_c и најмалата бисектриса е s_c. Тогаш и $\alpha<\beta<\gamma$, каде α, β и γ се аглите во триаголникот ABC спротивни на a, b и c соодветно. Според тоа аглите α и β се остри. Триаголникот CED е правоаголен, па и $\measuredangle CED$ е остар. Имаме

$$\measuredangle CED = 180^\circ - \measuredangle CBE - \measuredangle BCE = 180^\circ - \beta - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \beta - \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Заради $\alpha < \beta < 90^\circ$ добиваме $\frac{\beta-\alpha}{2} < 45^\circ$ и оттука $90^\circ > \measuredangle CED > 45^\circ$. Функцијата $\sin x$ е растечка за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, па

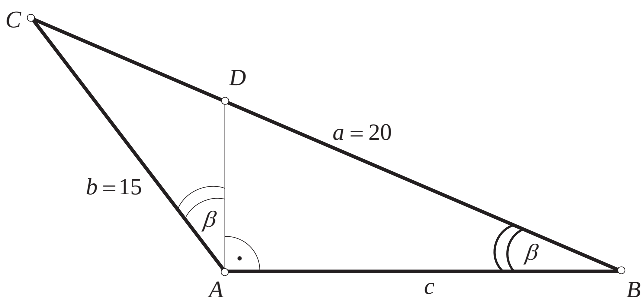
$$\frac{h_c}{s_c} = \sin\measuredangle CED > \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Со тоа тврдењето на задачата е докажано за $a<b<c$.

70. Пресметај ја страната c на $\triangle ABC$, ако се дадени: $a=20$, $b=15$ и $\alpha-\beta=90^\circ$.

Решение. Според тангенсната теорема, имаме

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}, \text{ т.е. } \frac{20-15}{20+15} = \frac{\operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},$$



од каде што наоѓаме

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ-\gamma}{2} = \operatorname{tg}(90^\circ - \frac{\gamma}{2})$$
$$= \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 7,$$

па тогаш

$$\cos\gamma = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}+1} = \frac{7^2-1}{7^2+1} = \frac{24}{25}.$$

Конечно, според косинусната теорема имаме

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 20^2 + 15^2 - 2\cdot 15\cdot 20\cdot\frac{24}{25} = 49,$$

од каде што добиваме $c=7$.

71. Докажи, ако во триаголникот ABC важи $\alpha-\beta=90^\circ$, тогаш

$$(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)c^2.$$

Решение. Според тангенсната теорема добиваме:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\mathrm{tg}\frac{(90^\circ+2\beta)}{2}=\mathrm{tg}(45^\circ+\beta)=\frac{\sin(45^\circ+\beta)}{\cos(45^\circ+\beta)}=\frac{\sin 45^\circ\cos\beta+\cos 45^\circ\sin\beta}{\cos 45^\circ\cos\beta-\sin 45^\circ\sin\beta}$$

$$=\frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}=\frac{\cos\beta+\sin(\alpha-90^\circ)}{\cos\beta-\sin(\alpha-90^\circ)}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{b(a^2+c^2-b^2)-a(b^2+c^2-a^2)}{b(a^2+c^2-b^2)+a(b^2+c^2-a^2)},$$

па затоа:

$$b^2(a^2+c^2-b^2)+a^2(b^2+c^2-a^2)=-b^2(a^2+c^2-b^2)-a^2(b^2+c^2-a^2)$$

$$a^2b^2+b^2c^2-b^4+a^2b^2+a^2c^2-a^4=0,$$

$$b^2c^2+a^2c^2=a^4+b^4-2a^2b^2,$$

$$(a^2+b^2)c^2=(a^2-b^2)^2.$$

72. Нека M е тежиштето на $\triangle ABC$. Докажи дека ако $\measuredangle AMB=2\measuredangle ACB$, тогаш

а) $\overline{AB}^4=\overline{AC}^4+\overline{BC}^4-\overline{AC}^2\cdot\overline{BC}^2$ и

б) $\measuredangle ACB\geq 60^\circ$.

Решение. а) При стандардните ознаки за елементите на триаголникот имаме

$$\mathrm{ctg}\measuredangle AMB=\frac{\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AM}\cdot\overline{MB}\sin\measuredangle AMB}=\frac{a^2+b^2-5c^2}{12P_{ABC}}.$$

Бидејќи $\mathrm{ctg}\,2\gamma=\frac{2\cos^2\gamma-1}{2\sin\gamma\cos\gamma}$, условот $\measuredangle AMB=2\gamma$ добива вид

$$\frac{a^2+b^2-5c^2}{3ab}=2\cos\gamma-\frac{1}{\cos\gamma}\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2+b^2-5c^2}{3ab}-\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=-\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3ab}=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}\quad\Leftrightarrow$$

$$(a^2+b^2)^2-c^4=3a^2b^2\quad\Leftrightarrow$$

$$c^4=a^4+b^4-a^2b^2.$$

б) Лесно се проверува дека $a^4+b^4-a^2b^2\geq(a^2+b^2-ab)^2$, за секои $a,b>0$. Тогаш од а) следува дека $a^2+b^2-2ab\cos\gamma=c^2\geq a^2+b^2-ab$, па затоа $\cos\gamma\leq\frac{1}{2}$, т.е. $\gamma\geq 60^\circ$.

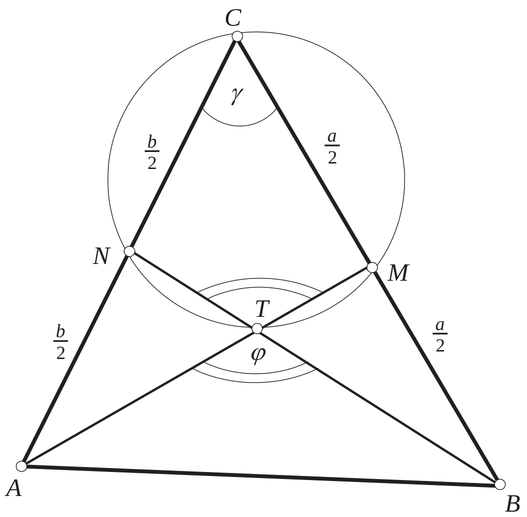
73. Нека AM и BN се тежишни линии на триаголникот ABC, а T е нивната пресечна точка. Најди ја должината $\overline{AB}$, ако $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ и точките M, T, N и C лежат на иста кружница.

Решение. За одредување на страната $\overline{AB}=c$ доволно е да го одредиме аголот γ (страните a и b се дадени).

Според косинусната теорема за триаголниците ABC и ABT (види цртеж), имаме

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \qquad (1)$$

$$c^2=\overline{AT}^2+\overline{BT}^2-2\overline{AT}\cdot\overline{BT}\cdot\cos\varphi \qquad (2)$$



Бидејќи $\gamma+\varphi=180^\circ$, следува

$$\cos\varphi=-\cos\gamma .$$

Да ги одредиме прво $\overline{AT}$ и $\overline{BT}$. По теоремата за степен на точка во однос на кружница имаме:

$$\overline{AN}\cdot\overline{AC}=\overline{AT}\cdot\overline{AM}\ ,\ b\frac{b}{2}=2x\cdot 3x\,,$$

$$x=\overline{TM}\ \ ,\ x=\frac{b}{2\sqrt{3}}\,,$$

па затоа

$$\overline{AT}=2x=\frac{b}{\sqrt{3}}\,. \qquad (3)$$

Аналогно наоѓаме дека $\overline{BT}=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Од (1), (2) и (3) следува

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma=\frac{b^2}{3}+\frac{a^2}{3}+2\frac{ab}{3}\cos\gamma\,,$$

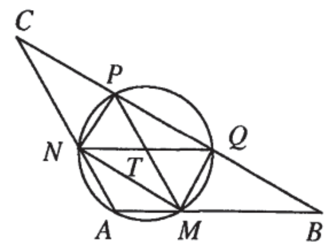
т.е. $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2}{4ab}$. Сега од (1) наоѓаме:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\frac{a^2+b^2}{4ab}\,,$$

од каде добиваме: $c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

74. Кружница низ темето A на $\triangle ABC,\ \overline{AB}\neq\overline{AC}$ ги сече страните AB и AC во точките M и N, соодветно и ја сече страната BC во точките P и Q така што Q е меѓу B и P. Определи го $\measuredangle BAC$ ако $MN\parallel AC$, $NQ\parallel AB$ и $\frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\overline{BC}=a,\overline{CA}=b$ и $\overline{AB}=c$. Од степенот на точка во однос на кружница имаме $\overline{BA}\cdot\overline{BM}=\overline{BP}\cdot\overline{BQ}$, а од паралелноста следува $\frac{\overline{BM}}{c}=\frac{\overline{BP}}{a}$. Оттука $\overline{BQ}=\frac{c^2}{a}$ и аналогно $\overline{CP}=\frac{b^2}{a}$. Според тоа, $\overline{BP}=\frac{a^2-b^2}{a},\overline{CQ}=\frac{a^2-c^2}{a}$ и условот $\frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ го добива обликот



$$b(a^2-b^2)=c(a^2-c^2)\text{, т.е. }(b-c)(a^2-b^2-c^2-bc)=0\,.$$

Бидејќи $b\neq c$, имаме $a^2-b^2-c^2-bc=0$, па од косинусната теорема следува

$\cos\measuredangle BAC = -\frac{1}{2}$, т.е. $\measuredangle BAC = 120^\circ$.

Втор начин. Бидејќи четириаголникот $AMPN$ е тетивен трапез, тој е рамнокрак, т.е. $\overline{AM} = \overline{NP}$. Исто така, ако $T = MP \cap NQ$, добиваме дека $AMTN$ е паралелогра, па затоа $\overline{AM} = \overline{NT}$. Значи, $\overline{NP} = \overline{NP}$ и аналогно $\overline{MQ} = \overline{MT}$. Значи, TPN и TMQ се рамнокраки слични триаголници, па затоа

$$\frac{\overline{TP}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{TN}}{\overline{TM}}. \qquad (1)$$

Од друга страна, од синусната теорема следува $\frac{\overline{MP}}{\sin\beta} = \frac{\overline{BP}}{\sin\alpha}, \frac{\overline{NQ}}{\sin\gamma} = \frac{\overline{CQ}}{\sin\alpha}$ и бидејќи $\frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, заклучуваме дека $\overline{MP} = \overline{NQ}$. Оттука о од (1) следува дека

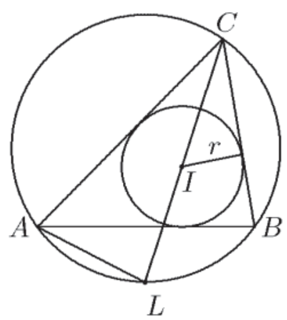
$$\overline{TM} + \overline{TQ}\cdot\frac{\overline{TN}}{\overline{TM}} = \overline{TM} + \overline{TQ}, \text{ т.е. } (\overline{TM} - \overline{TN})(\overline{TM} - \overline{TQ}) = 0.$$

Нека претпоставиме дека $\overline{TM} = \overline{TN}$. Имаме, $\overline{MQ} = \overline{NP}$ и $\overline{NA} = \overline{MA}$. Од првото од овие равенства следува дека $MN \parallel PQ$ и тогаш од второт следува дека $\overline{AB} = \overline{AC}$, што е противречност.

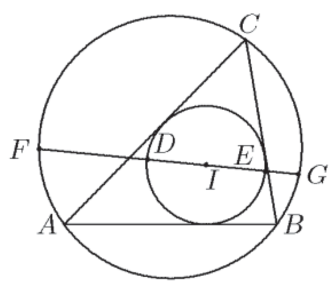
Според тоа, $\overline{TM} = \overline{TQ}$, т.е. MTQ е рамностран триаголник, од каде следува дека $\measuredangle BAC = \measuredangle MTN = 120^\circ$.

75. Права, која минува низа центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$, ја сече опишаната кружницата во точките F и G и впишаната кружница во точките D и E, при што D е меѓу I и F. Докажи, дека $\overline{DF}\cdot\overline{EG} \geq r^2$, каде r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Ќе докажеме дека степенот на центарот I на впишаната кружница во однос на опишаната кружница е еднаков на $2Rr$. Ако L е средината на лакот AB (види цртеж), тогаш од $\measuredangle LIA = \measuredangle LAI = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ следува $\overline{LI} = \overline{LA}$. Од синусната теорема за $\triangle ACL$ следува дека $\overline{LI} = \overline{LA} = 2R\sin\frac{\gamma}{2}$ и ако искористиме дека $\overline{CI} = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, добиваме $\overline{CI}\cdot\overline{LI} = 2Rr$. Оттука следува дека $\overline{FI}\cdot\overline{GI} = 2Rr$. Пресметуваме



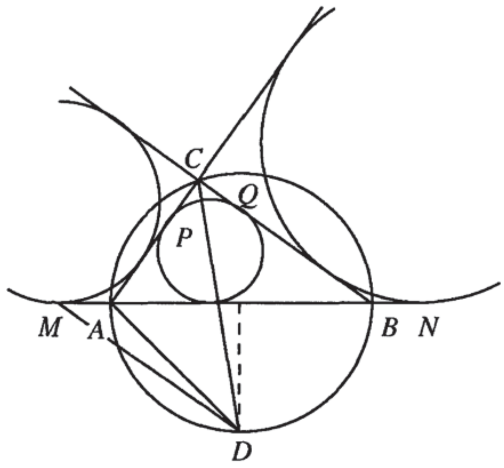
$$\begin{aligned}\overline{FD}\cdot\overline{EG} &= (\overline{FI} - r)(\overline{GI} - r)\\ &= \overline{FI}\cdot\overline{GI} - r(\overline{FI} + \overline{GI}) + r^2\\ &= 2Rr - r\overline{FG} + r^2.\end{aligned}$$



Неравенството $\overline{FD}\cdot\overline{EG} \geq r^2$ е еквивалелнтно со неравенството $2R \geq \overline{FG}$, кое очигледно важи. Знал за равенство важи ако и само ако FG е дијаметар.

76. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ се допира до страните AC и BC, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, во точките P и Q, соодветно, а припишаните кружници кон AC и BC се допираат до AB во точките M и N, соодветно. Ако точките M, N, P, Q лежат на една кружница, определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Симетралата на AB и симетралата на $\measuredangle ACB$ се сечат во средината D на лакот AB од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Бидејќи



$$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{CQ} = p - c$$

условот на задачата е еквивалентен на $\overline{DM} = \overline{DP}$. Од косинусната теорема имаме

$$\overline{DP}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CP}^2 - 2\overline{DC} \cdot \overline{CP} \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{DA} \cdot \overline{AM} \cos\frac{\gamma}{2}$$

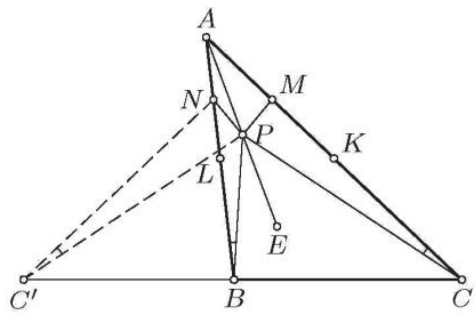
и ако ги одземеме последните равенства, добиваме

$$\overline{DC} - \overline{DA} = 2(p-c)\cos\frac{\gamma}{2} .$$

Од теоремата на Птоломеј имаме $\overline{DC} = \frac{(a+b)\overline{DA}}{c}$. Бидејќи $c = 2\overline{DA}\cos\frac{\gamma}{2}$, заклучуваме $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\gamma = 90^\circ$.

77. Во остроаголен триаголник ABC $(\overline{AB} \neq \overline{BC})$ со агол α при темето A, точката E е Ојлеровиот центар, а точката P припаѓа на отсечката AE. Ако $\measuredangle ABP = \measuredangle ACP = x$, докажи дека $x = 90^\circ - 2\alpha$.

Решение. *Прв начин*. Нека K и L се средините на страните AC и AB, соодветно, O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и $M \in AC, N \in AB$ се точки такви што $PM \parallel EK$ и $PN \parallel EL$. Имаме



$$\measuredangle PMC = \measuredangle EKC = \measuredangle LKC - \measuredangle LKE$$
$$= 180^\circ - \gamma - \measuredangle CBO = 2\alpha + \beta - 90^\circ.$$

Нека C' е симетричната точка на точката C во однос на симетралата на отсечката MN ($C' \equiv B$, бидејќи $\overline{AB} \neq \overline{BC}$). Точките B, P, N и C' припаѓаат на иста кружница, бидејќи $\measuredangle NC'P = \measuredangle NBP = x$. Оттука следува дека

$$\beta - x = \measuredangle CBP = \measuredangle PNC' = \measuredangle PMC = 2\alpha + \beta - 90^\circ,$$

од каде следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Од синусната теорема на Чева за точката P во $\triangle ABC$ следува

$$\frac{\sin\measuredangle CAE}{\sin\measuredangle EAB}=\frac{\sin\measuredangle PBC}{\sin\measuredangle PCB}=\frac{\sin(\beta-x)}{\sin(\gamma-x)}.$$

Од друга страна, од истата теорема за точката E во $\triangle AKL$ следува

$$\frac{\sin\measuredangle CAE}{\sin\measuredangle EAB}=\frac{\sin\measuredangle AKE}{\sin\measuredangle ELA}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}.$$

Од последните две релации следува

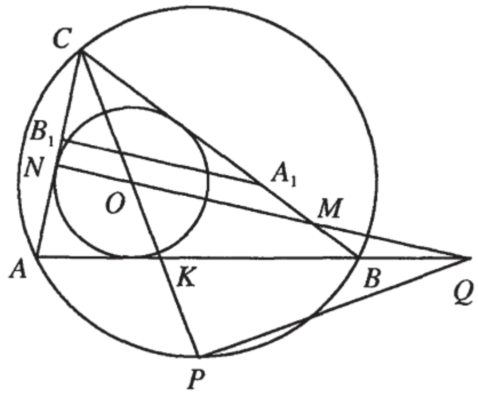
$$\begin{aligned}0&=\sin(\beta-x)\cos(\beta-\alpha)-\sin(\gamma-x)\cos(\gamma-\alpha)\\&=\tfrac{1}{2}(\sin(2\beta-\alpha-x)+\sin(\alpha-x)-\sin(2\gamma-\alpha-x)-\sin(\alpha-x))\\&=\sin(\beta-\gamma)\cos(180^\circ-2\alpha-x),\end{aligned}$$

од каде следува $x=90^\circ-2\alpha$.

78. Во остроаголен $\triangle ABC, \overline{CA}\neq\overline{CB}$, точките A_1 и B_1 се допирните точки на припишаните кружници кон страните CB и CA, соодветно и O е центарот на впишаната кружница. Правата CO по вторпат ја сече кружницата опишана околу $\triangle ABC$ во точка P, а нормалата на правата CP во повлечена во точката P ја сеча правата AB во точката Q. Докажи, дека правите QO и A_1B_1 се паралелни.

Решение. Нека $K=CO\cap AB$ и $\measuredangle AKC=\varphi$. Нека M и N се пресечните точки на QO со BC и CA, соодвето. Од $\triangle APB$ и синусната теорема добиваме

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\sin(90^\circ+\beta)}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\beta}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \quad (1)$$



Од правоаголниот $\triangle KPQ$ наоѓаме

$$\frac{\overline{KQ}}{\overline{PQ}}=\frac{1}{\sin\varphi}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QK}}=\frac{\cos\beta\sin\varphi}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \quad (3)$$

Од $\triangle AKC$ и својството на симетралата на агол следува дека

$$\frac{\overline{KO}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi}. \quad (4)$$

Ако ја примениме теоремата на Менелај за $\triangle AKC$ и правата OQ добиваме

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QK}}\cdot\frac{\overline{KO}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}=1.$$

Ако во последното равенство замениме од (3) и (4) наоѓаме $\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}=\frac{1}{\cos\beta}$, па затоа $\frac{\overline{CN}}{\overline{CA}}=\frac{1}{1+\cos\beta}$, т.е. $\overline{CN}=\frac{2R\sin\beta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}=2R\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Аналогно наоѓаме $\overline{CM}=2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Според тоа,

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \quad (5)$$

Од друга страна, знаеме дека $\overline{B_1C}=p-a=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $\overline{A_1C}=p-b=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

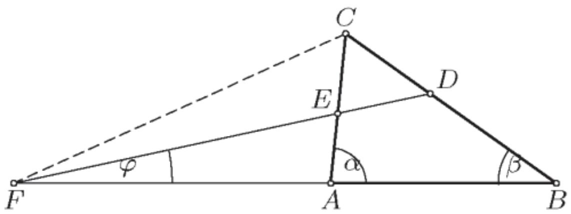
Конечно, ако го искористиме (5) добиваме

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{A_1C}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}},$$

па затоа правите MN и A_1B_1 се паралелни, т.е. правите QO и A_1B_1 се паралелни.

79. Дадедн е разностран триаголник ABC. Нека α и β се аглите при темињата A и B, соодветно и нека симетралите на овие агли ги сечат спротивните страни на триаголникот во точките D и E, соодветно. Докажи, дека остриот агол меѓу правите DE и AB е помал или еднаков на $\frac{|\alpha-\beta|}{3}$.

Решение. Како и обично да означиме $\measuredangle ACB=\gamma$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ и $\overline{AB}=c$, при што без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a>b$ и $\alpha>\beta$. Нека F е пресечната точка на правите DE и AB, а φ е аголот меѓу овие прави. Од $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{c}{b}$ и $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{a}{c}$ добиваме $\overline{BD}=\frac{ac}{b+c}$, $\overline{DC}=\frac{ab}{b+c}$, $\overline{CE}=\frac{ab}{a+c}$ и $\overline{EA}=\frac{bc}{a+c}$. Сега од теоремата на Менелај за правата DE и триаголникот ABC следува $\overline{AF}=\frac{bc}{a-b}$ и $\overline{FB}=\frac{ac}{a-b}$. Понатаму, од синусната теорема применета на триаголниците FEA и FDB следува



$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{\sin\measuredangle FEA}{\sin\measuredangle EFA}=\frac{\overline{FA}}{\overline{EA}}=\frac{\frac{bc}{a-b}}{\frac{bc}{a+c}}=\frac{a+c}{a-b} \text{ и}$$

$$\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{\sin\measuredangle FDB}{\sin\measuredangle DFB}=\frac{\overline{FB}}{\overline{DB}}=\frac{\frac{ac}{a-b}}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a-b},$$

од што добиваме

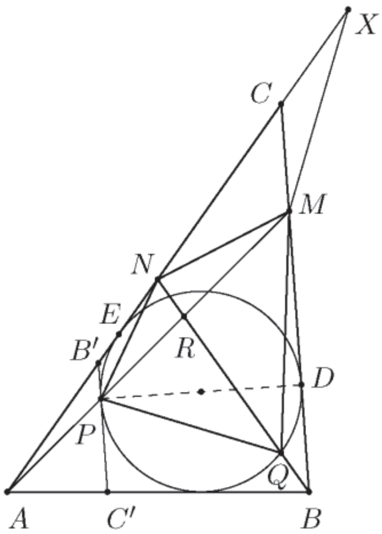
$$\sin\varphi=\sin(\alpha-\varphi)-\sin(\beta+\varphi)=2\sin\frac{\alpha-\beta-2\varphi}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}<\sin(\alpha-\beta-2\varphi).$$

Оттука следува $\varphi<\alpha-\beta-2\varphi$, т.е. $3\varphi<\alpha-\beta$.

80. Впишаната кружница k во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC соодветно во точките D и E. Правата која минува низ точката D и е нормална на BC ја сече k во точка P поблиска до A. Правата AP ја сече BC во точката M. Нека N е точка од отсечката AC таква што $\overline{AE}=\overline{CN}$ и BN ја сече k во точката Q поблиска до B и ја сече AM во точката R. Докажи, дека $\triangle ABR$ и четириаголникот $PQMN$ имаат еднакви плоштини.

Решение. Нека правата која минува низ точката P и е паралелна на правата BC ги сече правите AB и AC соодветно во точките B' и C'. Јасно, правата $B'C'$ е тангента на кружницата k. Нека Y и Z се произволни точки на правата BC, а Y' и Z' се пресечните точки на правата AB соодветно со правите AY и AZ. Ако h_a' и h_a се соодветно височините на $\triangle AB'C'$ и $\triangle ABC$, тогаш $\triangle AB'C'\sim\triangle ABC$ и $\triangle AY'Z'\sim\triangle AYZ$, па затоа

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{h_a'}{h_a}=\frac{\overline{Y'Z'}}{\overline{YZ}}. \qquad (1)$$



Со a,b,c,a',b' и c' да ги означиме соодветно должините на страните $BC, AC, AB, B'C', AC'$ и AB', а со s и s' полупериметрите на $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$. Имаме, $\overline{B'P}+\overline{PC'}=a', c'+\overline{B'P}=b'+\overline{PC'}$, па затоа $\overline{PC'}=s'-b'$. Сега од (1) следува

$$\frac{\overline{PC'}}{\overline{MC}}=\frac{a'}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{MC}=a\frac{a'-b'}{a'}=a\frac{s-b}{a}=s-b=\overline{BD}.$$

На продолжението на страната AC преку точката C избираме точка X таква што $\overline{CX}=\overline{MC}$. Од сличноста на $\triangle APE$ и $\triangle AMX$ следува $\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AX}}=\frac{s-a}{a}$. Сега, од теоремата на Менелај за $\triangle AMC$ и правата BN наоѓаме $\frac{\overline{AR}}{\overline{RM}}\frac{\overline{MB}}{\overline{CB}}\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}=1$, па затоа

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RM}}=\frac{a}{s-c}\frac{s-c}{s-a}=\frac{a}{s-a}, \text{ т.е. } \frac{\overline{AM}}{\overline{RM}}=\frac{a}{s-a}.$$

Оттука $\overline{RM}=\overline{AP}$, па затоа $\overline{AR}=\overline{PM}$. Аналогно добиваме $\overline{RB}=\overline{QN}$. Ако θ е аголот меѓу страните AR и BR, тогаш

$$P_{\triangle ARB}=\tfrac{1}{2}\overline{AR}\cdot\overline{BR}\sin\theta=\tfrac{1}{2}\overline{PM}\cdot\overline{QN}\sin\theta=P_{PQMN}.$$

81. Нека ABC е триаголник при што точките A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB соодветно. Нека P е точка од опишаната кружница k околу триаголникот ABC. Правите PA_1, PB_1 и PC_1 ја сечат по вторпат кружницата k во точките A', B', C' соодветно. Нека точките A,B,C,A',B',C' се по парови различни, и правите AA', BB' и CC' формираат триаголник. Докажи дека плоштината на тој триаголник не зависи од изборот на точката P.

Решение. Нека A_0, B_0, C_0 се точки на пресек на правите AA', BB' и CC' (види цртеж). Ќе покажеме дека $P_{A_0B_0C_0}=\frac{1}{2}P_{ABC}$. Ќе го разгледаме шестоаголникот $ABCC'PA'$. Според теоремата на Паскал, пресеците на спротивните страни се сечат во точки кои припаѓаат на една права. Според тоа, точките

$$AB\cap C'P=C_1,\ BC\cap PA'=A_1 \text{ и } CC'\cap AA'=B_0$$

лежат на една права. Според тоа, точката B_0 лежи на средната линија на A_1C_1 на триаголникот ABC. Аналогно, точката A_0 припаѓа на средната линија B_1C_1 и C_0 припаѓа на средната линија B_1A_1 на триаголникот ABC (види цртеж).

Отсечките AC и A_1C_1 се паралелни, па според тоа, триаголниците $B_0C_0A_1$ и AC_0B_1 се слични. Од сличноста добиваме

$$\frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{AC_0}}=\frac{\overline{A_1C_0}}{\overline{B_1C_0}}. \qquad (1)$$

Аналогно, од тоа што $BC \parallel B_1C_1$, добиваме дека триаголниците $B_1A_0C_0$ и A_1BC_0 се слични. Според тоа, од сличноста добиваме

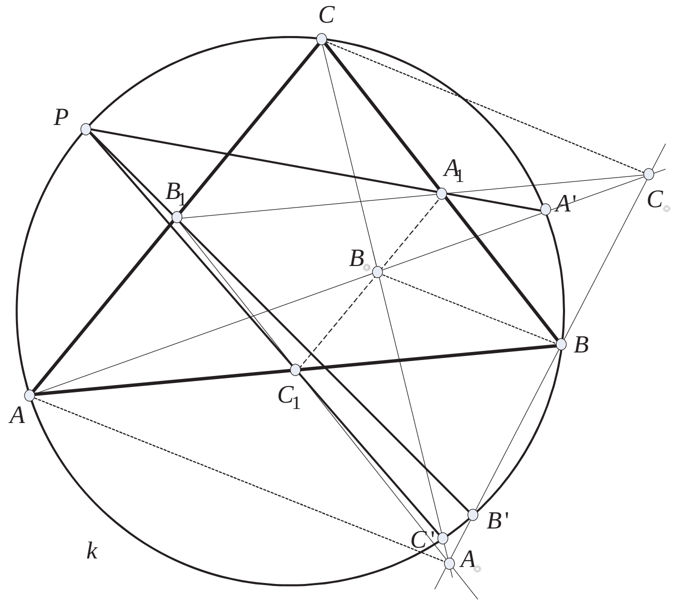
$$\frac{\overline{A_1C_0}}{\overline{B_1C_0}}=\frac{\overline{BC_0}}{\overline{A_0C_0}}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека

$$\frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{AC_0}}=\frac{\overline{BC_0}}{\overline{A_0C_0}},$$

кое е еквивалентно со равенството:

$$\overline{B_0C_0}\cdot\overline{A_0C_0}=\overline{AC_0}\cdot\overline{BC_0}.$$



Според тоа,

$$P_{A_0B_0C_0}=\tfrac{1}{2}\overline{B_0C_0}\cdot\overline{A_0C_0}\sin\measuredangle A_0B_0C_0=\tfrac{1}{2}\overline{AC_0}\cdot\overline{BC_0}\sin\measuredangle AC_0B=P_{ABC_0}.$$

Точката C_0 припаѓа на средната линија B_1A_1 на триаголникот ABC од каде што добиваме дека $d(C_0,AB)=\frac{1}{2}d(C,AB)$, со $d(X,YZ)$ е означено растојанието од точката X до правата YZ. Тогаш

$$P_{A_0B_0C_0}=P_{ABC_0}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot d(C_0,AB)=\tfrac{1}{4}\overline{AB}\cdot d(C,AB)=\tfrac{1}{2}P_{ABC}.$$

Десната страна на последното равенство не е во зависност од точката P. Значи, независност од изборот на точката P имаме $P_{A_0B_0C_0}=\frac{1}{2}P_{ABC}$.

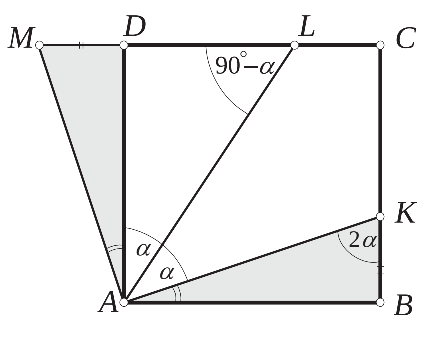
5. РЕШАВАЊЕ НА ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Точката K лежи на страната BC на квадратот $ABCD$, а бисектрисата на аголот KAD ја сече страната CD во точката L. Докажи дека $\overline{DL}+\overline{KB}=\overline{AK}$.

Решение. Ако страната на квадратот е a, тогаш, според ознаките на цртежот, од триаголниците ABK и ADL имаме:

$$a=\overline{AK}\sin 2\alpha=2\overline{AK}\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{и}$$

$$a=\overline{AL}\cos\alpha,$$



а оттука:

$$\overline{AL}\cos\alpha=2\overline{AK}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\overline{AL}=2\overline{AK}\sin\alpha \qquad (*)$$

Од истите триаголници имаме:

$$\overline{BK}=\overline{AK}\cos 2\alpha \quad \text{и}$$

$$\overline{DL}=\overline{AL}\sin\alpha=2\overline{AK}\sin^2\alpha.$$

Конечно:

$$\overline{DL}+\overline{BK}=2\overline{AK}\sin^2\alpha+\overline{AK}\cos 2\alpha=2\overline{AK}\sin^2\alpha+\overline{AK}\cos^2\alpha-\overline{AK}\sin^2\alpha$$
$$=\overline{AK}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\overline{AK}.$$

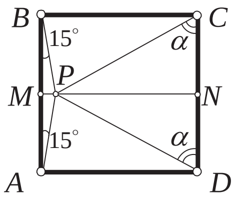
2. Нека O е внатрешна точка на конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина P таква што $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=2P$. Докажи, дека $ABCD$ е квадрат со центар O.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}2P_{ABCD}&=2(P_{AOB}+P_{BOC}+P_{COD}+P_{DOA})\\&=\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin\measuredangle AOB+\overline{OB}\cdot\overline{OC}\sin\measuredangle BOC\\&\quad+\overline{OC}\cdot\overline{OD}\sin\measuredangle COD+\overline{OD}\cdot\overline{OA}\sin\measuredangle DOA\\&\le(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)+(\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)+(\overline{OD}^2+\overline{OA}^2)\\&=2P=2P_{ABCD}.\end{aligned}$$

Тогаш од горното неравенство следува дека $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ и четирите синуси се еднакви на 1. Според тоа, четириаголникот $ABCD$ е квадрат со центар O.

3. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е избрана точка P така што $\measuredangle PAB=\measuredangle PBA=15^\circ$. Докажи дека триаголникот PCD е рамностран.



Решение. Триаголникот ABP е рамнокрак, па затоа неговото теме P припаѓа на симетралата MN на страните AB и CD на квадратот (види цртеж). Според тоа, триаголникот DCP е рамнокрак, $\overline{PC}=\overline{PD}$. Нека

$$\measuredangle PCD=\measuredangle PDC=\alpha.$$

Ако должината на страната на триаголникот е a, тогаш $\overline{MP}+\overline{PN}=a$. Од правоаголниот триаголник PMB имаме $\overline{MP}=\frac{a}{2}\operatorname{tg}15^\circ$, а од правоаголниот триаголник PNC имаме $\overline{MN}=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Ако замениме во равенството $\overline{MP}+\overline{PN}=a$, добиваме $\frac{a}{2}\operatorname{tg}15^\circ+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha=a$, т. е.

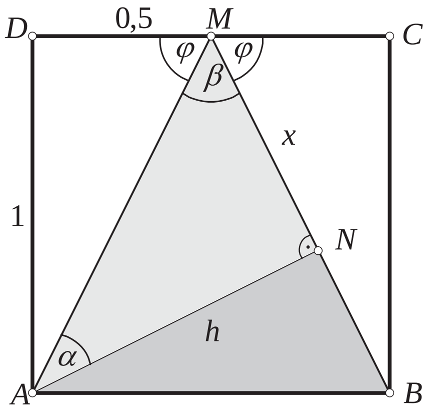
$$\operatorname{tg}\alpha=2-\operatorname{tg}15^\circ=2-\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=2-\frac{1-\frac{1}{\sqrt3}}{1+\frac{1}{\sqrt3}}=2-\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}=\frac{\sqrt3+3}{\sqrt3+1}=\sqrt3.$$

Јасно, $\alpha=60^\circ$ и триаголникот PCD е рамностран.

4. Во квадратот $ABCD$ со страна 1, точката M е средина на страната CD, а N е подножје на нормалата повлечена од A на BM. Докажи дека страните на триаголникот MNA се однесуваат како $3:4:5$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\overline{MN}=x$, $\overline{AN}=h$, $\overline{AD}=1$, $\overline{DM}=\frac12$, тогаш (види цртеж):

$$\overline{MB}=\sqrt{\overline{MC}^2+\overline{BC}^2}=\frac{\sqrt5}{2};\ \overline{MA}=\overline{MB}=\frac{\sqrt5}{2}$$



$$\overline{BN}=\overline{MB}-\overline{MN}=\frac{\sqrt{5}}{2}-x\,.$$

Од $\triangle AMN$ добиваме $\overline{AN}^2=\overline{AM}^2-\overline{MN}^2$, т.е. $h^2=\frac{5}{4}-x^2$. Од $\triangle ABN$ добиваме

$$\overline{AB}^2=\overline{AN}^2-\overline{NB}^2\,,$$

$$1=h^2+(\tfrac{\sqrt{5}}{2}-x)^2$$

$$1=\tfrac{5}{4}-x^2+\tfrac{5}{4}+x^2-x\sqrt{5}$$

Оттука $x=\frac{3\sqrt{5}}{10}$, а потоа $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, па тогаш

$$\overline{MN}:\overline{AN}:\overline{AM}=\tfrac{3\sqrt{5}}{10}:\tfrac{2\sqrt{5}}{5}:\tfrac{\sqrt{5}}{2}=3:4:5\,.$$

Втор начин. Нека страната на квадратот $ABCD$ е a, $\measuredangle MAN=\alpha$ и $\measuredangle AMB=\beta$ тогаш $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{a}{2}$, па од складноста на триаголниците AMD и BMC следува $\angle AMD=\measuredangle BMC=\phi$ (направи цртеж). По Питагоровата теорема од ΔAMD наоѓаме

$$\overline{AM}=\sqrt{a^2+\tfrac{a^2}{4}}=\tfrac{a\sqrt{5}}{2}\,,\ \overline{BM}=\overline{AM}=\tfrac{a\sqrt{5}}{2}\,,$$

$$\sin\alpha=\sin(\tfrac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\tfrac{16}{25}}=\tfrac{3}{5}.$$

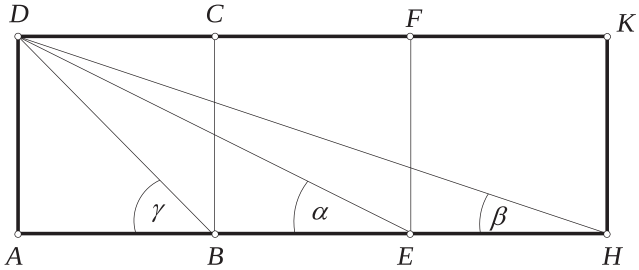
Според синусната теорема за $\triangle MNA$ имаме:

$$\overline{MN}:\overline{NA}:\overline{AM}=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\tfrac{\pi}{2}=\tfrac{3}{5}:\tfrac{4}{5}:\tfrac{5}{5}=3:4:5\,.$$

5. Три квадрати $ABCD, BEFC, EHKF$ со страна a формираат правоаголник со страни a и $3a$. Докажи дека $\measuredangle DBA=\measuredangle DEA+\measuredangle DHA$.

Решение. Ќе воведеме ознаки $\measuredangle DBA=\gamma$, $\measuredangle DEA=\alpha$ и $\measuredangle DHA=\beta$. Од правоаголниот триаголник DAB имаме

$$\operatorname{tg}\gamma=\tfrac{a}{a},\text{ т.е. } \operatorname{tg}\gamma=1\,.$$



Од правоаголниот триаголник DEA имаме

$$\operatorname{tg}\alpha=\tfrac{a}{2a},\text{ т.е. } \operatorname{tg}\alpha=\tfrac{1}{2}\,,$$

а од правоаголниот триаголник DAH

$$\operatorname{tg}\beta=\tfrac{a}{3a},\text{ т.е. } \operatorname{tg}\beta=\tfrac{1}{3}\,.$$

Од друга страна,

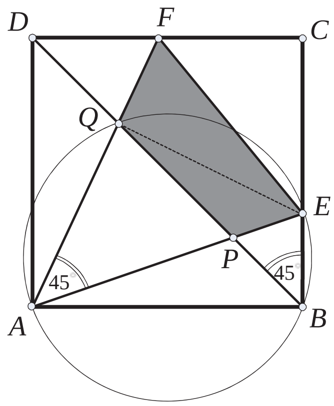
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1=\operatorname{tg}\gamma\,.$$

Бидејќи $\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, имаме $\alpha+\beta=\gamma$, односно

$$\measuredangle DEA+\measuredangle DHA=\measuredangle DBA\,.$$

6. Од темето A на квадратот $ABCD$ кон внатрешноста се повлечени две полуправи коишто зафаќаат агол од 45°. Едната од нив ја сече страната BC во точката E, а дијагоналата BD во точката P, а другата полуправа ја сече страната CD во точката F а дијагоналата BD во точката Q. Докажете дека плоштината на триаголникот APQ е еднаква на плоштината на четириаголникот $PQFE$.

Решение. Точките A, B, E и Q лежат на една кружница, бидејќи отсечката EQ од точките A и B се гледаат под еднаков агол од 45°. Бидејќи $\measuredangle ABE = 90^\circ$, добиваме дека и $\measuredangle EQA = 90^\circ$. Оттука е јасно дека $\measuredangle QEA = 45^\circ$, па, значи, триаголникот ΔAQE е рамнокрак и правоаголен со прав агол во Q. Според тоа:



$$\overline{AE} = \sqrt{2} \cdot \overline{AQ}. \qquad (1)$$

Аналогно се покажува дека

$$\overline{AF} = \sqrt{2} \cdot \overline{AP}. \qquad (2)$$

Со P_1 и P_2 ќе ги означиме плоштините на триаголниците AQP и AEF соодветно. Тогаш, со оглед на (1) и (2), добиваме

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \sin 45^\circ} = \frac{1}{2}.$$

Значи $2P_1 = P_2$, од каде што следува дек аплоштината на триаголникот APQ е еднаква наплоштината на четириаголникот $PQFE$.

7. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M и N припаѓаат на страните BC и CD, соодветно и се такви што $\measuredangle BMA = \measuredangle NMC = 60^\circ$. Определи го $\measuredangle MAN$.

Решение. *Прв начин*. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$. Бидејќи $\triangle ABM$ е „половина од рамностран триаголник“ важи $\overline{AB} = \overline{BM}\sqrt{3}$, т.е.

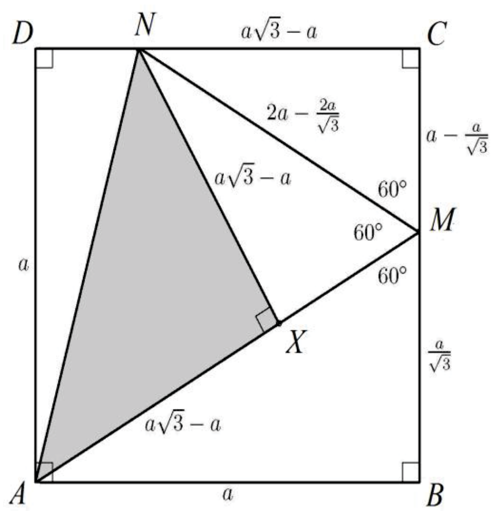
$$\overline{BM} = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ и } \overline{AM} = 2\overline{BM} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Бидејќи $\triangle MCN$ е половина од рамностран триаголник важи

$$\overline{CM} = \overline{BC} - \overline{BM} = a - \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{CN} = \overline{CM}\sqrt{3} = a\sqrt{3} - a,$$

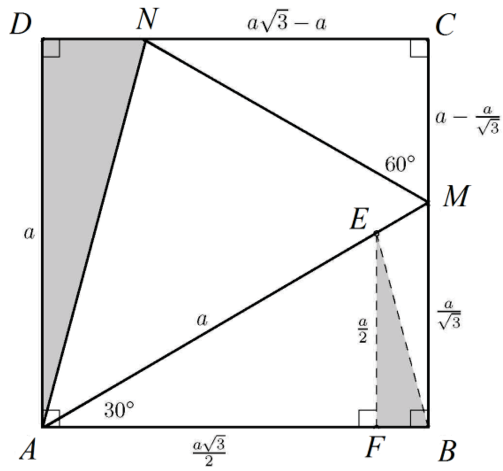
$$\overline{MN} = 2\overline{CM} = 2a - \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$



Нека точката X е подножјето на нормалата повлечена од точката N на отсечката AM. Од равенствата $\measuredangle BMA = \measuredangle NMC = 60^\circ$, следува $\measuredangle XMN = \measuredangle AMN = 60^\circ$. Затоа $\triangle MNX$ е „половина од рамностран триаголник“, па важи $\overline{MX} = a - \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\overline{NX} = a\sqrt{3} - a$. Конечно,

$$\overline{AX} = \overline{AM} - \overline{XM} = \frac{2a}{\sqrt{3}} - (a - \frac{a}{\sqrt{3}}) = a\sqrt{3} - a\,.$$

Според тоа, $\overline{AX} = \overline{XN}$, т.е. $\triangle ANX$ е рамнокрак правоаголен триаголник (со прав агол во темето X). Затоа $\measuredangle XAN = 45^\circ$, т.е. $\measuredangle MAN = 45^\circ$.



Втор начин. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$. Бидејќи $\triangle ABM$ е половина од рамностран триаголник, важи $\overline{AB} = \overline{BM}\sqrt{3}$, т.е. $\overline{BM} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Бидејќи $\triangle MCN$ е „половина од рамностран триаголник" важи

$$\overline{CM} = \overline{BC} - \overline{BM} = a - \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ и}$$

$$\overline{CN} = \overline{CM}\sqrt{3} = a\sqrt{3} - a\,.$$

Значи, $\overline{DN} = \overline{CD} - \overline{CN} = 2a - a\sqrt{3}$. Нека E е точка на отсечката AM таква што $\overline{AE} = \overline{AB}$. Бидејќи $\measuredangle BMA = 60^\circ$ и $\measuredangle BAM = 30^\circ$, во рамнокракиот $\triangle ABE$ важи $\measuredangle ABE = \frac{180^\circ - \measuredangle BAE}{2} = 75^\circ$.

Нека F е подножјето на нормалата повлечена од точката E кон страната AB. Бидејќи $\measuredangle EAF = 30^\circ$, заклучуваме дека $\triangle AFE$ е „половина од рамностран триаголник", па затоа важи $\overline{EF} = \frac{a}{2}$ и $\overline{AF} = \overline{EF}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Значи, $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Но, $\overline{AD} = a = 2\overline{EF}$ и $\overline{DN} = a(2-\sqrt{3}) = 2\overline{FB}$, па затоа правоаголните триаголници AND и EBF се слични. Според тоа, $\measuredangle AND = 75^\circ$, што значи дека

$$\measuredangle MAN = \measuredangle BAN - \measuredangle BAM = \measuredangle AND - \measuredangle BAM = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$

Трет начин. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$ и нека T е подножјето на висината повлечена од темето A кон страната MN во $\triangle AMN$. Од $\measuredangle BMA = \measuredangle NMC = 60^\circ$ следува $\measuredangle AMT = 60^\circ$.

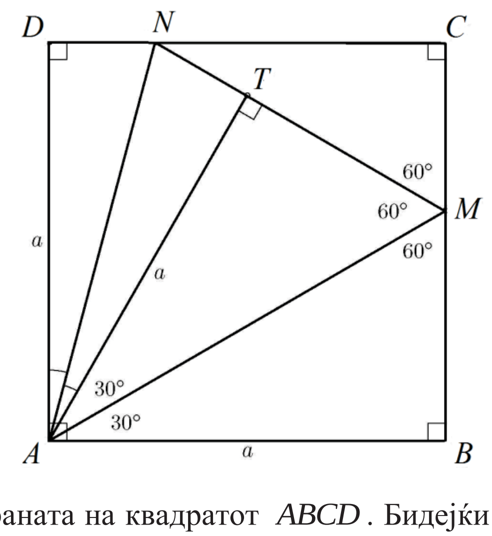
Понатаму, равоаголните триаголници ABM и ATM имаат еднакви агли и заедничка хипотенуза AM, па од признакот АСА следува дека тие се складни. Значи,

$$\overline{AT} = \overline{AB} \text{ и } \measuredangle MAT = \measuredangle MAB = 30^\circ.$$

Понатаму триаголниците ADN и ATN се складни, бидејќи и двата се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза AN и важи $\overline{AT} = a = \overline{AD}$. Затоа $\measuredangle TAN = \measuredangle DAN$. Според тоа,

$$\measuredangle MAN = \measuredangle MAT + \measuredangle TAN = \frac{1}{2}\measuredangle BAT + \frac{1}{2}\measuredangle TAD$$

$$= \frac{1}{2}\measuredangle BAD = 45^\circ.$$

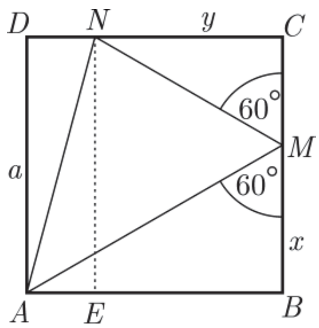


Четврт начин. Нека a е должината ан страната на квадратот $ABCD$. Бидејќи

$\triangle ABM$ е „половина од рамностран триаголник", важи $\overline{AB}=\overline{BM}\sqrt{3}$ т.е. $\overline{BM}=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Бидејќи $\triangle MCN$ е „половина од рамностран триаголник" важи $\overline{CM}=\overline{BC}-\overline{BM}= a-\frac{a}{\sqrt{3}}$ и $\overline{CN}=\overline{CM}\sqrt{3}=a\sqrt{3}-a$. Според тоа, $\overline{DN}=\overline{CD}-\overline{CN}=2a-a\sqrt{3}$. Нека P е точка на страната AD таква што $\measuredangle DNP=60^\circ$, т.е. $\triangle DNP$ е „половина од рамностран триаголник" (направи цртеж). Тогаш $\overline{DP}=\overline{DN}\sqrt{3}=2a\sqrt{3}-3a$ и $\overline{NP}=2\overline{DN}=4a-2a\sqrt{3}$. Понатаму, $\overline{AP}=\overline{AD}-\overline{DP}=a-(2a\sqrt{3}-3a)=4a-2a\sqrt{3}$, па затоа $\overline{NP}=\overline{AP}$. Сега, бидејќи $\measuredangle NPD=30^\circ$, т.е. $\measuredangle NPA=150^\circ$, добиваме дека $\measuredangle NAP=15^\circ$. Конечно, $\measuredangle MAN=\measuredangle MAD-\measuredangle NAP=60^\circ-15^\circ=45^\circ$.

Петти начин. Нека $x=\overline{BM}$ и $y=\overline{CN}$. Од условот на задачата имаме $\measuredangle MAB=\measuredangle CNM=30^\circ$. Тогаш $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{a}$, па следува дека $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Значи, $\overline{CM}=a-x=a(1-\frac{\sqrt{3}}{3})$. Слично, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a(1-\frac{\sqrt{3}}{3})}{y}$, од каде $y=a(\sqrt{3}-1)$. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од N кон страната AB. Јасно е дека

$$\overline{AE}=\overline{DN}=a-y=a(2-\sqrt{3}).$$



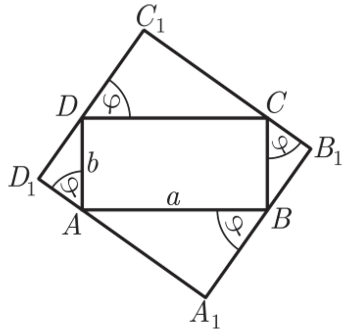
Ако бараниот агол го означиме со α, тогаш од $\triangle AEN$ имаме $\operatorname{tg}(\alpha+30^\circ)=\frac{a}{a(2-\sqrt{3})}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. Од адиционите формули имаме $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. Оттука следува $\operatorname{tg}\alpha=1$, па затоа $\alpha=45^\circ$.

8. Околу даден правоаголник со страни a и b, опишан е друг правоаголник чија плоштина е m^2. За кои вредности на параметарот m, во зависност од a и b, може да се опише правоаголникот?

Решение. Нека φ е аголот меѓу страните на правоаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. За должините на страните на опишаниот правоаголник $A_1B_1C_1D_1$ имаме:

$$\overline{A_1D_1}=\overline{AA_1}+\overline{AD_1}=a\sin\varphi+b\cos\varphi,$$

$$\overline{A_1B_1}=\overline{BA_1}+\overline{BB_1}=a\cos\varphi+b\sin\varphi.$$



Од условот за плоштината имаме:

$$m^2=(a\sin\varphi+b\cos\varphi)(a\cos\varphi+b\sin\varphi),$$

а со средување на изразот се добива

$$\sin\varphi\cos\varphi=\frac{m^2-ab}{a^2+b^2}, \text{ т.е. } \sin 2\varphi=\frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2}.$$

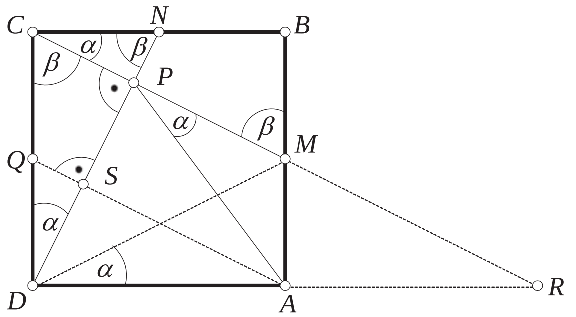
Тогаш, услов задачата да има решение ќе биде $0\le\sin 2\varphi\le 1$, односно решавајќи ја неравенката, го добиваме бараниот услов $\sqrt{ab} \le m \le \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

9. Точките M и N се средини на страните AB и BC на квадратот $ABCD$. Отсечките CM и DN се сечат во точка P. Докажи дека $\overline{AP} = \overline{AB}$.

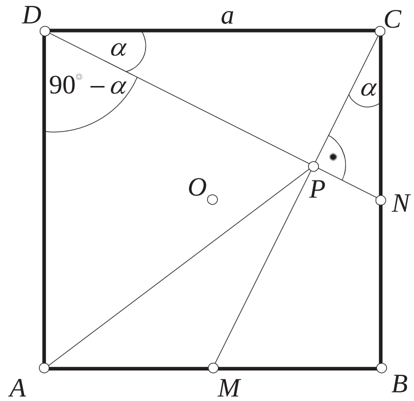
Решение А. Прво ќе покажеме дека $CM \perp DN$ (види цртеж 1). Бидејќи правоаголните триаголници MBC и NDC се складни (САС), следува дека:

$$\measuredangle BCM = \measuredangle CDN = \alpha \text{ и } \measuredangle CMB = \measuredangle DNC = \beta,$$

и притоа $\alpha + \beta = 90^\circ$. Но, $\measuredangle PCD = 90^\circ - \alpha$, па затоа $\measuredangle PCD = \beta$, т.е. $\triangle PCD$ е



цртеж 1



цртеж 2

правоаголен, со прав агол во темето P, т.е. $CM \perp DN$.

Понатаму можеме да продолжиме на неколку начини:

Прв начин. Ја продолжуваме страната CM преку M до пресекот R со DA. Од $AM \parallel DC$ и $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{DC}$ следува дека AM е средна линија на ΔRCD, т.е. A е средина на DR. Тогаш, во правоаголниот ΔRPD отсечката AP е тежишна линија над хипотенузата и е еднаква на половина од неа, т.е. $\overline{AP} = \overline{AB}$.

Втор начин. Нека Q е средина на страната CD (види цртеж 1). Тогаш четириаголникот $AMCQ$ е паралелограм. Од $SQ \parallel PC$ и $\overline{QD} = \overline{QC}$ следува $\overline{DS} = \overline{SP}$, т.е. S е средина на DP. Освен тоа $AS \perp DP$. Значи, AC е висина и тежишна линија на ΔAPD, па тој е рамнокрак и следува: $\overline{AP} = \overline{PD}$, т.е $\overline{AP} = \overline{AB}$.

Трет начин. Четириаголникот $AMPD$ е тетивен, па затоа $\measuredangle ADM = \measuredangle APM$, како периферни агли над тетивата AM. Понатаму, од складноста на триаголниците ADM и CDN следува дека $\measuredangle ADM = \measuredangle CDN = \alpha$; т.е. $\measuredangle APM = \alpha$. Тогаш, од $\measuredangle ADP = 90^\circ - \alpha$ и $\measuredangle APD = 90^\circ - \alpha$ следува $\measuredangle APD = \measuredangle ADP$. Значи, ΔAPD е рамнокрак, т.е. $\overline{AP} = \overline{AD}$, или $\overline{AP} = \overline{AB}$.

Решение Б. При ротација на квадратот околу неговиот центар O за 90°, (види цртеж 2) отсечката CM се пресликува во отсечката DN, па следува дека $CM \perp DN$. Тогаш CP е висина над хипотенузата DN во правоаголниот ΔDNC, чии катети се однесуваат како $1:2$. Од $\triangle DNC \sim \triangle CNP$ следува дека $\overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{DP}$. Од правоаголниот $\triangle CDP$ имаме:

$$\overline{DC} = a\,,\ \overline{DP}^2 = a^2 - \tfrac{1}{4}\overline{DP}^2\,,\ \overline{DP} = \tfrac{2a}{\sqrt{5}}\,;\ \sin\alpha = \tfrac{\overline{CP}}{\overline{CD}} = \tfrac{\overline{DP}}{2a} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

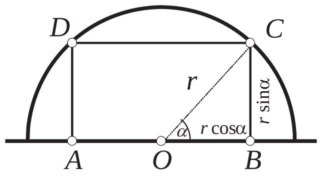
Според косинусната теорема за $\triangle APD$ добиваме:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DP}^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{DP}\cdot\sin(90^\circ - \alpha) = a^2 + \tfrac{4}{5}a^2 - 2a\tfrac{2a}{\sqrt{5}}\tfrac{1}{\sqrt{5}} = a^2\,.$$

Значи, $\overline{AP} = \overline{AB}$.

10. Докажи дека од сите правоаголници впишани во полукружница, најголема плоштина има оној чии страни се однесуваат како 2 : 1.

Решение. *Прв начин.* Плоштината на правоаголник впишан во полукружница со радиус r е

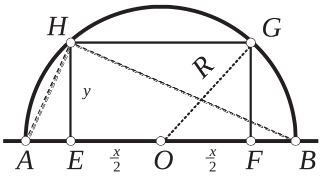


$$P = 2\cdot r\cos\alpha\cdot r\sin\alpha = r^2\sin 2\alpha$$

(притоа $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) . Центарот O на кружницата е на половината од едната страна на правоаголникот. Максимална плоштина ќе се добие кога $\sin 2\alpha = 1$ и таа ќе биде $P_{\max} = r^2$. Тогаш $\alpha = \frac{\pi}{4}$, па триаголникот OBC е рамнокрак правоаголен. Според тоа $\overline{AB} : \overline{BC} = 2:1$. Значи од сите правоаголници впишани во полукружница најголема плоштина има оној чии страни се однесуваат како $2:1$.

Забелешка. Во кружница најголема плоштина има квадратот.

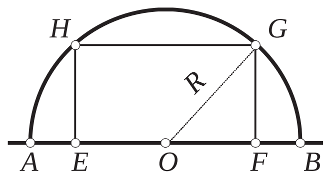
Втор начин. Нека кружницата има дијаметар AB, центар O и радиус R и нека страните на правоаголникот се x и y. Тогаш неговата плоштина е $P = xy$ и $\overline{EO} = \overline{OF} = \frac{x}{2}$. Аголот AHB е периферен над дијаметарот AB па $\measuredangle AHB = 90^\circ$. Отсечката HE е висина во правоаголниот триаголник AHB па



$$y^2 = \overline{AE}\cdot\overline{EB} = (R - \tfrac{x}{2})(R + \tfrac{x}{2}) = R^2 - \tfrac{x^2}{4}\,.$$

Според тоа плоштината на правоголникот е $P = x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(4R^2 - x^2)}$. Да го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите x^2 и $4R^2 - x^2$. Добиваме $\sqrt{x^2(4R^2 - x^2)} \le \frac{1}{2}(x^2 + 4R^2 - x^2) = 2R^2$. Сега за плоштината имаме $P \le \dfrac{1}{2}2R^2 = R^2$. Равенство се достигнува за $4R^2 - x^2 = x^2$, односно за $x^2 = 2R^2$ и тогаш $P = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2(4R^2 - 2R^2)} = R^2$ па ја добиваме максималната плоштина. За втората страна на правоаголникот добиваме $y^2 = R^2 - \frac{x^2}{4} = R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2}$, па $x^2 = 2\cdot 2y^2 = 4y^2$, односно $x = 2y$.

Трет начин. Точката O е средина на отсечката AB и нека R радиусот на кружницата и $\overline{EF} = \overline{HG} = a,$ $\overline{EH} = \overline{FG} = b$. Тогаш имаме



$$R^2 = \overline{OG}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FG}^2 = (\tfrac{a}{2})^2 + b^2$$

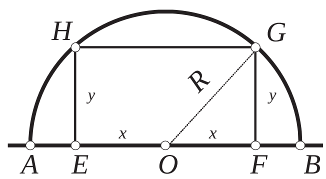
и плоштината P на правоаголникот е

$$P = ab = 2\cdot\frac{a}{2}\cdot b = b^2 + (\frac{a}{2})^2 - b^2 + 2\cdot\frac{a}{2}\cdot b - (\frac{a}{2})^2$$

$$= b^2 + (\frac{a}{2})^2 - (b^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot b + (\frac{a}{2})^2) = R^2 - (b-\frac{a}{2})^2$$

и таа достигнува максимум кога $(b-\frac{a}{2})^2$ достигнува минимум, односно за $b-\frac{a}{2}=0$. Значи $a=2b$. Според тоа од сите правоаголници впишани во полукружница најголема плоштина има оној кај кој страната што лежи на дијаметарот е двапати поголема од другата страна.

Четврт начин. Да воведеме ознаки како на цртежот. Тогаш плоштината P на правоаголникот е $P=2xy$ и $y^2=R^2-x^2$. Значи



$$P = 2x\sqrt{R^2-x^2} = 2\sqrt{-x^4+R^2x^2}\,.$$

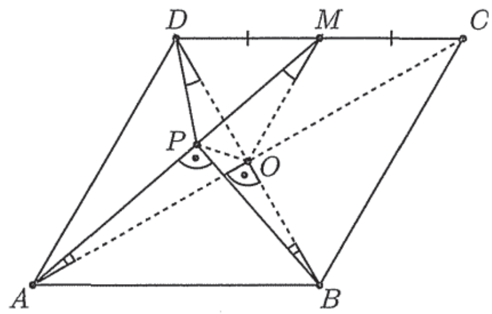
Плоштината е максимална кога $-x^4+R^2x^2$ е максимално. Со трансформирање добиваме

$$-x^4+R^2x^2 = -(x^4-R^2x^2) = -(x^4-2\frac{R^2}{2}x^2+(\frac{R^2}{2})^2-(\frac{R^2}{2})^2) = (\frac{R^2}{2})^2-(x^2-\frac{R^2}{2})^2\,.$$

Според ова најголема вредност се добива кога $(x^2-\frac{R^2}{2})^2$ е најмало а тоа е за $x^2-\frac{R^2}{2}=0$, т.е. за $x=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Но тогаш $y^2=R^2-x^2=R^2-\frac{R^2}{2}=\frac{R^2}{2}$, па добиваме $y=x$. Значи $\overline{EF}:\overline{FG}=2:1$, па најголема плоштина има правоаголникот чии страни се однесуваат како $2:1$ и поголемата страна лежи на дијаметарот.

11. Даден е ромб $ABCD$ со $\measuredangle BAD=\alpha<90^\circ$. Нека M е средината на страната CD и $BP\perp AM, (P\in AM)$. Определи ги односот $\overline{BP}:\overline{PD}$ и $\measuredangle BPD$.

Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите AC и BD. Од



$$\measuredangle APB = 90^\circ = \measuredangle AOB$$

следува дека четириаголникот $ABOP$ е тетивен. Тогаш

$$\measuredangle POD = 180^\circ - \measuredangle POB = \measuredangle PAB = \measuredangle PMD,$$

па затоа четириаголникот $DPOM$ е тетивен. Од $\measuredangle PDO=\measuredangle PMO$ и $\measuredangle PBO=\measuredangle PAO$ следува, дека $\triangle BDP \sim \triangle AMO$. Освен тоа, OM е средна линија за $\triangle ACD$, па затиоа

$$\measuredangle BPD = \measuredangle AOM = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ и } \overline{BP}:\overline{PD} = \overline{AO}:\overline{OM} = \overline{AC}:\overline{AD} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

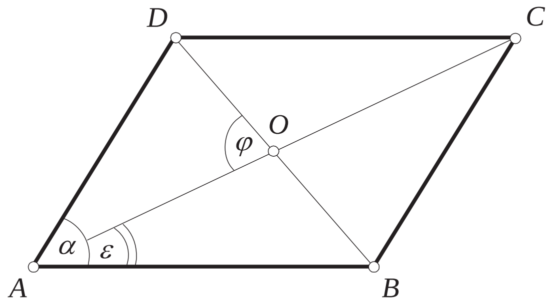
12. Во паралелограм со страни a и b и остар агол α конструирани се симетралите на внатрешните агли. Одреди ја плоштината на четириаголникот определен со симетралите.

Решение. Ако $a=b$, тогаш дадениот паралелограм е ромб, па бараната плоштина е 0, бидејќи тогаш симетралите на аглите $\angle DAB$ и $\angle BCD$ ја содржат дијагоналата AC, а останатите две симетрали ја содржат дијагоналата BD, па сите четири симетрали се сечат во една точка. Да претпоставиме дека $a > b$ и нека $\alpha = \angle BAD$. Нека M е пресечната точка на симетралите од A и D, N пресечна точка на симетралите од D и C, P пресечна точка на симетралите од B и C, а Q пресечна точка на симетралите од A и B. Четириаголникот $MNPQ$ е правоаголник, затоа што збирот на аглите кои лежат на една страна кај паралелограмот е $180°$, па нивните симетрали се сечат под агол од $90°$. Па бараната плоштина е

$$P = \overline{MN} \cdot \overline{MQ} = (\overline{DN} - \overline{DM})(\overline{AQ} - \overline{AM}) = (a \sin\tfrac{\alpha}{2} - b \sin\tfrac{\alpha}{2})(a \cos\tfrac{\alpha}{2} - b \cos\tfrac{\alpha}{2})$$
$$= (a-b)^2 \sin\tfrac{\alpha}{2} \cos\tfrac{\alpha}{2}$$

13. Во паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AC} = \overline{AB}\sqrt{2}$. Докажи дека аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот е еднаков на аголот меѓу неговите страни.

Решение. *Прв начин.* Нека во паралелограмот $ABCD$ (види цртеж) е:



$$\overline{AB} = \overline{CD} = a, \quad \overline{BC} = \overline{AD} = b,$$
$$\measuredangle AOD = \measuredangle BOC = \varphi, \quad \measuredangle BAD = \alpha;$$

тогаш:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(a^2 + b^2);$$
$$2a^2 + \overline{BD}^2 = 2a^2 + 2b^2;$$
$$\overline{BD} = b\sqrt{2}.$$
$$P_{ABCD} = \tfrac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \sin\varphi = \tfrac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} \cdot \sin\varphi = ab \sin\varphi.$$
$$P_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} \sin\alpha = ab \sin\alpha.$$

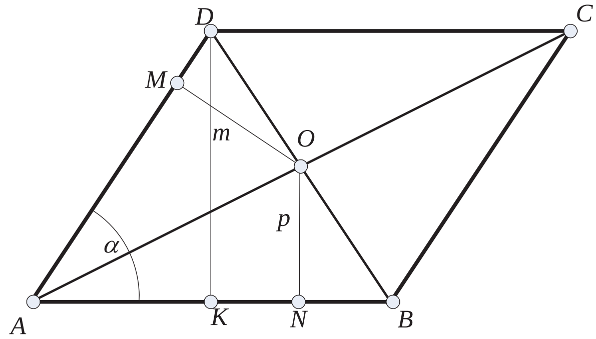
Оттука следува: $\sin\alpha = \sin\varphi$. Бидејќи $0^\circ < \alpha \le 90^\circ$ и $0^\circ < \varphi \le 90^\circ$ следува $\alpha = \varphi$.

Втор начин. Од сличноста на триаголниците ABC и ABO (во нив аголот $\varepsilon = \angle BAC$ е заеднички и уште $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AO} = \sqrt{2}$) следува дека $\measuredangle ABC = \measuredangle AOB$, а тогаш и $\measuredangle COB = \measuredangle BAD$.

14. Остриот агол на паралелограмот е α, а растојанијата од точката на пресек на неговите дијагонали до неговите страни кои почнуваат од исто теме се m и n. Определи ја плоштината на паралелограмот и должината на неговите дијагонали.

Решение. Нека $ABCD$ е паралелограм и O е пресечна точка на неговите дијагонали. Нека ON и OM се нормалите повлечени од O кон AB и AD, соодветно при што важи

$\overline{ON} = p$ и $\overline{OM} = m$ и $\measuredangle BAD = \alpha$.



Ако DK е висината на паралелограмот (види цртеж), тогаш $\overline{DK}=2\overline{ON}=2p$ (точката O на исто растојание од AB и CD.

Од правоаголниот триаголник AKD имаме

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{AD}}=\sin\alpha \text{, т.е. } \overline{AD}=\frac{2p}{\sin\alpha}.$$

Аналогно добиваме $\overline{AB}=\frac{2m}{\sin\alpha}$. Според тоа $P=\overline{AB}\cdot\overline{DK}$, односно

$$P=2p\frac{2m}{\sin\alpha}=\frac{4pm}{\sin\alpha}.$$

Од триаголникот ABD, според косинусната теорема добиваме

$$\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\alpha,$$

$$\overline{BD}^2=\frac{4m^2}{\sin^2\alpha}+\frac{4p^2}{\sin^2\alpha}-2\frac{2m}{\sin\alpha}\cdot\frac{2p}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha,$$

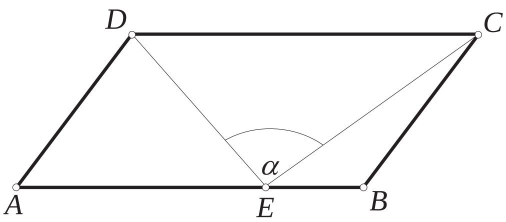
$$\overline{BD}=2\frac{\sqrt{m^2+p^2-2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Аналогно од триаголникот ABC во кој $\measuredangle ABC=180^\circ-\alpha$, имаме

$$\overline{BD}=2\frac{\sqrt{m^2+p^2-2mp\cos(180^\circ-\alpha)}}{\sin\alpha}=2\frac{\sqrt{m^2+p^2+2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

15. Во еден паралелограм, од средината на поголемата страна, страната паралелна на неа се гледа под агол α. Пресметај ја плоштината на паралелограмот ако должините на неговите страни се a и b, ($a<b$).

Решение. Нека $ABCD$ е паралелограм во $\overline{AB}=a>b=\overline{BC}$ и нека E е средина на AB.



Од условот на задачата имаме $\measuredangle DEC=\alpha$, триаголниците AED, DEC и EBC имаат иста висина, и од тоа што E е средина на AB, добиваме

$$P_{\triangle AED}=P_{\triangle EBC}=\tfrac{1}{2}P_{\triangle DEC}.$$

Ако воведеме ознаки $\measuredangle DAE=\varphi$ и $\measuredangle EBC=180^\circ-\varphi$, тогаш според косинусна теорема имаме

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cos\varphi=b^2+0,25a^2-ab\cos\varphi$$

$$\overline{CE}^2=\overline{EB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{CB}\cdot\overline{BC}\cos(180^\circ-\varphi)$$

$$=0,25a^2+b^2-ab\cos(180^\circ-\varphi)=0,25a^2+b^2+ab\cos\varphi$$

Ако ги собереме двете последни равенства добиваме

$$\overline{CE}^2+\overline{DE}^2=2b^2+a^2$$

Од друга страна според косинусна теорема за ΔDEC, имаме

$$\overline{DC}^2=\overline{DE}^2+\overline{EC}^2-2\overline{DE}\cdot\overline{EC}\cos\alpha=2b^2+a^2-2\overline{DE}\cdot\overline{EC}\cos\alpha.$$

Сега, од $\overline{DC}=a$ добиваме

$$\overline{DE}\cdot\overline{EC}=\frac{2b^2-0,25a^2}{2\cos\alpha}=\frac{4b^2-a^2}{4\cos\alpha}.$$

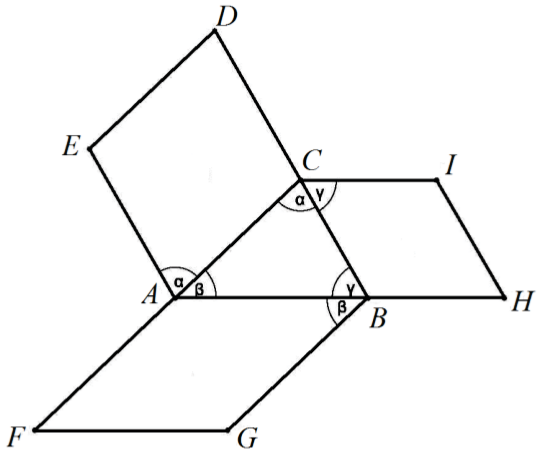
Конечно,

$$P_{ABCD}=2P_{\Delta DEC}=2\cdot\tfrac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{EC}\sin\alpha=\frac{2b^2-0,25a^2}{2\cos\alpha}\sin\alpha=\frac{4b^2-a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

16. Над страните на $\triangle ABC$ со плоштина P се конструирани ромбови $ABDE$, $BCGF$ и $CAIH$ така што $\measuredangle ABE=\measuredangle BAC, \measuredangle BCG=\measuredangle CBA, \measuredangle CAI=\measuredangle ACB$. Докажи, дека збирот на плоштините на трите ромба е поголем или еднаков на $6P$ и дека знак за равенство важи ако и само ако $\triangle ABC$ е рамностран.

Решение. Со α,β,γ да ги означиме аглите на триаголникот ABC, а со P_a, P_b и P_c плоштините на ромбовите $BCGF, CAIH$ и $ABED$, соодветно. Тогаш

$P_a=a^2\sin\beta,\; P_b=b^2\sin\gamma,\; P_c=c^2\sin\alpha$.



Користејќи ја синусната теорема

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

каде R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, добиваме

$$\begin{aligned}P_a+P_b+P_c&=a^2\sin\beta+b^2\sin\gamma+c^2\sin\alpha\\&=\tfrac{a^2b}{2R}+\tfrac{b^2c}{2R}+\tfrac{c^2a}{2R}\\&=\tfrac{1}{2R}(a^2b+b^2c+c^2a).\end{aligned}$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq 3\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}=3abc,$$

па ако го искористиме претходното равенство добиваме

$$P_a+P_b+P_c=\tfrac{1}{2R}(a^2b+b^2c+c^2a)\geq\tfrac{1}{2R}\cdot 3abc=6P.$$

Јасно, во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина знак за равенство важи ако и само ако $a^2b=b^2c=c^2a$. Ако $a^2b=b^2c=c^2a$, тогаш важи $a^2=bc$ и $ab=c^2$, од каде добиваме $a^3b=bc^3$, т.е. $a=c$, па затоа $a=b=c$. Обратно, ако $a=b=c$, тогаш $a^2b=b^2c=c^2a$, па затоа $P_a+P_b+P_c=6P$.

17. Ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, тогаш

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2.$$

Докажи!

Решение. *Прв начин.* Ако $\overline{AB}=\overline{CD}=a$, $\overline{AD}=\overline{BC}=b,$ $\overline{BE}=\overline{CF}=h$, $\overline{BF}=\overline{CE}=x$ (цртеж 1), тогаш од правоаголните триаголници AFC, BFC, BED и BCE имаме

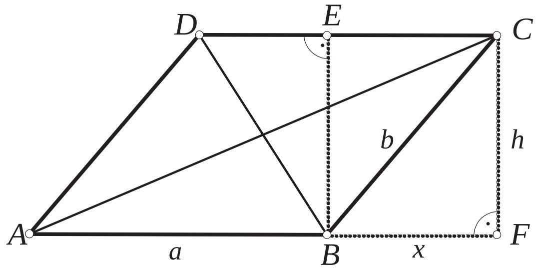
$$\overline{AC}^2=(a+x)^2+h^2=a^2+2ax+(x^2+h^2)$$

$$\overline{AC}^2 = a^2 + 2ax + b^2 \qquad (1)$$

$$\overline{BD}^2 = (a-x)^2 + h^2$$

$$= a^2 - 2ax + (x^2 + h^2)$$

$$\overline{BD}^2 = a^2 - 2ax + b^2 \qquad (2)$$



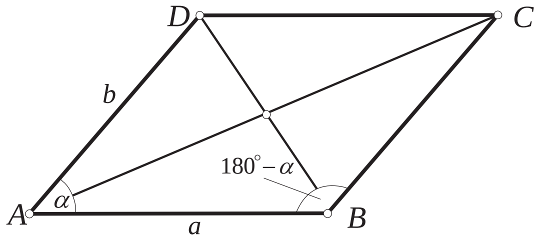
цртеж 1

Од (1) и (2) следува:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 .$$

Втор начин. Нека $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{AD} = \overline{BC} = b$, $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = 180^\circ - \alpha$, (цртеж 2), тогаш според косинусната теорема за триаголниците ABC и ABD имаме:



цртеж 2

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

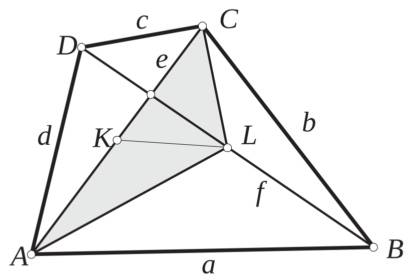
$$\overline{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

од каде што со собирање добиваме:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 .$$

18. Ако збирот на квадратите на страните на еден конвексен четириаголник е еднаков на збирот на квадратите на неговите дијагонали, тогаш тој четириаголник е паралелограм. Докажи!

Решение. Прв начин. Нека K и L се средини на дијагоналите AC и BD соодветно, на четириаголникот $ABCD$ (види цртеж). Ќе ја користиме формулата за пресметување на тежишна линија на триаголник преку неговите страни:



$$t_c = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 ,$$

за триаголниците ABD и BCD:

$$\overline{AL}^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{4}f^2 ,$$

$$\overline{CL}^2 = \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2 ,$$

$$\overline{AL}^2 + \overline{CL}^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - f^2) .$$

Слично, за триаголникот ACL добиваме:

$$\overline{KL}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{AL}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{CL}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{AC}^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - f^2 - e^2).$$

Бидејќи $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + e^2$, следува $\overline{KL} = 0$, т.е. дијагоналите се преполовуваат, па четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

Втор начин. Нека O е пресекот на дијагоналите на четириаголникот $ABCD$. Применувајќи ја косинусната теорема на триаголниците AOB, BOC, COD и DOA добиваме

$$a^2 = x^2 + n^2 + 2xn\cos\alpha, \quad b^2 = n^2 + y^2 - 2ny\cos\alpha,$$

$$c^2 = m^2 + y^2 + 2my\cos\alpha, \ d^2 = x^2 + m^2 - 2xm\cos\alpha.$$

Собирајќи ги овие равенства имаме

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(x^2 + y^2 + m^2 + n^2) - 2\cos\alpha(mx - my + ny - nx).$$

Од условот на задачата следува дека

$$2(x^2 + y^2 + m^2 + n^2) - 2\cos\alpha(mx - my + ny - nx) = (x + y)^2 + (n + m)^2.$$

Трансформирајќи го последново равенство имаме

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (n^2 - 2mn + m^2) - 2(m - n)(x - y)\cos\alpha = 0,$$

односно

$$(x - y)^2 + (m - n)^2 + 2(n - m)(x - y)\cos\alpha = 0.$$

Да претпоставиме дека $x - y > 0$ и $n - m > 0$ (размислувањето е аналогно ако $x - y < 0,\ n - m < 0$, само работиме со $y - x$ и $m - n$) и нека $\overline{KO} = x - y$ и $\overline{OR} = n - m$. Точката K лежи меѓу A и O, а точката R меѓу B и O. Да ја примениме косинусната теорема за триаголникот KOR:

$$\overline{KR}^2 = (x - y)^2 + (n - m)^2 + 2(x - y)(n - m)\cos\alpha.$$

Од последното и од равенството

$$(x - y)^2) + (m - n^2) + 2(n - m)(x - y)\cos\alpha = 0$$

добиваме дека $\overline{KR} = 0$. Значи K и R се поклопуваат, па $x - y = 0$ и $n - m = 0$. Значи $x = y$ и $m = n$, па дијагоналите во четириаголникот се преполовуваат. Следува дека тој е паралелограм.

Трет начин. Нека четириаголникот е $ABCD$. Имаме

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2.$$

Со средување на последното равенство добиваме

$$2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overline{DA}|^2 - |\overline{BC}|^2.$$

Натаму $|\overline{DA}|^2 - |\overline{BC}|^2 = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})^2 - |\overline{BC}|^2$, па го добиваме равенството $2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})^2 - |\overline{BC}|^2$. Ако го извршиме квадрирањето во $(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})^2$, равенството го добива обликот

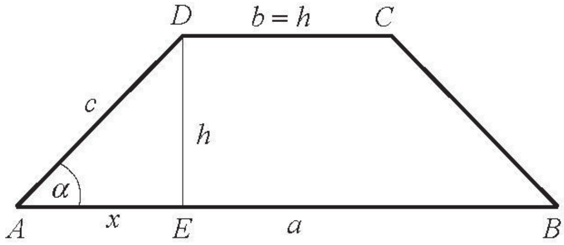
$$2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overline{CD}|^2 + |\overline{BA}|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} + 2 \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA},$$

односно $0 = |\overline{CD}|^2 + |\overline{BA}|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$. Оттука $0 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})^2$, односно $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, па четриаголникот $ABCD$ е паралелограм.

19. Помалата основа на рамнокрак трапез има иста должина h со неговата висина. Остриот агол на трапезот е еднаков на α.

Определи го неговиот периметар.

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи AB и CD и висина $h=\overline{DE}$ спуштена од темето D врз поголемата основа (види цртеж). Бидејќи $\measuredangle DAB=\alpha$, добиваме $\frac{h}{c}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\sin\alpha$ и $\frac{x}{c}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\cos\alpha$.



Бидејќи $c=\frac{h}{\sin\alpha}$ и $\overline{AE}=x=h\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, добиваме

$$L=2c+a+b=2\frac{h}{\sin\alpha}+2h\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+h+h=2h(\frac{h}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1)$$

$$=2h(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}+1)=2h(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=2h(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1)$$

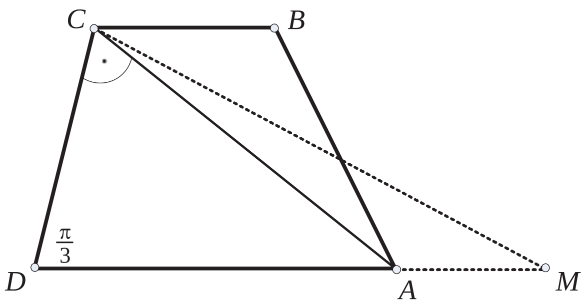
Значи, $L=2h(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1)$.

20. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез ($AD\,\|\,BC$) со агол $\frac{\pi}{3}$ на поголемата основа AD и дијагонала $\overline{AC}=\sqrt{3}$. Една точка M е на растојание 1 од A и на растојание 3 од D. Да се најде $\overline{MC}$.

Решение. Од

$$\overline{AD}\geq\overline{MD}-\overline{AM}=3-1=2$$

и $\overline{AD}\sin\frac{\pi}{3}\leq\sqrt{3}$ следува дека $\overline{AD}=2$ и $\measuredangle ACD=\frac{\pi}{2}$. Значи, точката M лежи на правата AD и е на растојание 1 и 3 од A и D соодветно. Од правоаголниот триаголник ACD следува дека $\overline{CD}=1$. Од овде, пак, следува дека $\overline{BC}=1$ и

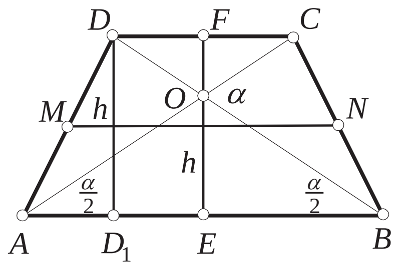


$$\overline{MC}=\sqrt{(1+2-\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{7}.$$

21. Висината на еден рамнокрак трапез е h, а аголот меѓу дијагоналите спроти неговите краци е еднаков на α. Колку е должината на средната линија на трапезот?

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи AB и CD и $\overline{DD_1}=h$ е негова висина (види цртеж). Со O ќе го означиме пресекот на дијагоналите AC и BD. Од условот на задачата имаме $\measuredangle COB=\alpha$.

Аголот $\measuredangle COB$ е надворешен агол за триаголникот BOA, од каде што добиваме

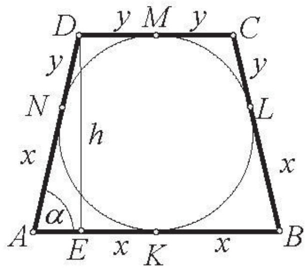


$$\measuredangle OAB=\measuredangle OBA=\frac{\alpha}{2}.$$

Ако $O \in EF \perp AB, CD$ и $E \in AB, F \in CD$, тогаш
$$\overline{D_1E} = \tfrac{1}{2}\overline{DF} \text{ и } \overline{EB} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}.$$
Сега, за средната линија на трапезот имаме
$$m = \tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD}) = \tfrac{1}{2}\overline{AB} + \tfrac{1}{2}\overline{CD} = \overline{D_1E} + \overline{EB} = \overline{D_1B}$$
Од триаголникот D_1BD имаме $m = \overline{D_1B} = \overline{D_1D} = h\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

22. Периметарот на рамнокрак трапез е два пати поголем од должината на впишаната кружница во него. Определи ги аглите на трапезот.

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез, во кој е впишана кружница k која има два пати помала должина од периметарот на трапезот. Нека допирните точки на кружницата k со страните AB, BC, CD, DA на трапезот се K, L, M, N, соодветно (види цртеж). Тогаш
$$\overline{NA} = \overline{AK} = \overline{KB} = \overline{BL} = x \text{ и } \overline{LC} = \overline{CM} = \overline{MD} = \overline{DN} = y.$$



Ако a и b се должините на основите а c должината на бочната страна, тогаш $a = 2x$, $b = 2y$ и $c = x + y$.Нека точката E е подножје на висината спуштена од темето D, тогаш $h = 2r = \overline{DE}$, каде h е должина на висината на трапезот, а r е радиусот на впишаната кружница. Од друга страна $\overline{AE} = x - y$. Од правоаголниот триаголник AED, имаме
$$(2r)^2 = h^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy.$$
Според тоа, $r = \sqrt{xy}$, и $L_k = 2r\pi = 2\sqrt{xy}\pi$. Периметарот на трапезот е $L_T = 4x + 4y$. Од условот на задачата $L_T = 2L_k$, добиваме $x + y = \pi\sqrt{xy}$. Ако $\alpha = \measuredangle DAB$, тогаш $\sin\alpha = \frac{h}{c} = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{2\sqrt{xy}}{\pi\sqrt{xy}} = \frac{2}{\pi}$. Конечно, $\alpha = \arcsin\frac{2}{\pi}$.

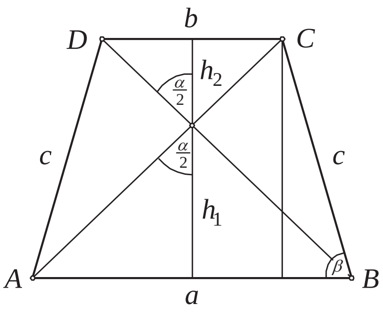
23. Во трапез е впишана кружница со радиус r. Пресметај ја плоштината на трапезот, ако аглите при поголемата основа се α и β.

Решение. Нека AB е поголемата основа на трапезот $ABCD$ и $\measuredangle DAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$. Впишаната кружница k има радиус r (направи цртеж). Ако DP и CQ се висини на трапезот, тогаш
$$\overline{DP} = \overline{CQ} = 2r. \tag{1}$$
Од тоа што k е впишана кружница во трапезот, имаме
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}. \tag{2}$$
Од правоаголните триаголници APD и CQB имаме
$$\frac{\overline{DP}}{\overline{AD}} = \sin\alpha, \quad \overline{AD} = \frac{2r}{\sin\alpha}, \qquad \frac{\overline{CQ}}{\overline{BC}} = \sin\beta, \quad \overline{BC} = \frac{2r}{\sin\beta}.$$
Сега, од (2) и претходните равенства имаме

$$\overline{AB}+\overline{CD}=2r(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}) \text{ и } P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=2r\cdot\frac{2r}{2}(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta})=2r^2(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}).$$

24. Нека $ABCD$ е рамнокрак тангентен трапез, при што впишаната кружница ги допира краците BC и AD во точките L и K соодветно. Пресметај ја плоштината на трапезот, ако α е аголот меѓу дијагоналите и $\overline{KL}=m$.

Решение. Во рамнкрак тангентен трапез со основи a и b и крак c исполнето е равенството $a+b=2c$. Ако E е пресек на дијагоналите на трапезот и h_1 и h_2 се висини на триаголниците ABE и ECD спуштени од темето E соодветно, тогаш h_1+h_2 е висина на трапезот. Нека $E_1\in AB$ и $E_2\in CD$ се подножја на висините спуштени од точката E.



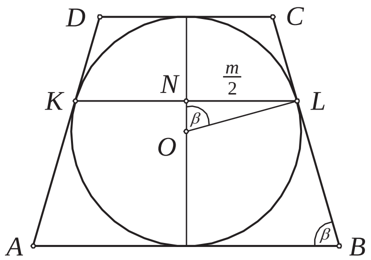
Ако β е аголот кај темето B во трапезот, тогаш

$$\sin\beta=\frac{h}{c} \tag{1}$$

Од друга страна, од правоаголните триаголници AE_1E и DE_2E имаме $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{h_1}{\frac{a}{2}}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{h_2}{\frac{b}{2}}$, т.е.

$h_1=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $h_2=\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, соодветно. Според тоа

$$h_1+h_2=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$



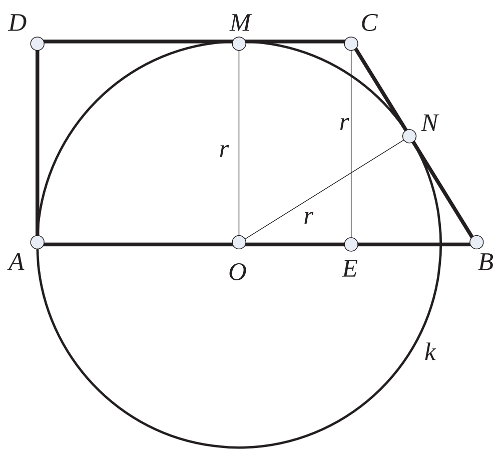
Од (1) и (2) добиваме дека $\sin\beta=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Ако r е радиусот на впишаната кружница со центар O, тогаш од правоаголниот триаголник ONL имаме

$$\sin\beta=\frac{\frac{m}{2}}{r}=\frac{m}{2r}=\frac{m}{h}, \text{ т.е. } \quad h=\frac{m}{\sin\beta}.$$

Конечно,

$$P=\frac{a+b}{2}h=c\cdot\frac{m}{\sin\beta}=\frac{m}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta}\cdot\frac{m}{\sin\beta}=m^2\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

25. Во трапезот $ABCD$ со основи AB и CD, $\measuredangle DAB=90^\circ$ и $\measuredangle ABC=30^\circ$, центарот на кружницата k лежи на основата AB и ги допира AD, DC и CB. Пресметај ја плоштината на трапезот ако радиусот на кружницата k е r.



Решение. Нека N и M се допирните точки на k со BC и CD соодветно, а E е подножје на нормалата повлечена од темето C врз основата AB. Јасно,

$$h=\overline{EC}=\overline{OM}=\overline{ON}=r,$$

каде h е висина на трапезот.

Триаголникот CEB е правоаголен, со еден остар агол $\measuredangle EBC=30^\circ$, па според тоа

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=\operatorname{ctg}30^\circ, \ \overline{EB}=\overline{CE}\cdot\operatorname{ctg}30^\circ=r\sqrt{3}.$$

Од правоаголниот триаголник BNO добиваме $\frac{\overline{ON}}{\overline{OB}}=\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2}$, па затоа $\overline{OB}=2\overline{ON}=2r$. Сега за должината на основата AB имаме

$$a=\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=r+2r=3r\,,$$

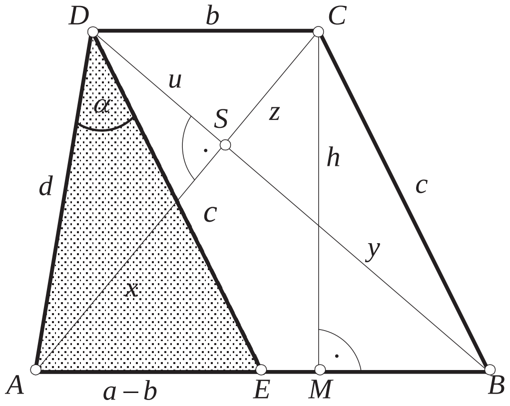
а за должината на основата DC имаме

$$b=\overline{DC}=\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}=3r-r\sqrt{3}=r(3-\sqrt{3})\,.$$

Значи, $P=\frac{a+b}{2}h=\frac{3r+(3-\sqrt{3})r}{2}r=r^2\,\frac{6-\sqrt{3}}{2}$.

26. Докажи дека во трапез со основи a и $BA_2 \perp AA_2$, , висина h, агол меѓу краците α и нормални дијагонали, важи равенството $\frac{1}{h}=(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со нормални дијагонали и нека $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{CM}=h$.



Ако $DE \parallel BC$, тогаш $\overline{AE}=a-b$.

Ако

$$\overline{AD}=d\,,\quad \overline{BC}=\overline{DE}=c\,,\quad \overline{SA}=x,$$

$$\overline{SB}=y\,,\ \overline{SC}=z \text{ и } \overline{SD}=u$$

(види цртеж), тогаш според косинусната теорема за $\triangle AED$ имаме:

$$\cos\alpha=\frac{c^2+d^2-(a-b)^2}{2cd}$$

Понатаму: $P_{AED}=\frac{1}{2}(a-b)h=cd\sin\alpha$, т.е. $\sin\alpha=\frac{(a-b)h}{cd}$, па затоа

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{c^2+d^2-(a-b)^2}{2(a-b)h}.$$

Од правоаголните триаголници ABS, BCS, CDS и DAS имаме:

$a^2=x^2+y^2$, $c^2=y^2+z^2$, $b^2=x^2+u^2$, $d^2=x^2+u^2$, т.е. $c^2+d^2=a^2+b^2$, па добиваме:

$$ctg\alpha=\frac{a^2+b^2-(a^2-b^2)}{2\left(a-b\right)h}=\frac{a\,b}{h\left(a-b\right)}$$

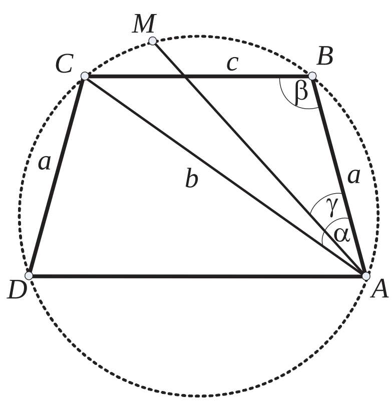
$$\frac{1}{h}=\frac{a-b}{a\,b}\cdot ctg\alpha=(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})\,ctg\alpha.$$

27. Даден е рамнокрак трапез со основа AD така што

$$\overline{AB}=\overline{CD}=a\,,\ \overline{AC}=\overline{BD}=b \text{ и } \overline{BC}=c\,.$$

Нека M е произволна точка од лакот BC од опишаната кружница околу трапезот $ABCD$. Изрази го

$$\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{\overline{AM}+\overline{MD}}\,,$$



преку a,b и c.

Решение. Нека R е радиусот на опишаната кружница околу трапезот $ABCD$; да означиме

$$\measuredangle BAC=\alpha\,,\ \measuredangle ABC=\beta\,,\ \measuredangle BAM=\gamma\,.$$

Од синусната теорема добиваме

$$\overline{BM}=2R\sin\gamma\,,\quad \overline{MC}=2R\sin(\alpha-\gamma)$$

$$\overline{AM}=2R\sin(\gamma+\pi-(\alpha+\beta))=2R\sin(\alpha+\beta-\gamma)$$

$$\overline{MD}=2R\sin(\alpha-\gamma+\pi-\alpha-\beta)=2R\sin(\beta+\gamma)\,.$$

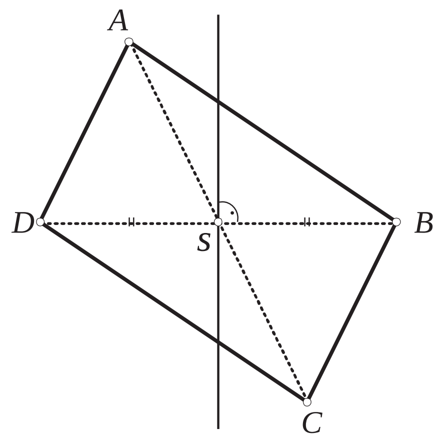
Користејќи го тоа добиваме

$$\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{\overline{AM}+\overline{MD}}=\frac{\sin\gamma+\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma)}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\gamma-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha+\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma-\beta-\gamma}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\gamma-\frac{\alpha}{2})}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})\cos(\gamma-\frac{\alpha}{2})}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}$$

$$=\frac{2R\sin\alpha}{2R\sin[\pi-(\alpha+\beta)]+2R\sin\beta}=\frac{c}{a+b}.$$

28. Дијагоналата AC на конвексниот четириаголник $ABCD$ минува низ средината S на дијагоналата BD. Ако $\overline{AB}>\overline{AD}$, тогаш кој од аглите BCA или DCA е поголем?



Решение. Да ја повлечеме симетралата s на отсечката DB. Заради $\overline{AB}>\overline{AD}$ добиваме дека s ја сече правата AB меѓу точките A и B. Според тоа $\measuredangle BSA=90^\circ+\alpha$, каде $\alpha>0$. Значи $\measuredangle BSA$ е тап, па и $\measuredangle DSC$ е тап. Оттука следува дека правата s ја сече правата DC меѓу точките D и C, па $\overline{DC}>\overline{BC}$. Отсечката CS е тежишна линија на триаголникот DCB па добиваме дека плоштините на триаголниците DCS и SCB се еднакви. Оттука

$$\overline{DC}\cdot\overline{CS}\cdot\sin\measuredangle DCS=\overline{BC}\cdot\overline{CS}\cdot\sin\measuredangle BCS\,,$$

односно, користејќи дека $\overline{DC}>\overline{BC}$, добиваме $\sin\measuredangle DCS<\sin\measuredangle BCS$. Аголот DSC е тап, па аголот DCS е остар. Според тоа добиваме дека $\measuredangle DCS<\measuredangle BCS$, односно $\measuredangle DCA<\measuredangle ACB$.

29. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со плоштина еднаква на $\frac{\overline{AB}^2-\overline{CD}^2}{4}$. Докажи, дека ако $\overline{AD}=\overline{BC}$, тогаш $AD\perp BC$.

Решение. Нека

$$AB\cap CD=E,\ \measuredangle AEB=\theta,\ \overline{AB}=a,\ \overline{CD}=b,\ \overline{CE}=x,\ \overline{DE}=y \text{ и } \overline{AD}=\overline{BC}=z\,.$$

Ако ги одземеме равенствата

$$a^2=(x\pm z)^2+(y\pm z)^2-2(x\pm z)(y\pm z)\cos\theta$$

$$b^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta,$$

добиваме $a^2-b^2=2z(\pm x\pm y+z)(1-\cos\theta)$. Ако знакот е негативен, тогаш $z>x+y>x$, па значи D е меѓу A и E, што противречи на првото равенство. Според тоа,

$$P_{ABCD}=P_{ABE}-P_{CDE}=((x+z)(y+z)-xy)\tfrac{\sin\theta}{2}=z(x+y+z)\tfrac{\sin\theta}{2}=\tfrac{a^2-b^2}{4}\operatorname{ctg}\tfrac{\theta}{2},$$

од каде следува дека $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=1$, т.е. $\theta=90^\circ$.

30. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков, што

$$\overline{AD}=\overline{BC},\ \overline{AB}=\sqrt{3}\overline{CD} \text{ и } \measuredangle C-\measuredangle D=2(\measuredangle A-\measuredangle B)>0.$$

Определи ја разликата $\measuredangle A-\measuredangle B$.

Решение. Бидејќи

$$\overline{DA}\cdot\overline{AB}\sin\measuredangle A+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\sin\measuredangle C=2P_{ABCD}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\sin\measuredangle B+\overline{CD}\cdot\overline{DA}\sin\measuredangle D,$$

од $\overline{AD}=\overline{BC},\ \overline{AB}=\sqrt{3}\overline{CD}$ следува дека

$$\sqrt{3}\sin\measuredangle A+\sin\measuredangle C=\sqrt{3}\sin\measuredangle B+\sin\measuredangle D,$$

т.е.

$$\sin\tfrac{\measuredangle C-\measuredangle D}{2}\cos\tfrac{\measuredangle C+\measuredangle D}{2}=\sqrt{3}\sin\tfrac{\measuredangle B-\measuredangle A}{2}\cos\tfrac{\measuredangle B+\measuredangle A}{2}.$$

Понатаму, $\measuredangle C+\measuredangle D\neq 180^\circ$, бидејќи во спротивно од $\overline{AD}=\overline{BC}$ ќе следува дека $ABCD$ е паралелограм што противречи на $\overline{AB}=\sqrt{3}\overline{CD}$. Сега, од

$$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C+\measuredangle D=360^\circ$$

следува дека

$$\cos\tfrac{\measuredangle C+\measuredangle D}{2}=-\cos\tfrac{\measuredangle B+\measuredangle A}{2}\neq 0,$$

па затоа

$$\sin\tfrac{\measuredangle C-\measuredangle D}{2}=\sqrt{3}\sin\tfrac{\measuredangle A-\measuredangle B}{2}.$$

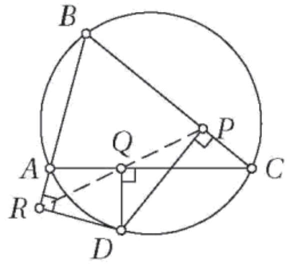
Бидејќи $\measuredangle C-\measuredangle D=2(\measuredangle A-\measuredangle B)>0$, добиваме дека

$$2\sin\tfrac{\measuredangle A-\measuredangle B}{2}\cos\tfrac{\measuredangle A-\measuredangle B}{2}=\sqrt{3}\sin\tfrac{\measuredangle A-\measuredangle B}{2}.$$

Но, $\measuredangle A>\measuredangle B$, па затоа $2\cos\frac{\measuredangle A-\measuredangle B}{2}=\sqrt{3}$, т.е. $\measuredangle A-\measuredangle B=60^\circ$.

31. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека P,Q и R се подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите BC,CA и AB, соодветно. Докажи, дека $\overline{PQ}=\overline{QR}$ ако и само ако симетралите на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ се сечат на правата AC.

Решение. Ако симетралите на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ ја сечат отсечката AC во точките K и L, соодветно, тогаш важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}$ и $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{LC}}$, па затоа $K\equiv L$, што е еквивалентно со $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Од друга страна, точките P и Q лежат на кружницата со дијаметар CD, па затоа



$\overline{PQ} = \overline{CD}\sin\measuredangle PCQ = \overline{CD}\sin\measuredangle ACB = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2r}$, па значи важи $\overline{PQ} = \overline{QR}$, што е еквивалентно со $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$.

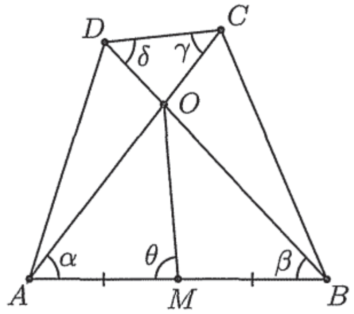
32. Нека O е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Правата која минува низ O и центарот на опишаната кружница околу $\triangle CDO$ ја полови отсечката AB, а правата низ O и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABO$ ја полови отсечката CD. Докажи дека $AB \| CD$.

Решение. Нека $\alpha = \measuredangle BAO, \beta = \measuredangle ABO, \gamma = \measuredangle DCO$ и $\delta = \measuredangle CDO$. Ако M е средина на AB од првиот услов следува дека $\gamma, \delta < 90^\circ$, $\measuredangle AOM = 90^\circ - \delta$ и $\measuredangle BOM = 90^\circ - \gamma$. Тогаш од синусната теорема добиваме дека

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} = \frac{\frac{\overline{AO}}{\overline{AM}}}{\frac{\overline{BO}}{\overline{BM}}} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\delta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\gamma}},$$

каде $\theta = \measuredangle AMO$. Според тоа,

$$\sin\alpha\cos\gamma = \sin\beta\cos\delta. \qquad (1)$$



Аналогно, од вториот услов добиваме

$$\cos\alpha\sin\gamma = \cos\beta\sin\delta. \qquad (2)$$

Ако од (1) го одземеме (2) добиваме

$$\sin(\alpha-\gamma) = \sin(\beta-\delta).$$

Но, $-\pi < \alpha-\gamma+\beta-\delta < \pi$, па затоа $\alpha-\gamma = \beta-\delta$. Сега, од $\alpha-\beta = \gamma-\delta$ заклучуваме дека $\alpha = \gamma$, т.е. $AB \| CD$.

Да забележиме, дека тогаш $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, па затоа $\alpha = \beta$ или $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Тоа значи, дека $ABCD$ е рамнокрак трапез или трапез со нормални дијагонали, при што и во двата случаја условот е исполнет.

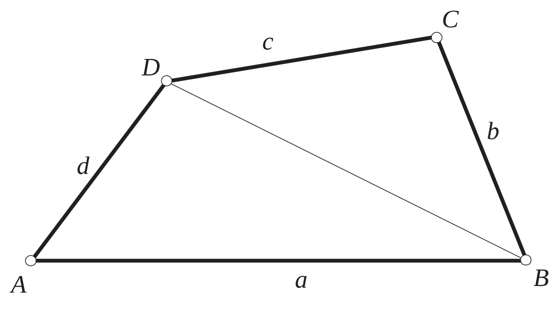
33. Дали може четириаголник со страни 8, 9, 10 и 11 да има плоштина поголема од 100?

Решение. Нека $ABCD$ е било кој четириаголник кој е конвексен и кој има должини на страни a,b,c,d (види цртеж). Тогаш $P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD}$. Но,

$$P_{ABD} = \tfrac{1}{2}ad\sin\alpha \le \tfrac{1}{2}ad,$$

па, значи,

$$P_{ABCD} \le \tfrac{1}{2}(ad+bc).$$



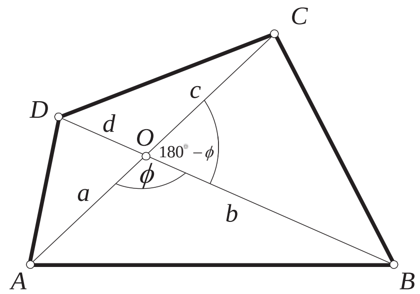
Во нашиот случај, за плоштината P, на четириаголникот со страни 8, 9, 10, 11, добиваме $P \le 91$, што значи дека плоштината на кој било четириаголник со страни 8, 9, 10 и 11 не може да е поголема од 100.

34. Да се пресмета плоштината на конвексен четириаголник со дадени дијагонали d_1 и d_2 и агол ϕ меѓу нив.

Решение. Нека е даден кој било четириаголник $ABCD$ и нека O е пресек на неговите дијагонали. Да ставиме:

$$\overline{OA}=a, \overline{OB}=b, \overline{OC}=c, \overline{OD}=d, \measuredangle AOB=\phi \text{ и}$$

$$\measuredangle BOC=180^\circ-\phi.$$



Очигледно е дека

$$P_{ABCD}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CDO}+P_{DAO}.$$

За плоштините на триаголниците ќе имаме:

$$P_{ABO}=\tfrac{1}{2}ab\sin\phi, \quad P_{BCO}=\tfrac{1}{2}bc\sin(180^\circ-\phi)=\tfrac{1}{2}bc\sin\phi,$$

$$P_{CDO}=\tfrac{1}{2}cd\sin\phi, \quad P_{DAO}=\tfrac{1}{2}ad\sin(180^\circ-\phi)=\tfrac{1}{2}ad\sin\phi,$$

па ќе добиеме:

$$P_{ABCD}=\tfrac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\phi=\tfrac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\phi=\tfrac{1}{2}d_1d_2\sin\phi.$$

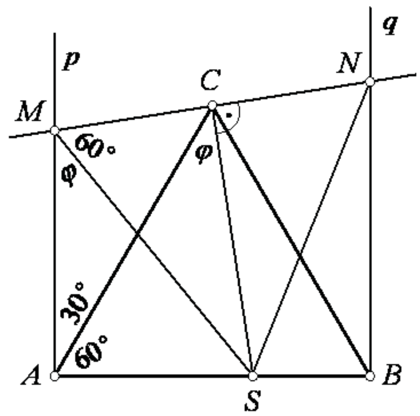
Забелешка. Ако дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални, тогаш $\sin\phi=1$, па за плоштина на четириаголникот со заемно нормални дијагонали се добива познатата формула $P=\frac{d_1d_2}{2}$.

35. Низ темињата A и B на рамностраниот триаголник ABC конструирани се нормали p и q на AB, во истата полурамнина во која се наоѓа триаголникот ABC. Низ темето C повлечена е произволна права која ги сече p и q во точките M и N, соодветно. Симетралата на отсечката MN ја сече правата AB во точката S.

а) Докажи дека триаголникот MSN е рамностран

б) Плоштината на триаголникот MSN изрази ја преку должината на страната на триаголникот ABC и аголот ACS.

Решение. а) Триаголникот MSN е рамнокрак, па доволно е да се докаже дека $\measuredangle CMS=60^0$. Четириаголникот $ASCM$ е тетивен, $\measuredangle MAS=\measuredangle MCS=90^\circ$, па $\measuredangle SMC=\measuredangle SAC=60^\circ$, па триаголникот MSN е рамностран. Да ги означиме $\measuredangle ACS=\varphi$ и должината на страната на триаголникот ABC со a.



б) $\measuredangle AMS=\varphi$, бидејќи четириаголникот $ASCM$ е тетивен. Од триаголникот MAC, според синусната теорема имаме:

$$\frac{\overline{MC}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin(60^\circ+\varphi)} \Leftrightarrow \frac{\overline{MN}}{2}=\overline{MC}=\frac{a\cdot\sin 30^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sin(60^\circ+\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MN}=\frac{a}{\sin(60^\circ+\varphi)}.$$

Значи,

$$P_{\triangle MSN}=\frac{\overline{MN}^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\sin^2(60^\circ+\varphi)}\ .$$

36. Аглите на еден триаголник се α,β и γ. Висината на триаголникот спуштена од темето B има должина H и е дијаметар на кружницата k. Пресеците на кружницата k со страните BA и BC се поврзани со краевите на висината. Определи ја плоштината на добиениот четириаголник.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој α,β,γ се негови агли и $\overline{BN}=H$ е негова висина. Нека O е центар на кружницата k со дијаметар BN при што $k\cap AB=E$ и $k\cap CB=D$.

Четириаголникот $BDNE$ е тетивен. Според тоа

$$\measuredangle DNE=180^\circ-\measuredangle EBD$$

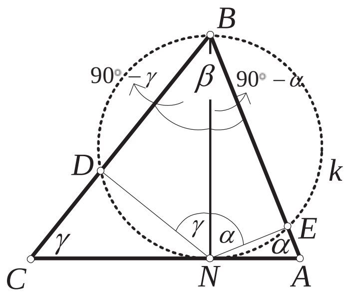
и

$$P_{DNEB}=P_{BDE}+P_{DNE}=\tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BE}\sin\beta+\tfrac{1}{2}\overline{ND}\cdot\overline{NE}\sin(180^\circ-\beta)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin\beta(\overline{BD}\cdot\overline{BE}+\overline{ND}\cdot\overline{NE})$$

Од триаголникот BDN, бидејќи $\measuredangle DBN=\measuredangle CBN=90^\circ-\gamma$, имаме

$$\overline{BD}=H\cos(90^\circ-\gamma)=H\sin\gamma$$

$$\overline{DN}=H\sin(90^\circ-\gamma)=H\cos\gamma$$



Од триаголникот BEN, бидејќи

$$\measuredangle EBN=\measuredangle ABN=90^\circ-\beta,$$

имаме

$$\overline{BE}=H\cos(90^\circ-\alpha)=H\sin\alpha$$

$$\overline{EN}=H\sin(90^\circ-\alpha)=H\cos\alpha\ .$$

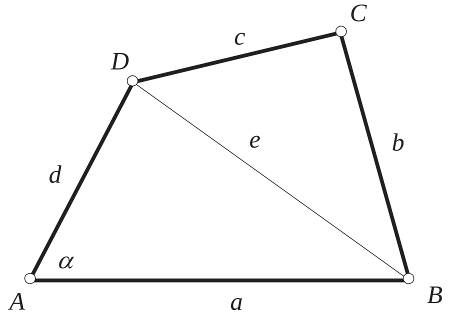
Сега,

$$P=\tfrac{1}{2}\sin\beta(H^2\sin\alpha\sin\gamma+H^2\cos\alpha\cos\gamma)=\tfrac{1}{2}H^2\sin\beta\cos(\alpha-\gamma)\ .$$

37. Да се докаже дека од сите четириаголници со страни a,b,c,d, тетивниот има најголема плоштина.

Решение. Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник (види цртеж); тогаш за неговата плоштина P ќе имаме

$$2P=P_{ABD}+P_{BCD}=ad\sin\alpha+bc\sin\beta,\quad(1)$$



Според косинусната торема, ќе имаме

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\beta,$$

т.е.

$$\tfrac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2)=ad\cos\alpha-bc\cos\beta\ .\quad(2)$$

Ако ги квадрираме равенствата (1) и (2), а потоа ги собереме добиваме:

$$4P^2+\tfrac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\tfrac{\alpha+\beta}{2},$$

или

$$16P^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2) - 16abcd\cos^2\tfrac{\alpha+\beta}{2} = ...$$

$$= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 16abcd\cos^2\tfrac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ставајќи $a+b+c+d = 2s$, добиваме

$$P^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\tfrac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (3)$$

Плоштината на четириаголникот $ABCD$ ќе биде најголема во случајот

$$\cos^2\tfrac{\alpha+\beta}{2} = 0,$$

т.е. $\alpha+\beta = 180^\circ$, што претставува потребен и доволен услов четириаголникот да биде тетивен.

Значи, плоштината на тетивен четириаголник со страни a, b, c и d е дадена со формулата

$$P^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d). \qquad (4)$$

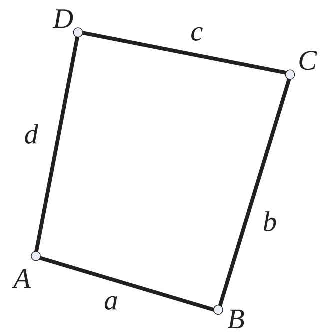
38. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со плоштина

$$P = \tfrac{1}{2}(\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{CD}\cdot\overline{DA}).$$

Докажи дека четириаголникот е тетивен.

Решение. Нека должините на страните на четириаголникот ги означиме како на цртежот. Нека $\beta = \measuredangle ABC$ и $\delta = \measuredangle CDA$. Тогаш за плоштината на четириаголникот $ABCD$ имаме

$$P = \tfrac{1}{2}(ab\sin\beta + cd\sin\delta).$$



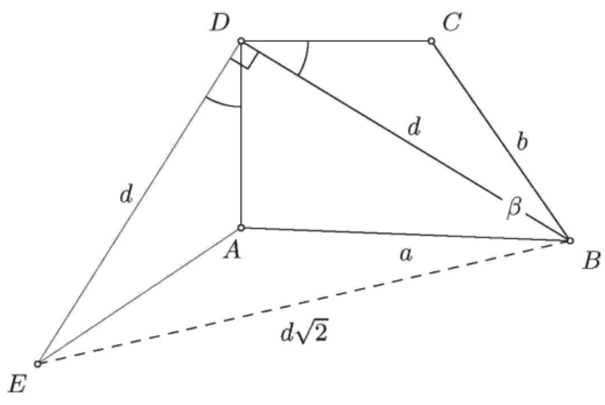
Од условот на задачата добиваме

$$ab+cd = 2P = ab\sin\beta + cd\sin\delta \le ab+cd,$$

а равенство се достигнува ако и само ако $\sin\beta = 1$ и $\sin\delta = 1$, односно $\beta = \delta = \frac{\pi}{2}$. Од ова следува тврдењето на задачата.

39. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AD} = \overline{CD}$ и $\measuredangle ADC = 90^\circ$. Ако $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{BD} = d$ и $\measuredangle ABC = \beta$, докажи дека

$$2d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\sin\beta.$$



Решение. Прв начин. Нека E е точка таква што триаголникот BDE е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето D, а A и E се од сита страна на правата BD. Тогаш $\overline{BE} = d\sqrt{2}$ и важи

$$\measuredangle EDA = 90^\circ - \measuredangle ADB = \measuredangle BDC.$$

Бидејќи $\overline{CD} = \overline{AD}$ и $\overline{DE} = \overline{DB}$, од признакот САС следува дека триаголниците EDA и BCD се складни. Затоа важи $\overline{AE}=b$.

Понатаму, имаме

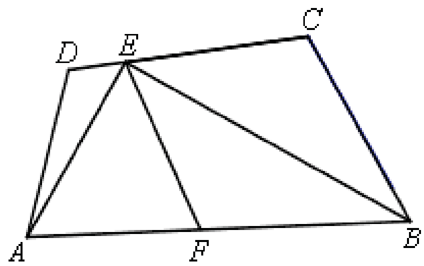
$\measuredangle EAB = 360^\circ - \measuredangle EAD - \measuredangle DAB = 360^\circ - \measuredangle DCB - \measuredangle DAB = \measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 90^\circ + \beta.$

Конечно, од косинусната теорема применета на триаголникот ABE следува

$$2d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(90^\circ + \beta) = a^2 + b^2 + 2ab\sin\beta\,.$$

40. Во конвексен четириаголник $ABCD$, за кој важи $\measuredangle BCD = \measuredangle CDA$, симетралата на аголот ABC ја сече отсечката CD во точка E. Ако $\measuredangle AEB = 90^\circ$ тогаш $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$. Докажи.

Решение. Нека $\measuredangle AEB = 90^\circ$. Бидејќи аголот BEC е остар, постои точка F на страната AB така што $\measuredangle BEF = \measuredangle BEC$. Тогаш $\triangle BCE \cong \triangle BFE$ и затоа $\measuredangle BFE = \measuredangle BCE$ и $\overline{BC} = \overline{BF}$. Од синусната теорема за $\triangle AFE$ имаме $\frac{\overline{AE}}{\sin\measuredangle AFE} = \frac{\overline{AF}}{\sin\measuredangle AEF}$, а од синусната теорема за $\triangle AED$ имаме $\frac{\overline{AE}}{\sin\measuredangle ADE} = \frac{\overline{AD}}{\sin\measuredangle AED}$.



Оттука следува:

$$\overline{AF} = \frac{\sin\measuredangle AEF}{\sin\measuredangle AFE}\overline{AE} = \frac{\sin(90^\circ - \measuredangle BEF)}{\sin(180^\circ - \measuredangle AFE)}\overline{AE} = \frac{\sin(90^\circ - \measuredangle BEC)}{\sin\measuredangle EFB}\overline{AE}$$

$$= \frac{\sin\measuredangle AED}{\sin\measuredangle ECB}\overline{AE} = \frac{\sin\measuredangle AED}{\sin\measuredangle ADE}\overline{AE} = \overline{AD}.$$

Конечно, $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

41. Нека S е пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$. Определи го аголот помеѓу дијагоналите на четириаголникот ако е познато дека

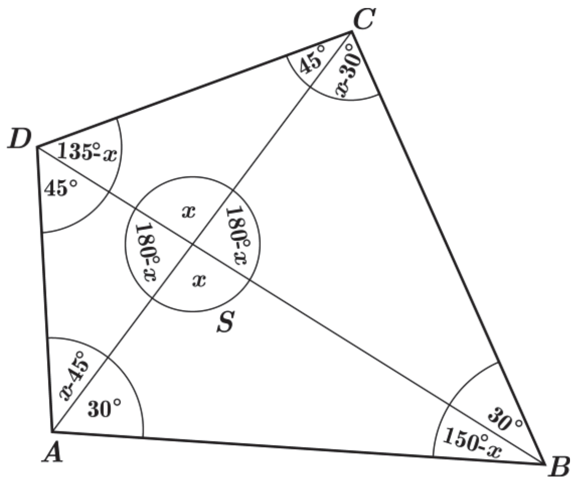
$$\measuredangle SAB = \measuredangle SBC = 30^\circ \text{ и } \measuredangle SCD = \measuredangle SDA = 45^\circ.$$

Решение. Од синусната теорема применета на секој од триаголниците ACD, ABC и ABD дадени на цртежот, ги добиваме следниве равенства

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\sin(180^\circ - x)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin x}{\sin 45^\circ},$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin(180^\circ - x)} = \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin x} \text{ и}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(150^\circ - x)}.$$



Со замена во

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}},$$

ја добиваме равенката

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin(150^\circ - x)} = \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 45^\circ},$$

еквивалентна со

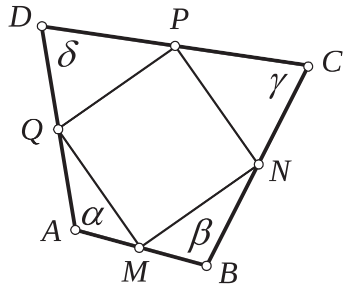
$$\sin^2 45^\circ = \sin(150^\circ - x)\sin(x - 30^\circ)\,,$$

односно со равенката

$$\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}(\cos 120^\circ - \cos(180^\circ - 2x))$$

Последната равенка се сведува на $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, чии решенија се $x = 60^\circ$ или $x = 120^\circ$. Значи, помалиот агол помеѓу дијагоналите изнесува $x = 60^\circ$.

42. Даден е конвексниот четириаголник $ABCD$. Точките M, N, P и Q кои припаѓаат на страните AB, BC, CD и DA, соодветно, ги делат тие страни во ист однос. Пресметај го тој однос така што плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е најмала.



Решение. Нека $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{QA}} = k$. Ако

$$\overline{AB} = a,\ \ \overline{BC} = b,\ \ \overline{CD} = c \text{ и } \overline{DA} = d,$$

тогаш

$$\overline{AM} = \tfrac{k}{k+1}a\,,\ \overline{MB} = \tfrac{1}{k+1}a\,,\ \overline{BN} = \tfrac{k}{k+1}b\,,\ \overline{NC} = \tfrac{1}{k+1}b\,,$$
$$\overline{CP} = \tfrac{k}{k+1}c\,,\ \overline{PD} = \tfrac{1}{k+1}c\,,\ \overline{DQ} = \tfrac{k}{k+1}d \text{ и } \overline{QA} = \tfrac{1}{k+1}d\,.$$

Плоштината на четириаголникот $MNPQ$ ќе биде најмала ако збирот од плоштините на триаголниците QAM, MNB и PDQ е најголем.

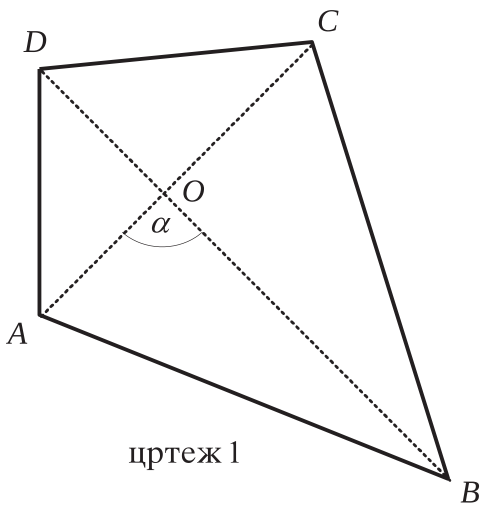
$$\begin{aligned} P &= P_{\triangle QAM} + P_{\triangle MNB} + P_{\triangle NCP} + P_{\triangle PDQ} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{k+1}d\cdot\tfrac{k}{k+1}a\cdot\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{k+1}a\cdot\tfrac{k}{k+1}b\cdot\sin\beta + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{k+1}b\cdot\tfrac{k}{k+1}c\cdot\sin\gamma + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{k+1}c\cdot\tfrac{k}{k+1}d\cdot\sin\delta \\ &= \tfrac{k}{(k+1)^2}\left(\tfrac{ad\sin\alpha}{2} + \tfrac{ab\sin\beta}{2} + \tfrac{bc\sin\gamma}{2} + \tfrac{cd\sin\delta}{2}\right) \\ &= \tfrac{k}{(k+1)^2}\cdot 2P_{ABCD} \le \tfrac{1}{2}P_{ABCD} \end{aligned}$$

бидејќи $(k+1)^2 \ge 4k$. Значи за $k = 1$, $P_{\max} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$, па според тоа четириаголникот $MNPQ$ има најмала плоштина кога точките M, N, P и Q се средини на соодветните страни.

43. Точките A, B, C и D лежат во една рамнина. Докажи дека $AC \perp BD$ ако и само ако

$$\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2\,. \qquad (*)$$

Решение. Правата BD ја дели рамнината во која лежат точките на две полурамнини. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека точките A и C лежат во различна полурамнина. Случајот кога лежат во иста полурамнина се разгледува аналогно (види цртеж 2).



цртеж 1

Нека $BD \perp AC$ (види цртеж 1). Бидејќи

A и C припаѓаат во различни полурамнини, отсечките AC и BD се сечат, и нека $AC \cap BD = O$.
Според Питагорина теорема

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2,\ \overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OC}^2,$$
$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OD}^2,\ \overline{DA}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{OA}^2$$

Сега

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$$

или

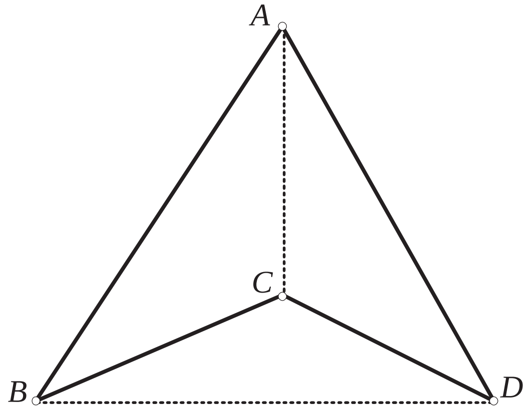
$$\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2.$$

Обратно, да претпоставиме дека

$$\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2.$$

Ќе воведеме ознака $\angle AOB = \alpha$. Според косинусна теорема имаме

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{AO}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\alpha$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{BO}\cdot\overline{OC}\cdot\cos\alpha$$
$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OD}^2 - 2\overline{CO}\cdot\overline{OD}\cdot\cos\alpha$$
$$\overline{DA}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{OA}^2 + 2\overline{DO}\cdot\overline{OA}\cdot\cos\alpha.$$



цртеж 2

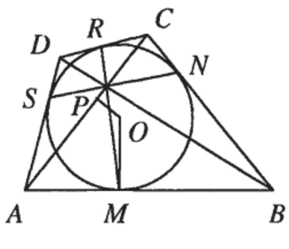
Од (*) имаме

$$(\overline{AO}\cdot\overline{OB} + \overline{BO}\cdot\overline{OC} + \overline{CO}\cdot\overline{OD} + \overline{DO}\cdot\overline{OA})\cdot\cos\alpha = 0$$

и бидејќи изразот во заградите е позитивен, добиваме $\cos\alpha = 0$. Но, $0 < \alpha < \pi$, па според тоа $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

44. Четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружница со центар O. АКо P е проекцијата на O врз дијагоналата AC, докажи дека $\measuredangle APB = \measuredangle APD$.

Решение. Ќе го искористиме следново тврдење: Ако α, β, γ и δ се агли такви што $\sin\alpha\sin\delta = \sin\beta\sin\gamma$ и $\alpha + \beta = \gamma + \delta < 180^\circ$, тогаш $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$.



Со M, N, R, S да ги означиме допирните точки на вписаната кружница на страните AB, BC, CD, DA, соодветно. Тогаш точките A, M, O, P, S лежат на кружница со дијаметар AO и $\measuredangle APM = \frac{AM}{2} = \frac{AS}{2} = \measuredangle APS$. Аналогно имаме $\measuredangle CPR = \measuredangle CPN$ и затоа $\measuredangle SPR = \measuredangle MPN$.

Од синусната теорема за $\triangle BPM$ и $\triangle BPN$ следува

$$\frac{\sin\measuredangle MPB}{\sin\measuredangle PMB} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BP}} = \frac{\sin\measuredangle BPN}{\sin\measuredangle BNP}$$

и затоа $\frac{\sin\measuredangle MPB}{\sin\measuredangle NPB} = \frac{\sin\measuredangle PMB}{\sin\measuredangle PNB}$. Бидејќи

$$\measuredangle PMB = 180^\circ - \measuredangle AMP = 180^\circ - \measuredangle AOP$$

$$\measuredangle PNB = 180^\circ - \measuredangle CNP = 180^\circ - \measuredangle COP$$

добиваме $\frac{\sin\measuredangle MPB}{\sin\measuredangle NPB} = \frac{\sin\measuredangle AOP}{\sin\measuredangle COP}$. Аналогно се добива дека $\frac{\sin\measuredangle SPD}{\sin\measuredangle RPD} = \frac{\sin\measuredangle AOP}{\sin\measuredangle COP}$ и останува да го примениме горното тврдење за аглите

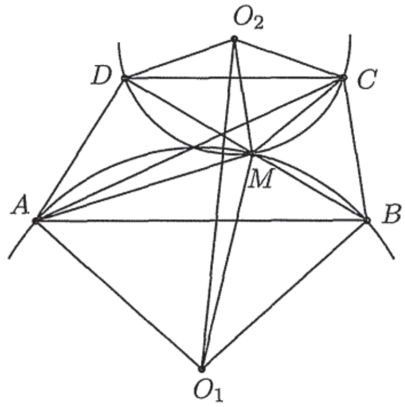
$$\alpha = \measuredangle MPB, \beta = \measuredangle NPB, \gamma = \measuredangle SPD \text{ и } \delta = \measuredangle RPD.$$

Добиваме $\measuredangle MPB = \measuredangle SPD$ и затоа

$$\measuredangle APB = \measuredangle APM + \measuredangle MPB = \measuredangle APS + \measuredangle SPD = \measuredangle APD.$$

45. На дијагоналата BD на трапезот $ABCD$, $AB \| CD$, земена е произволна точка M. Докажи, дека растојанието меѓу центрите на опишаните кружници околу $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ не зависи од изборот на точката M.

Решение. Нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$, соодветно.



Да означиме $\varphi = \measuredangle ABM = \measuredangle CDM$. Тогаш

$$\measuredangle O_1MA = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle AO_1M = 90^\circ - \varphi$$

и аналогно $\measuredangle O_2MC = 90^\circ - \varphi$. Оттука добиваме $\measuredangle O_1MO_2 = \measuredangle AMC$. Од синусната теорема следува

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \frac{2\overline{O_1M}\sin\varphi}{2\overline{O_2M}\sin\varphi} = \frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_2M}}.$$

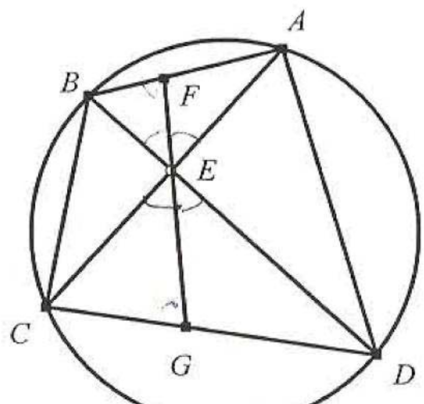
Според тоа, $\triangle AMC \sim \triangle O_1MO_2$ со коефициент на сличност $2\sin\varphi$. Оттука добиваме

$$\overline{AC} = 2\overline{O_1O_2}\sin\measuredangle ABD,$$

т.е. $\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{AC}}{2\sin\measuredangle\varphi}$ не зависи од изборот на точката M.

46. Во четириаголникот $ABCD$ страните AD и BC не се паралелни. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката E. Точките F и G ги делат соодветно страните AB и DC во однос $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$.

Ако точките E, F и G се колинеарни, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен



Решение. Од теоремата на Менелај, применета на триаголниците BCD и ABC следува

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 1, \qquad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

при што $BC \cap FG = \{X\}$. Ако го искористиме условот на задачата $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$, после делењето на горните две равенства добиваме

$$\frac{\overline{DE}\cdot\overline{EA}}{\overline{EB}\cdot\overline{CE}} = \frac{\overline{AF}\cdot\overline{GD}}{\overline{FB}\cdot\overline{CG}} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{BC}^2}. \qquad (*)$$

Од триаголниците ADE и BCE имаме:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\measuredangle AED} = \frac{\overline{AE}}{\sin\measuredangle EDA} = \frac{\overline{ED}}{\sin\measuredangle EAD}, \qquad \frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle BEC} = \frac{\overline{BE}}{\sin\measuredangle BCE} = \frac{\overline{EC}}{\sin\measuredangle CBE}$$

односно

$$\overline{AD}^2 = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{DE}\cdot\sin\measuredangle AED\cdot\sin\measuredangle AED}{\sin\measuredangle EDA\cdot\sin\measuredangle EAD}, \qquad \overline{BC}^2 = \frac{\overline{BE}\cdot\overline{CE}\cdot\sin\measuredangle BEC\cdot\sin\measuredangle BEC}{\sin\measuredangle BCE\cdot\sin\measuredangle CBE}.$$

Сега ако ги поделиме последните две равенства и ја искористиме (*) добиваме $1 = \frac{\sin\measuredangle BCE\cdot\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle EDA\cdot\sin\measuredangle EAD}$, од што последователно следува

$$\cos(\measuredangle EDA - \measuredangle EAD) = \cos(\measuredangle BCE - \measuredangle CBE)$$

$$\measuredangle EDA - \measuredangle EAD = \pm(\measuredangle BCE - \measuredangle CBE).$$

Освен тоа, важи

$$\measuredangle EDA + \measuredangle EAD = \measuredangle BCE + \measuredangle CBE$$

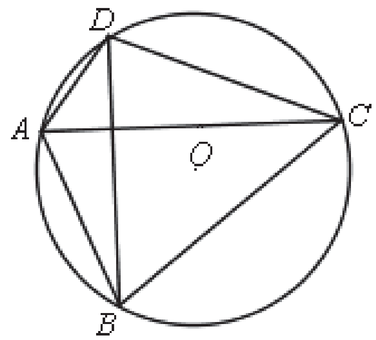
па затоа важи $\measuredangle EDA = \measuredangle BCE$ или $\measuredangle EDA = +\measuredangle CBE$. Вториот случја го отфрламе заради претпоставката дека страните AD и BC не се паралелни.

Значи, четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

47. Четириаголникот $ABCD$ има заемно нормални дијагонали AC и BD и е впишан во кружница со центар O и радиус 1.

а) Определи го збирот на квадратите на страните на четириаголоникот.

б) Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако кружница со центар S е впишана во $ABCD$ и $\overline{OS} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



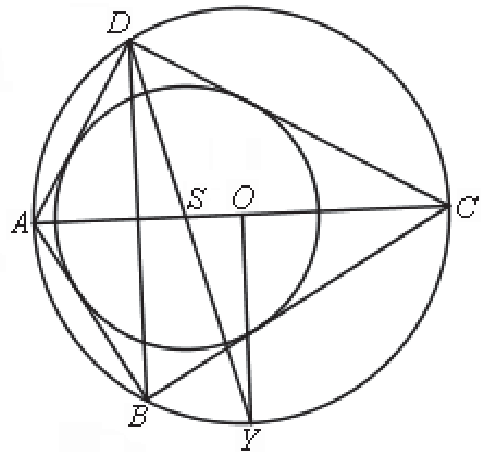
Решение. а) Да ги означиме аглите BAC и DAC со α и β, соодветно. Од синусната теорема за триаголникот ABC имаме $\frac{\overline{AB}}{\sin\measuredangle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = 2$. Значи, $\overline{BC} = 2\sin\alpha$ и

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 2\sin\measuredangle ACB = 2\sin\measuredangle ADB \\ &= 2\sin(90^\circ - \beta) = 2\cos\beta\end{aligned}.$$

Слично, $\overline{DC} = 2\sin\beta$ и $\overline{AD} = 2\cos\alpha$. Тогаш:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4(\cos^2\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha) = 8.$$

б) Бидејќи четириаголникот е тангентен важи $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$, односно $2(\cos\beta + \sin\beta) = 2(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Оттука, следува $\cos(45^\circ - \beta) = \cos(45^\circ - \alpha)$ и затоа $\alpha = \beta$ или $\alpha + \beta = 90^\circ$. Во првиот случај важи: $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{BC} = \overline{DC}$ и $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC = 90^\circ$, а во вториот случај $\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\overline{DC} = \overline{AD}$ и $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB = 90^\circ$. Во двата случаи се добива делтоид, и затоа центрите O и S лежат на дијагоналата во однос на која делтоидот е осно симетрична фигура. Натаму, ќе го разгледуваме првиот случај. Нека правата DS ја сече опишаната кружница околу делтоидот во точка Y. Тогаш, и затоа $\overline{AY} = \overline{CY}$. Оттука, следува дека триаголникот OSY е правоаголен, па $\mathrm{tg}\measuredangle SYO=\frac{\overline{SO}}{\overline{OY}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, односно $\angle SYO=30^\circ$.



Тогаш, $\measuredangle ODS=30^\circ$ и

$$\begin{aligned}\measuredangle DAC&=\measuredangle DAO=\measuredangle ADO\\&=\measuredangle ADS+\measuredangle SDO\\&=45^\circ+30^\circ=75^\circ\end{aligned}$$

а $\measuredangle DCA=15^\circ$. Конечно,

$$\begin{aligned}P_{ABCD}&=2P_{ACD}=\overline{AD}\cdot\overline{DC}\\&=2\cos 75^\circ\cdot 2\sin 75^\circ\\&=2\sin 150^\circ=1.\end{aligned}$$

48. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ за кој најкратката страна е Ab и најдолгата страна е CD $(\overline{AB}<\overline{CD})$. Докажи дека на отсечката CD може да се избере точка E со следново својство: за секоја точка $P\neq E$ од отсечката CD должината на отсечката, која ги поврзува центрите на кружниците опишани околу триаголниците APD и BPE, не зависи од изборот на точката P.

Решение. Ќе докажеме, дека бараната точка E е пресечната точка ма правата CD и правата која минува низ точката B и е паралелна на AD. Прво ќе докажеме дека E лежи на отсечката CD. Од условот имаме $\overline{AB}\leq\overline{AD}$ и $\overline{BC}\leq\overline{CD}$, па затоа $\measuredangle ABD\geq\measuredangle ADB$ и $\measuredangle CBD\geq\measuredangle BDC$. Значи

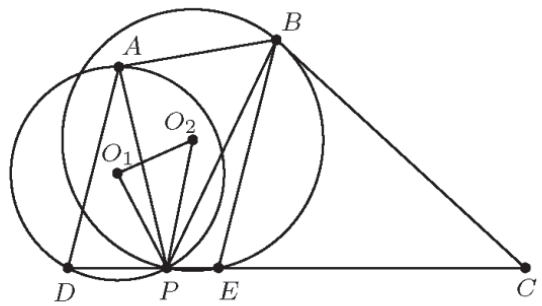
$$\measuredangle ABC=\measuredangle ABD+\measuredangle DBC\geq\measuredangle ADB+\measuredangle BDC\geq\measuredangle ADC.$$

Аналогно, $\measuredangle BAD\geq\measuredangle BCD$ и тогаш

$\measuredangle ABC+\measuredangle BAD\geq\measuredangle BCD+\measuredangle CDA$, т.е. $\measuredangle ABC+\measuredangle BAD\geq 180^\circ$.

Лесно се гледа дека $\measuredangle ABC+\measuredangle BAD>180^\circ$, бидејќи во спротивно четириаголникот $ABCD$ ќе биде паралелограм. Оттука добиваме, дека E лежи на отсечката CD.

Ќе докажеме, дека за произволна точка P од отсечката CD, различна од E, е исполнето равенството $\measuredangle O_1PO_2=\measuredangle APB$, каде O_1 и O_2 сесоодветно центрите на кружниците опишани околу триаголниците APD и BPE.

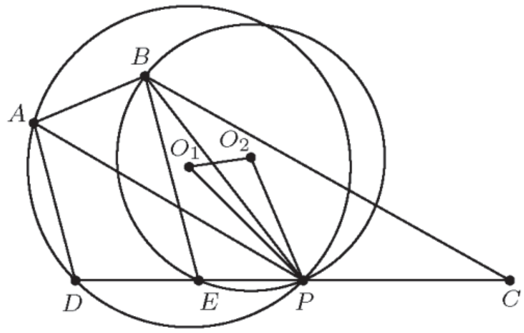


Прв случај. Ако $\measuredangle ADP<90^\circ$, тогаш $\measuredangle BEC<90^\circ$ и точките O_1 и C се од различна страна на правата PA, а точките O_2 и C се од различна страна на правата PB (цртеж горе). Тогаш

$$\measuredangle APO_1=90^\circ-\measuredangle ADP=90^\circ-\measuredangle BEC=\measuredangle BPO_2,$$

па затоа $\measuredangle O_1PO_2=\measuredangle APB$.

Втор случај. Ако $\measuredangle ADP \geq 90^{\circ}$, аналогно на првиот случај (сега точките O_1 и C се од иста страна на правата PA, а точките O_2 и C се од иста страна на правата PB, цртеж десно), повторно имаме $\measuredangle O_1PO_2 = \measuredangle APB$.



Од синусната теорема добиваме

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{2\overline{O_1P}\sin\measuredangle ADP}{2\overline{O_2P}\sin\measuredangle BEP} = \frac{\overline{O_1P}}{\overline{O_2P}},$$

па затоа $\triangle APB \sim \triangle O_1PO_2$. Според тоа,

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}\overline{O_1P} = \frac{\overline{AB}}{2\sin\measuredangle ADC},$$

што значи дека $\overline{O_1O_2}$ не зависи од изборот на точката P.

49. Права p допира кружница k опишана околу четириаголник $ABCD$. Со K да ја означиме допирната точка на правата и кружницата. Познато е дека правите AC и BD на правата p отсекуваат исечок симетричен во однос на точката K. Докажи дека и правите AB и CD на правата p отсекуваат исечок симетричен во однос на точката K.

Решение. Ги воведуваме ознаките $AC \cap p = N, BD \cap p = M, AB \cap p = F$, $CD \cap p = R$, $\overline{FK} = x$, $\overline{RK} = y$, $\alpha = \measuredangle FBM, \beta = \measuredangle BFK, \gamma = \measuredangle KRC$ и $\varphi = \measuredangle BAC$. Јасно $\measuredangle ABD = \alpha$, $\measuredangle ACD = \alpha$, $\measuredangle RCN = \alpha$ и $\varphi = \measuredangle BAC$. Од степен на точка во однос на кружница имаме $\overline{NC}\cdot\overline{NA} = \overline{NK}^2$, $\overline{MB}\cdot\overline{MD} = \overline{MK}^2$ и бидејќи $\overline{MK} = \overline{NK}$, следува

$$\overline{NC}\cdot\overline{NA} = \overline{MB}\cdot\overline{MD}. \qquad (1)$$

Од синусната теорема, применета на $\triangle RNC$, $\triangle NFA$, $\triangle MRD$ и $\triangle FMB$ добиваме

$$\overline{MC} = (b-y)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad \overline{NA} = (b+x)\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}, \quad \overline{MB} = (b-x)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \overline{MD} = (b+y)\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}$$

Соодветно. Со замена во (1) добиваме

$$(b-y)(b+x)\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi} = (b-x)(b+y)\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi},$$

и бидејќи $\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi} \neq 0$, имаме

$$(b-y)(b+x) = (b-x)(b+y),$$

од што следува дека $x = y$, што и требаше да се докаже.

50. Да се најде четириаголникот $ABCD$ со најголема плоштина кој што ги исполнува условите $\overline{AB}+\overline{CD} = 6$ и $\overline{BC}+\overline{DA} = 8$. Колку изнесува таа плоштина?

Решение. Нека должините на страните на четриаголникот $ABCD$ се $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ и $\overline{DA} = d$, неговите агли се $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$, $\measuredangle C = \gamma$ и $\measuredangle D = \delta$, а неговата плоштина е P. Јасно,

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} = \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin\delta \le \tfrac{ab+cd}{2}$$
$$P = P_{ADB} + P_{DCB} = \tfrac{1}{2}ad\sin\alpha + \tfrac{1}{2}bc\sin\gamma \le \tfrac{ad+bc}{2}$$

($|\sin\alpha|\le 1$, $|\sin\beta|\le 1$, $|\sin\gamma|\le 1$ и $|\sin\delta|\le 1$). Но тогаш

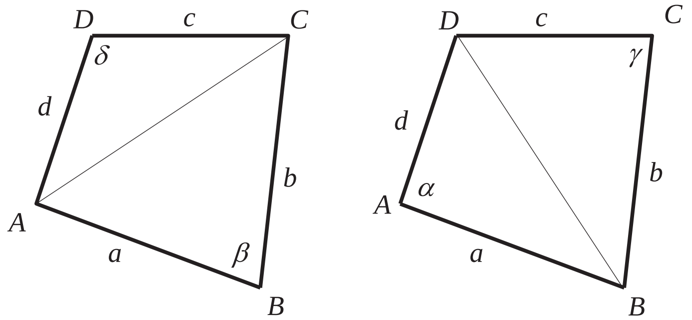
$$2P \le \tfrac{ab+bc+cd+da}{2} = \tfrac{(a+c)(b+d)}{2},$$

т.е. $P \le \frac{(a+c)(b+d)}{4}$. Според тоа, $P \le \frac{6\cdot 8}{4} = 12$.

Равенство се достигнува ако и само ако $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sin\delta = 1$ т.е.

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \tfrac{\pi}{2}.$$

Во тој случај четириаголникот $ABCD$ е правоаголник со страни 3 и 4.



51. Даден е четириаголник $ABCD$, таков што
$$\overline{AB} = 5\sqrt{2},\ \overline{BC} = 5-\sqrt{3},\ \overline{DC} = 2,\ \overline{AD} = 4 \text{ и } \overline{AC} = 2\sqrt{7}.$$

а) Определи ги аглите на четириаголникот.

б) Определи ја должината на отсечката која ги поврзува средините на дијагоналите на четириаголникот.

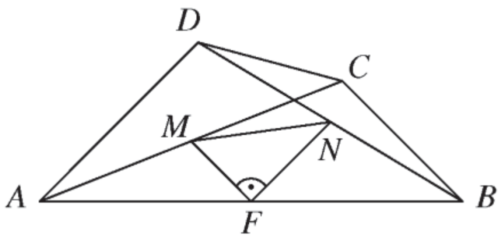
Решение. а) Од косинусната теорема, за $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, добиваме

$\cos\measuredangle ABC = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $\measuredangle ABC = 45^\circ$,

$\cos\measuredangle ADC = -\frac{1}{2}$, т.е. $\measuredangle ADC = 120^\circ$,

$\cos\measuredangle ACD = \frac{2}{\sqrt{7}}$, т.е. $\sin\measuredangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, и

$\cos\measuredangle ACB = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, т.е. $\sin\measuredangle ACB = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.



Затоа

$$\cos\measuredangle BCD = \cos\measuredangle BCA \cdot \cos\measuredangle ACD - \sin\measuredangle BCA \cdot \sin\measuredangle ACD = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \text{ т.е. } \measuredangle BCD = 150^\circ.$$

Конечно, $\measuredangle BAD = 45^\circ$.

б) Нека M, N и F се средините на отсечките AC, BD и AB, соодветно. Бидејќи NF и MF се средни линии во $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$, соодветно, добиваме дека $NF \parallel AD$, $\overline{NF} = 2$ и $MF \parallel BC$, $\overline{MF} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$. Тогаш $\measuredangle MFN = \measuredangle(AC, BC) = 90^\circ$ и од Питагоровата теорема за $\triangle MFN$ наоѓаме $\overline{MN} = \frac{1}{2}\sqrt{44-10\sqrt{3}}$.

52. Определи ги сите четириаголници $ABCD$ за кои должината на искршената линија $ABDC$ е е еднаква на L и кои имаат најголема плоштина.

Решение. Нека плоштината на четириаголникот $ABCD$ има максимална вредност за некои $\overline{AB}=x$, $\overline{BD}=y$ и $\overline{CD}=z$, $x+y+z=L$. Да забележиме дека

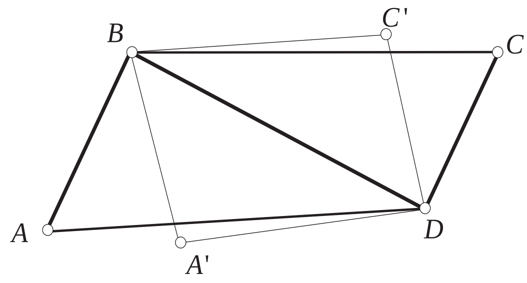
$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{DBC}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BD}\sin\measuredangle ABD+\tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BC}\sin\measuredangle BDC\,.$$

Очигледно е дека за да P_{ABCD} е максимална потребно е

$$\sin\measuredangle ABD=\sin\measuredangle BDC=1,$$

т.е. $\measuredangle ABD=\measuredangle BDC=90^\circ$. Но, тогаш

$$\begin{aligned}P_{ABCD}&=\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{1}{2}yz=\tfrac{1}{2}y(x+z)=\tfrac{1}{2}y(L-y)\\&=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{L^2}{4}-\tfrac{L^2}{4}+2\tfrac{L}{2}y-y^2\right)\\&=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{L^2}{4}-(y-\tfrac{L}{2})^2\right],\end{aligned}$$



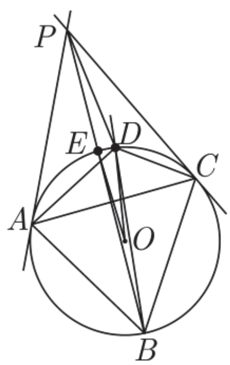
од каде е очиглено е дека P е максимално ако $y=\frac{L}{2}$ и во тој случај $P_{ABCD}=\frac{L^2}{8}$.

Сега е јасно кои ќе бидат бараните четириаголници.

53. Конвексен четириаголник $ABCD$ впишан е во кружница. Тангентите во темињата A и C се сечат во точка P, која не лежи на правата DB и притоа важи $\overline{PA}^2=\overline{PD}\cdot\overline{PB}$. Докажи дека BD минува низ средината на отсечката AC.

Решение. Нека пресечната точка на права PB со опишаната кружница околу $ABCD$ е E. Од

$$\overline{PA}^2=\overline{PD}\cdot\overline{PB} \text{ и } \overline{PA}^2=\overline{PE}\cdot\overline{PB}$$



следува дека $\overline{PD}=\overline{PE}$. Ако со O го означиме центарот на кружницата тогаш триаголниците OPD и OPE се складни. Затоа,

$$\measuredangle APD=\measuredangle APO-\measuredangle DPO=\measuredangle CPO-\measuredangle EPO=\measuredangle CPE=\measuredangle CPB\,.$$

Бидејќи $\overline{PA}=\overline{PC}$ и $\overline{PA}^2=\overline{PD}\cdot\overline{PB}$, имаме $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$ и од $\measuredangle APD=\measuredangle CPB$ следува дека триаголниците APD и BPC се слични, односно $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$. Од друга страна, $\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ и

$$\measuredangle APB=\measuredangle APD+\measuredangle DPE=\measuredangle BPC+\measuredangle DPB=\measuredangle DPC$$

па триаголниците APB и DPC се слични, од каде што $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$. Значи,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=1.$$

Тогаш

$$\frac{P_{ABD}}{P_{CBD}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle BAD}{\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{BC}\sin\measuredangle DCB}=\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin(180^\circ-\measuredangle BAD)}=\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\sin\measuredangle BADBAD}=1,$$

односно $P_{ABD}=P_{CBD}$. Тогаш висините на триаголниците ABD и CBD, спуштени кон заедничката страна BD се еднакви, односно BD минува низ средината на отсечката AC.

54. Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални и меѓу себе еднакви. Најди ги аглите во четириаголникот, ако

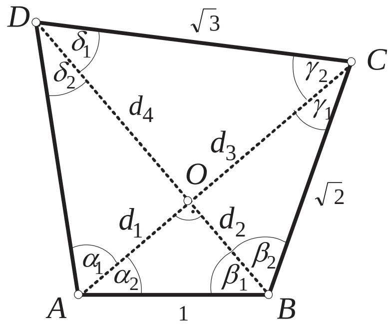
$$\overline{AB}=1,\quad \overline{BC}=\sqrt{2},\quad \overline{CD}=\sqrt{3}.$$

Решение. *Прв начин.* Користејќи ги ознаките на цртежот и Питагоровата теорема за правоаголните триаголници OAB, OBC и OCD, имаме:

$$\overline{AB}^2=1=d_1^2+d_2^2 \qquad (1)$$

$$\overline{BC}^2=2=d_2^2+d_3^2 \qquad (2)$$

$$\overline{CD}^2=3=d_3^2+d_4^2 \qquad (3)$$



Ако од збирот на (1) и (3) го одземеме равенството 2, добиваме

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2-\overline{BC}^2=1+3-2=d_1^2+d_4^2=\overline{AD}^2$$

т.е. $\overline{AD}=\sqrt{2}$.

Бидејќи дијагоналите се меѓу себе еднакви, заклучуваме дека триаголниците ABD и BAC се складни (ССС); од исти причини $\Delta ACD\cong\Delta BDC$, па имаме:

$$\alpha_2=\beta_1,\ \gamma_1=\delta_2,\ \alpha_1=\beta_2,\ \gamma_2=\delta_1,$$

т.е. $\alpha=\beta$ и $\gamma=\delta$, па четириаголникот $ABCD$ е рамнокрак трапез, чии дијагонали се меѓусебно нормални. Затоа

$$\alpha_2=\beta_1=45^\circ \text{ и } \delta_1=\gamma_2=45^\circ.$$

Слично,

$$\alpha_1+\delta_2=90^\circ \text{ и } \beta_2+\gamma_1=90^\circ.$$

Од синусната теорема за ΔABC имаме

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\sin\gamma} \text{ т.е. } \sin\gamma_1=\tfrac{1}{2},$$

па затоа $\gamma_1=30^\circ$. Значи, $\gamma_1=\delta_2=30^\circ$, па затоа $\measuredangle C=\measuredangle D=75^\circ$. Од $\beta_2=90^\circ-\gamma_1=60^\circ$ заклучуваме дека $\measuredangle A=\measuredangle B=105^\circ$.

Втор начин. Според ознаките на цртежот и условот $AC\perp BD$ следува:

1) од $\triangle ABM$: $(d-x)^2+y^2=x^2+y^2+d^2-2dx=1$,

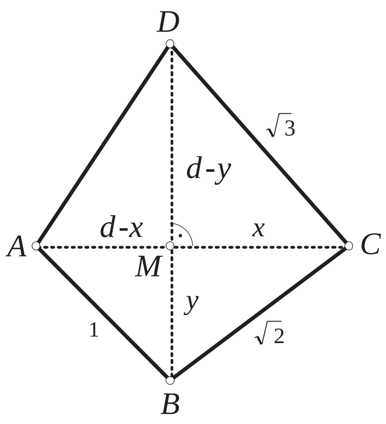
2) од $\triangle BCM$: $x^2+y^2=2$,

3) од $\triangle CDM$: $x^2+(d-y)^2=x^2+y^2+d^2-2dy=3$.

Понатаму добиваме

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{BC}^2&=x^2+y^2+2d^2-2dx-2dy\\&=(d-x)^2+(d-y)^2\\&=\overline{AD}^2=1-2+3=2.\end{aligned}$$

$$\overline{AD}=\sqrt{2}.$$



Од $\overline{AD}=\overline{BC}$ следува $\overline{AD}^2=\overline{BC}^2$, па затоа

$$2d^2+x^2+y^2-2dx-2dy=x^2+y^2,\ d-x-y=0$$

т.е. $1-x=y$. Конечно $\overline{AM}=\overline{BM}$. Од

$$1=\overline{AB}^2=(d-x)^2+y^2=2y^2$$

следува $y=d-x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\overline{AM}=\overline{BM}$. Конечно, $x=\overline{CM}=\overline{DM}$. Според тоа, $x^2+y^2=2$, т.е. $x^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, па затоа $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Оттука $d=x+y=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Од складноста на триаголниците ABC и BAD (ССС) и триаголниците BCD и ADC (ССС) следува $\measuredangle BAD=\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCD=\measuredangle ACD$.

Според косинусмста теорема за ΔABC добиваме:

$$\overline{AC}^2=\left(\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{2}\right)^2=\frac{2\,(4+2\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}\,;$$

$$2+\sqrt{3}=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\,\overline{BC}\cos\angle ABC=1+2-2\sqrt{2}\cos\angle ABC$$

$$2+\sqrt{3}=3-2\sqrt{2}\cos\angle ABC\,;$$

$$\cos\measuredangle ABC=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$$

Значи, $\measuredangle ABC=\measuredangle BAD=105^\circ$, па затоа $\measuredangle BCD=\measuredangle ADC=75^\circ$. Следствено, бараните агли во четириаголникот $ABCD$ се: $105^\circ, 105^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.

55. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник, за кој важи $\overline{AB}=2, \overline{AD}=3$ и $\measuredangle BAD=\measuredangle BCD$. Определи ги должините на страните BC и CD, ако е познато, дека тие се природни броеви.

Решение. Нека $\overline{BC}, \overline{CD}=y$ и $\measuredangle BAD=\measuredangle BCD=\alpha$. Од косинусната теорема следува, дека $2^2+3^2-12\cos\alpha=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$, па затоа

$$x^2+y^2-13=2(xy-6)\cos\alpha\,. \tag{1}$$

Прв случај. Ако $xy=6$, тогаш од $x^2+y^2=13$ добиваме дека $x=2, y=3$ или $x=3, y=2$. Во првиот случај $ABCD$ е делтоид, а во вториот е паралелограм

Втор случај. Нека $xy>6$. Ако $x\neq y$, тогаш

$$x^2+y^2>2xy+1=2(xy-6)+13>2(xy-6)\cos\alpha+13,$$

што противречи на (1).

Според тоа, $x=y\geq 3$. Нека $\measuredangle CBD=\beta, \measuredangle ABD=\gamma$ и $\measuredangle ADB=\delta$. Од синусната теорема следува, дека

$$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\frac{3}{\sin\gamma}\,.$$

Бидејќи $x\geq 3$, добиваме дека $\sin\beta\geq\sin\gamma$. Сега, од $\beta+\gamma<\pi$ следува дека $\beta\geq\gamma$. Од друга страна, од $\overline{AB}=2<3=\overline{AD}$ следува дека $\delta<\gamma$, па затоа

$$\pi-\alpha=\delta+\gamma<2\gamma\leq 2\beta=\pi-\alpha\,,$$

што е повторно противречност.

Трет случај. Нека $xy<6$. Од (1) следува, дека

$$-1<\frac{x^2+y^2-13}{2(xy-6)}<1$$

па затоа $|x-y|>1$ и $x+y<5$. Бидејќи $x,y\in\mathbb{N}$, добиваме дека $x=1, y=3$ или $x=3, y=1$. И во двата случаја од (1) добиваме, дека $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Ако $y=3$, тогаш $\measuredangle CAD=\measuredangle ACD$. Бидејќи $\measuredangle BAD=\measuredangle BCD$, добиваме, дека $\measuredangle BAC=\measuredangle BCA$, т.е. $\overline{AB}=\overline{BC}$, што е противречност.

Во случајот $x=3, y=1$ добиениот четириаголник $ABCD$ е конвексен. Треба да провериме, дека $\measuredangle ADC<180^\circ$ и $\measuredangle ABC<180^\circ$. Од косинусната теорема добиваме, дека $\overline{BD}=\sqrt{7}$. Според тоа, $\triangle ABD$ е остроаголен, а $\measuredangle BDC>90^\circ$. Оттука следува $\measuredangle ABC<180^\circ$. Исто така,

$$\frac{2}{\sin\measuredangle ADB}=\frac{3}{\sin\measuredangle BDC}$$

и затоа $\sin\measuredangle ADB<\sin\measuredangle BDC$. Бидејќи првиот агол е остар, а вториот е тап следува дека нивниот збир, т.е. мерниот број на $\measuredangle ADC$ е помал од 180°.

56. Најди го $\measuredangle CAD$ во четириаголникот $ABCD$, ако:

$$\measuredangle BAC=50^\circ,\ \measuredangle ABD=60^\circ,\ \measuredangle CBD=20^\circ,\ \measuredangle BDC=30^\circ.$$

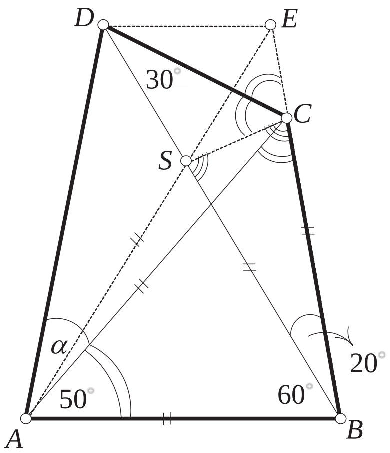
Решение. *Прв начин.* Од $\triangle ABC$ добиваме дека $\measuredangle ACB=50^\circ$. Значи, $\overline{AB}=\overline{BC}$. Повлекуваме AE така што $\measuredangle BAE=60^\circ$ (види цртеж 1), тогаш $\triangle ABS$ е рамнокрак, па имаме $\overline{AB}=\overline{AS}$, т.е. $\overline{BC}=\overline{BS}$, од каде што следува дека $\triangle CSB$ е рамнокрак, со агли при основата од 80°. Ќе докажеме дека $\triangle DSE$ е рамностран.

Од $\triangle BCD$ имаме: $\measuredangle BCD=130^\circ$; оттука $\measuredangle SCD=50^\circ$. Понатаму и $\measuredangle DCE=50^\circ$. Во $\triangle ABE$ имаме:

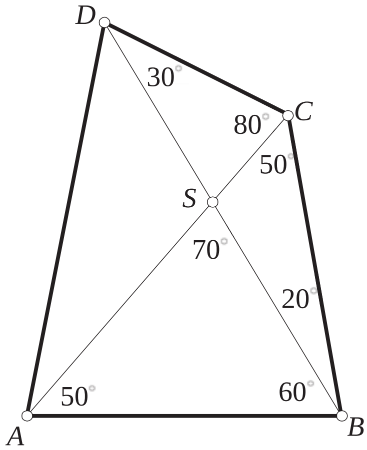
$$\measuredangle BEA=180^\circ-(60^\circ+80^\circ)=40^\circ,$$

а исто така и $\measuredangle ESC=40^\circ$. Значи, $\overline{EC}=\overline{SC}$, па следува дека $\triangle DCE\cong\triangle DCS$. Конечно, $\overline{DE}=\overline{DS}$, па како $\measuredangle DSE=60^\circ$ добиваме дека $\triangle DSE$ е рамностран. Од складноста на триаголниците ASD и BSD (САС) следува дека

$$\measuredangle SAD=\measuredangle SBE=20^\circ,$$



цртеж 1



цртеж 2

па бидејќи $\measuredangle CAE = 10^\circ$ заклучуваме дека $\measuredangle CAD = 30^\circ$.

Втор начин. Лесно утврдуваме дека: $\measuredangle ASB = 70^\circ$, $\measuredangle ACB = 50^\circ$, $\measuredangle DSC = 80^\circ$, (види цртеж 2). Со примена на синусната теорема за триаголниците ABC и BCD добиваме: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 50^\circ}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}$ од каде што следува

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\sin 80^\circ \sin 30^\circ}{\sin 50^\circ \sin 20^\circ}. \tag{1}$$

Слично, од $\triangle SCD$ добиваме

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CS}} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ}. \tag{2}$$

Ќе покажеме дека десните страни на (1) и (2) се еднакви, т.е. дека нивната разлика е еднаква на нула. Имаме:

$$\begin{aligned} R &= \sin 70^\circ \sin 20^\circ \sin 50^\circ - \sin^2 30^\circ \sin 80^\circ = \cos 20^\circ \sin 20^\circ \sin 50^\circ - \sin^2 30^\circ \sin 80^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}\sin 40^\circ \sin 50^\circ - \tfrac{1}{2}\sin 30^\circ \sin 80^\circ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 90^\circ) - \tfrac{1}{2}(\cos 50^\circ - \cos 110^\circ)) \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 10^\circ - \cos 50^\circ + \cos 110^\circ) = \tfrac{1}{4}(2\cos 60^\circ \cos 50^\circ - \cos 50^\circ) \\ &= \tfrac{1}{4}(2 \cdot \tfrac{1}{2}\cos 50^\circ - \cos 50^\circ) = 0 \end{aligned}$$

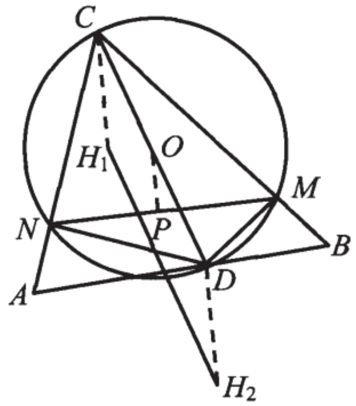
Тогаш од (1) и (2) следува

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}. \tag{3}$$

Триаголниците ACD и DCS имаат заеднички агол при темето C, па имајќи го предвид равенството (3) следува дека тие се слични, од каде што следува еднаквост на соодветните агли, т.е. $\measuredangle CAD = \measuredangle CDS = 30^\circ$.

57. Од точка D на страната AB на остроаголен $\triangle ABC$ се повлечени нормали кон страните BC и AC, чии подножја се точките M и N, соодветно. Ако H_1 и H_2 се соодветно ортоцентрите на $\triangle MNC$ и $\triangle MND$, докажи дека плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 не зависи од положбата на точката D на страната AB.

Решение. Од условот следува дека точките N, D, M, C лежат на кружница со дијаметар CD. Нека O е центарот на оваа кружница и нека P е неговата проекција на отсечката MN. Познато е дека во секој триаголник растојанието од било кое негово теме до ортоцентарот на триаголникот е два пати поголемо од растојанието од центарот на опишаната кружница до спротивното на тоа теме страна. Во конкретниот случај имаме $\overline{CH_1} = 2\overline{OP}$ и $\overline{DH_2} = 2\overline{OP}$, па затоа $\overline{CH_1} = \overline{DH_2}$. Понатаму, CH_1 и DH_2 се нормални на NM, па затоа $CH_1 \parallel DH_2$,



што заедно со $\overline{CH_1} = \overline{DH_2}$ повлекува дека четириаголникот CH_1H_2D е паралелограм. Затоа $\overline{H_1H_2} = \overline{CD}$. Ако означиме $\measuredangle ADC = \varphi$, тогаш $P_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} \sin\varphi$

од една, а од друга страна $P_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2}\overline{H_1H_2} \cdot \overline{AB}\sin\varphi$. Затоа,

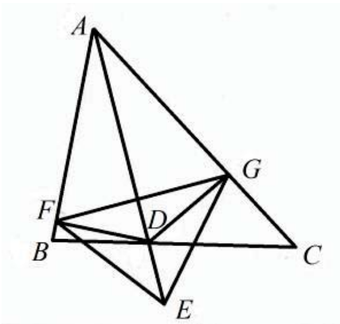
$$P_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2}\overline{H_1H_2} \cdot \overline{AB}\sin\varphi = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}\sin\varphi = P_{ABC},$$

што и требаше да се докаже.

58. Симетралата на аголот при темето A на остроаголниот $\triangle ABC$ ја сече страната BC во точка D, а опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ја сече во точка E различна од A. Нека F и G се подножјата на нормалите повлечени од точката D кон страните AB и AC, соодветно. Докажи, дека плоштината на четириаголникот $AEFG$ е еднаква на плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha$, каде $\alpha = \measuredangle BAC$. Понатаму, дијагоналите на четириаголникот $AFEG$ се заемно нормални па затоа неговата плоштина е еднаква на $\frac{1}{2}\overline{AE}\cdot\overline{FG}$. Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha = \overline{AE}\cdot\overline{FG}. \qquad (1)$$



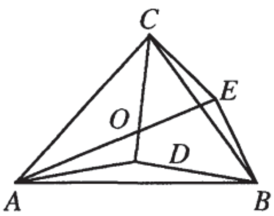
Сега, AD е симетрала на аголот при темето A, па затоа важи $\measuredangle CAD = \measuredangle EAB$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle AEB$, како периферни агли над иста тетива. Според тоа, $\triangle ACD \sim \triangle AEB$, од каде следува $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$, т.е.

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \overline{AD}\cdot\overline{AE}. \qquad (2)$$

Но, FG е тетива на кружница со дијаметар AD, над која лежи перифериски агол $\alpha = \measuredangle GAF$, па затоа $\overline{FG} = \overline{AD}\sin\alpha$. Конечно, ако (2) го помножиме со $\sin\alpha$ и го искористиме последното равенство го добиваме равенството (1).

59. Даден е триаголник ABC. Тоичките D и E лежат на симетралите на страните AB и BC, соодветно, при што D е внатрешна за $\triangle ABC$, а E е надворешна за $\triangle ABC$ и $\measuredangle ADB = \measuredangle CEB$. Ако AE ја сече отсечката CD во точка O докажи дека триаголникот ACO и четириаголникот $DBEO$ имаат еднакви плоштини.

Решение. Од сличноста на рамнокраките триаголници ABD и ABE следува $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}}$. Бидејќи $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$ добиваме дека $\triangle ABC$ е сличен со $\triangle DBE$ со коефициент на сличност $\frac{1}{2\cos\varphi}$ каде φ е аголот при основата на триаголниците ABD и CBE. Оттука $\measuredangle ACB = \measuredangle DEB = \gamma$.



Имаме

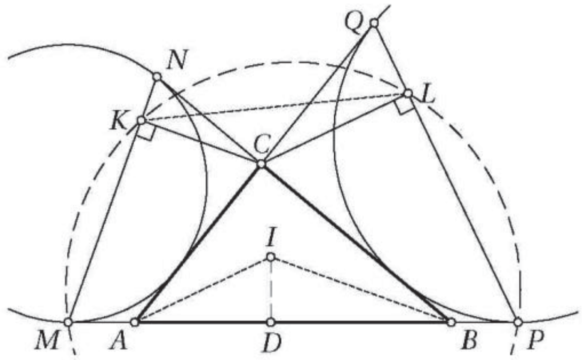
$$P_{ACE} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{CE}\sin(\varphi+\gamma) = \frac{1}{2}b\frac{a}{2\cos\varphi}\sin(\varphi+\gamma)$$

и

$$P_{EBDC} = \frac{1}{2}\overline{CB}\cdot\overline{DE}\sin(\varphi+\gamma) = \frac{1}{2}a\frac{b}{2\cos\varphi}\sin(\varphi+\gamma).$$

Конечно, од последните две равенства следува $P_{ACE} = P_{EBDC}$, од што следува тврдењето на задачата.

60. Во триаголник ABC припишаната кружница наспроти темето A ги допира правата AB во точката P и правата AC во точката Q, а припишаната кружница наспроти темето B ги допира правата AB во точката M и правата BC во точката N. Нека K и L соодветно се подножјата на нормалите повлечени од C кон правите MN и PQ. Докажи, дека четириаголникот $MKLP$ е тетивен.



Решение. Аглите на триаголникот да ги означиме со α, β, γ. Бидејќи $\measuredangle KMP = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, доволно е да докажеме дека $\measuredangle KLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

Нека I е центарот на вписаната кружница во триаголникот ABC и D е допирната точка на вписаната кружница со AB. Од $CK \parallel IB$ и $CL \parallel IA$ следува $\measuredangle KCL = \measuredangle AIB$. Понатаму, од $\overline{CN} = \overline{AD} = \frac{b+c-a}{2}$ и $\measuredangle KCN = \frac{\beta}{2}$ следува

$$\overline{CK} = \overline{CN}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AD}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Аналогно $\overline{CL} = \overline{BI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, па затоа $\frac{\overline{CK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}}$. Според тоа, триаголниците KCL и AIB имаат по две пропорционални страни и агол меѓу нив е еднаков, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\measuredangle KLC = \measuredangle ABI = \frac{\beta}{2}$, па затоа $\measuredangle KLP = \measuredangle KLC + \measuredangle CLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

6. РЕШАВАЊЕ НА МНОГУАГОЛНИК

1. Шестаголник $ABLCDK$ е вписан во кружница. Правата LK ги сече отсечките AD, BC, AC, BD соодветно во точките M, N, P, Q. Докажи, дека

$$\overline{NL}\cdot\overline{KP}\cdot\overline{MQ} = \overline{KM}\cdot\overline{PN}\cdot\overline{LQ}.$$

Решение. Да означиме

$$s = \sin\frac{AB}{2},\ t = \sin\frac{BL}{2},\ u = \sin\frac{LC+AK}{2},\ v = \sin\frac{CK}{2},\ w = \sin\frac{DK}{2},\ x = \sin\frac{LD+AK}{2},$$

(направи цртеж). Имаме

$$\frac{\overline{NL}\cdot\overline{KP}\cdot\overline{MQ}}{\overline{KM}\cdot\overline{PN}\cdot\overline{LQ}} = \frac{\overline{NL}}{\overline{NC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NP}}\cdot\frac{\overline{KP}}{\overline{AK}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{MQ}}{\overline{DQ}}\cdot\frac{\overline{DQ}}{\overline{LQ}} = \frac{t}{v}\cdot\frac{u}{s}\cdot\frac{v}{u}\cdot\frac{x}{w}\cdot\frac{s}{x}\cdot\frac{w}{t} = 1.$$

2. Даден е конвексен шестаголник. Секоја од трите прави кои ги поврзуваат средините на спротивните страни го дели шестаголникот на два дела со еднаква површина. Докажи дека трите прави се сечат во една точка.

Решение. Нека средините на страните AB, BC, CD, DE, EF и FA на шестаголникот се A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1, а пресечните точки на A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 соодветно со B_1E_1, C_1F_1 и A_1D_1 се K, L и M. без губење на општоста може да се претпостави дека $\overline{F_1K} < \overline{F_1L}$. Тогаш важи:

$$P_{AA_1K} = P_{BA_1K} = P_1, P_{BB_1K} = P_{CB_1K} = P_2, P_{CC_1K} = P_{DC_1K} = P_3,$$

$$P_{DD_1K} = P_{ED_1K} = P_4, P_{EE_1K} = P_{FE_1K} = P_5, P_{FF_1K} = P_{AF_1K} = P_6,$$

$$P_{AA_1D_1EF} = P_{A_1BCDD_1}$$

$$P_1 + 2P_6 + 2P_5 + P_4 = P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4$$

$$P_6 + P_5 = P_2 + P_3$$

$$P_{F_1KE_1F} = P_{B_1CC_1K} \tag{1}$$

аналогно и:

$$P_{B_1CC_1L} = P_{E_1FF_1L} \tag{2}.$$

Од (1) и (2) следува

$$P_{F_1KE_1F} = P_{B_1CC_1K} > P_{B_1CC_1L} = P_{E_1FF_1L} > P_{F_1KE_1F}$$

Значи, точките K и L мора да се совпаѓаат, т.е. правите се сечат во една точка.

3. Правилен шестаголник со плоштина H е впишан во конвексен многуаголник со плоштина P . Докажи, дека $P \le \frac{3H}{2}$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека правилниот шестаголник е $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и дожината на неговата страна е a. Да конструираме шест рамнострани триаголници $A_iA_{i+1}B_i$, $i = 1,2,3,4,5,6$, каде $A_7 \equiv A_1$, надворешни за шестаголникот. Тогаш за секој $i = 1,2,3,4,5,6$ постои права l_i која минува низ A_i, но не содржи внатрешни точки ниту на шестаголникот, нуту на опишаниот многуаголник. Со M_i , $i = 1,2,3,4,5,6$ да ја означиме пресечната точка на l_i и l_{i+1}, соодветно. Тогаш опишаниот многуаголник се содржи во многуаголникот $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$.

Точката M_i е внатрешна за $\triangle A_iA_{i+1}B_i$, па затоа $\alpha_i = \measuredangle M_iA_iA_{i+1} \le 60^\circ$. Имаме

$$P_{A_iA_{i+1}M_i} = \frac{a^2 \sin\alpha_i \sin(60^\circ - \alpha_{i+1})}{2\sin(\alpha_i + 60^\circ - \alpha_{i+1})} = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha_{i+1}))} \le \frac{a^2}{8}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})),$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha_i = 60^\circ - \alpha_{i+1}$. (Тука го искористивме неравенството $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \ge 4, x > 0, y > 0$.) Според тоа,

$$P \le P_{M_1M_2...M_6} = H + \sum_{i=1}^{6} P_{A_iA_{i+1}M_i} \le H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1}))$$

$$= H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_i)).$$

Но,

$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)} \ge \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \text{ , за } 0 \le \alpha \le 60^\circ ,$$

па затоа

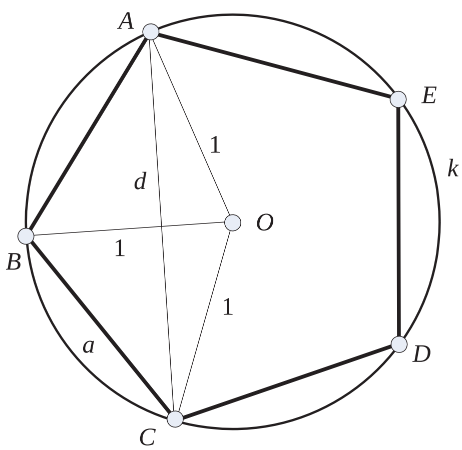
$$P \le H + \frac{a^2}{8} \cdot 6\,\mathrm{tg}\,60^\circ = H + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3H}{2},$$

со што е неравенството е докажано.

4. Ако конвексниот петаголник ги задоволува условите
1) Сите внатрешни агли се еднакви, и
2) Должините на сите страни се рационални броеви,
докажи, дека петаголникот е правилен.

Решение. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5$ е дадениот петаголник и нека $\overline{A_iA_{i+1}} = a_i$, $(A_6 = A_1)$. Должините на проекцијата на петаголникот на правата нормална на страната A_1A_2 е еднаква на $a_2\sin 72^\circ + a_3 \sin 36^\circ$, а исто така е еднаква и на $a_5 \sin 72^\circ + a_4 \sin 36^\circ$, па затоа $a_4 - a_3 = 2(a_2 - a_5)\cos 36^\circ$. Но, $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ е ирационален број, па затоа мора да важи $a_4 = a_3$. Аналогно се добива дека $a_4 = a_5 = a_1 = a_2$, што значи дека петаголникот е правилен.

5. Правилен петаголник е впишан во кружница со радиус 1. Докажи дека $a^2 + d^2 = 5$, каде d е должина на неговата дијагонала, а a е должината на неговата страна.



Решение. Нека петаголник $ABCDE$ е впишан во кружницата k со центар во O и радиус 1. Триаголникот AOB е рамнокрак со основа $\overline{AB} = a$, а триаголникот COA е рамнокрак со основа $\overline{AC} = d$. Краците на двата триаголници се еднакви на 1.

Аголот при врвот на триаголникот BOA е 72° а аголот при врвот на триаголникот COA е 144°. Од косинусната теорема за триаголниците BOA и COA имаме

$$a^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos 72^\circ = 2 - 2\cos 72^\circ,$$

$$d^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos 144^\circ = 2 + 2\cos 36^\circ.$$

Од последните две равенства имаме

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 &= 4 + 2(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ) = 4 + 4\sin 18^\circ \sin 54^\circ \\ &= 4 + 2\frac{2\cos 18^\circ \sin 18^\circ \sin 54^\circ}{\cos 18^\circ} \\ &= 4 + 2\frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = 4 + \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = 4 + 1 = 5. \end{aligned}$$

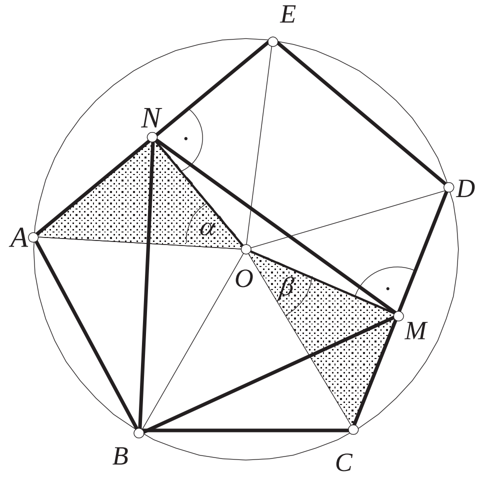
6. Во кружница со радиус R е впишан петаголник $ABCDE$, таков што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = R$. Точките M и N се средини на отсечките CD и EA, соодветно. Докажи дека триаголникот BMN е рамностран.

Решение. *Прв начин.* Очигледно е дека триаголниците ABO, BCO и DEO се рамнострани, а CDO и AEO се рамнокраки (види цртеж). Ќе докажеме дека $\triangle ANO \cong \triangle OMC$.

Нека $\measuredangle AOM = 2\alpha$, а $\triangle COD = 2\beta$. Тогаш за полниот агол со теме во O имаме:

$$2\alpha + 2\beta + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 360^\circ,$$

т.е. $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Значи, триаголниците ANO и OMC се правоаголни со еднакви хипотенузи и еднакви остри агли, па затоа тие се складни. Оттука:

$$\overline{CM} = \overline{ON}. \qquad (*)$$

Сега ќе докажеме дека $\triangle BCM \cong \triangle BON$. Имаме:

1) $\overline{BC} = \overline{BO} = R$
2) $\overline{CM} = \overline{ON}$, според $(*)$
3) $\measuredangle BCM = 60^\circ + 90^\circ - \beta = 60^\circ + \alpha = \measuredangle BON$,

Оттука: $\overline{BM} = \overline{BN}$, и $\measuredangle CBM = \measuredangle OBN = \phi$.

За триаголникот BMN да биде рамностран, треба уште да докажеме дека $\measuredangle MBN = 60^\circ$. Имаме:

$$\measuredangle MBN = \measuredangle OBN + \measuredangle CBO - \measuredangle CBM = \phi + 60^\circ - \phi = 60^\circ.$$

Значи, триаголникот BMN е рамностран.

Втор начин. Како и во претходното решение заклучуваме дека $\alpha + \beta = 90^\circ$. Тогаш: $\overline{OM} = R\cos\beta$, $\overline{ON} = R\cos\alpha$ и $\measuredangle MON = 150^\circ$. Според косинусната теорема за триаголниците MON, BOM и BON добиваме:

$$\begin{aligned}
\overline{MN}^2 &= R^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\beta - 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos150^\circ \\
&= R^2(\cos^2\alpha + \cos^2(90^\circ - \alpha) + 2\cos\alpha\cos(90^\circ - \alpha)\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= R^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= R^2(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha).
\end{aligned}$$

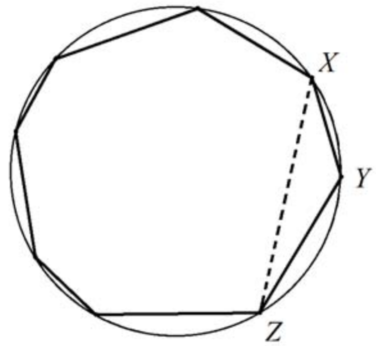
$$\begin{aligned}
\overline{MB}^2 &= R^2 + R^2\cos^2\beta - 2R^2\cos\beta\cos(60^\circ + \beta) \\
&= R^2(1 + \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos60^\circ\cos\beta + 2\cos\beta\sin60^\circ\sin\beta) \\
&= R^2(1 + \cos^2\beta - 2\cdot\tfrac{1}{2}\cos^2\beta + 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\cos\beta) \\
&= R^2(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\beta) = R^2(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(180^\circ - 2\alpha)) \\
&= R^2(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha).
\end{aligned}$$

$$\overline{MB}^2 = R^2 + R^2\cos^2\alpha - 2R^2\cos\alpha\cos(60^\circ+\alpha) = R^2(1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha).$$

Значи, $\overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NB}$, па $\triangle BMN$ е рамностран.

7. Нека $n \geq 3$ е природен број. Во кружница е впишан $n-$аголник $A_1A_2...A_n$. Докажи, дека постојат три темиња $A, B, C \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ за кои важи

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \geq \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + ... + \overline{A_iA_{i+1}}^2 + ... + \overline{A_nA_1}^2.$$



Решение. Ако $n=3$, тогаш тврдењето е тривијално. Нека $n \geq 4$. Секој конвексен $n-$аголник има барем еден внатрешен агол кој не е помал од 90°. Навистина, збирот на внатрешните агли на $n-$аголникот е еднаков на $(n-2)\cdot 180^\circ$, па затоа постои барем еден агол кој не е помал од

$$\tfrac{n-2}{n}\cdot 180^\circ = (1-\tfrac{2}{n})\cdot 180^\circ \geq (1-\tfrac{1}{2})\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Нека тоа е $\measuredangle XYZ$. Тогаш дадениот $n-$аголник со поврзување на темињата X и Z, т.е. со отфрлање на $\triangle XYZ$ можеме да го редуцираме на $(n-1)-$аголник. Тврдиме дека збирот на квадратите на страните на новодобиениот $(n-1)-$аголник не е помал од збирот на квадратите на страните на почетниот $n-$аголник. Навистина, бидејќи аголот при темето Y е поголем или еднаков од 90°, од косинусната теорема следува

$$\overline{XZ}^2 = \overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 - 2\overline{XY}\cdot\overline{YZ}\cos\measuredangle XYZ \geq \overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2.$$

Се додека е можно, со новодобиениот многуаголник ја повторуваме постапката, притоа исфрлајќи едно теме со агол поголем или еднаков на 90°, се додека не добиеме триаголник ABC. Неговите темиња A, B, C го задоволуваат неравенството на задачата.

8. Определи го најголемиот реален број a со својство: постои конвексен шестаголник $ABCDEF$ чии страни се со должина 1 и точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 во внатрешноста на $ABCDEF$, за кои секоја од отсечките $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$ и FF_1 има должина a и никои две од тие отсечки немаат заедничка точка која е внатрешна и за двете отсечки.

Решение. Да ги разгледаме збировите

$$\measuredangle A_1AB + \measuredangle B_1BA,\ \measuredangle B_1BC + \measuredangle C_1CB,\ \measuredangle C_1CD + \measuredangle D_1DC,$$
$$\measuredangle D_1DE + \measuredangle E_1ED,\ \measuredangle E_1EF + \measuredangle F_1FE \text{ и } \measuredangle F_1FA + \measuredangle A_1AF.$$

Бидејќи збирот на аглите во шестаголник е 720°, заклучуваме дека барем еден од овие шест збирови е помал или еднаков на 120°. Без ограничување наопштоста можеме да земеме дека $\measuredangle A_1AB + \measuredangle B_1BA \leq 120^\circ$. Тогаш правите AA_1 и BB_1 се сечат во точка X која е во иста полурамнина со шестаголникот $ABCDEF$ во однсо на правата AB и $\measuredangle AXB \geq 60^\circ$. Бидејќи отсечките AA_1 и BB_1 немаат заедничка внатрешна точка, добиваме дека барем една од отсечките AX и BX има должина поголема или еднаква на a. Од друга страна, секоја од тие отсечки има должина помала или еднаква на дијаметарот на кружницата, од која отсечката AB се гледа под агол 60°. Затоа, дијаметарот на кружницата е еднаков на $\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, што значи дека $a\le\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Да разгледаме правилен шестаголник $ABCDEF$. Нека

$$A_1=AF\cap FD,\ B_1=BF\cap AE,\ C_1=CA\cap BF,$$

$$D_1=DB\cap AC,\ E_1=EC\cap DB \text{ и } F_1=FD\cap EC.$$

Отсечките $AA_1, BB_1, CC_1,\ DD_1, EE_1$ и FF_1 имаат еднакви должини и никои две од нив немаат заедничка внатрешна точка. Бидејќи $\measuredangle FAA_1=120^\circ-90^\circ=30^\circ$, од $\triangle FAA_1$ добиваме $\overline{AA_1}=\frac{1}{\cos 30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Според тоа, бараната најголема вредност е $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

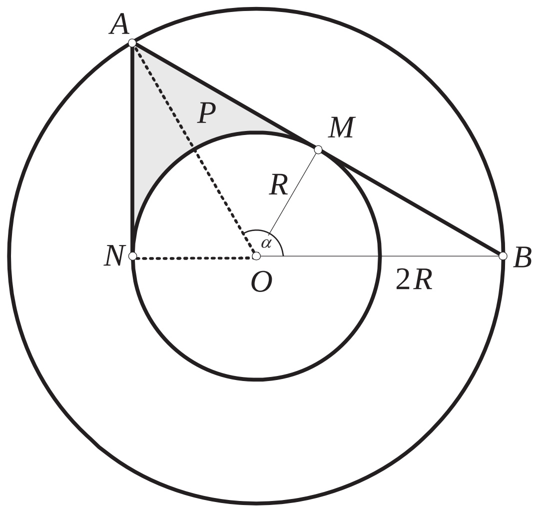
7. РЕШАВАЊЕ НА КРУЖНИЦА И КРУГ

1. Дадени се две концентрични кружници со центар O и радиуси R и $2R$. Тетивата повлечена во произволна точка M на внатрешната кружница ја сече надворешната кружница во точките A и B. Од точката A е повлечена тангента AN кон внатрешната кружница, каде N е допирната точка. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со тетивите AN и AM и лакот MN.

Решение. Триаголниците OAN и OAM се правоаголни со заедничка хипотенуза AO и катети $\overline{ON}=\overline{OM}$ па затоа тие се складни (види цртеж). Понатаму,

$$\overline{AN}=\overline{AM}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{ON}^2}$$

$$=\sqrt{(2R)^2-R^2}=R\sqrt{3}.$$



Од друга страна $\sin\measuredangle AON=\frac{\sqrt{3}}{2}$, што значи $\measuredangle AON=\frac{\pi}{3}$. Конечно, бараната плоштина е

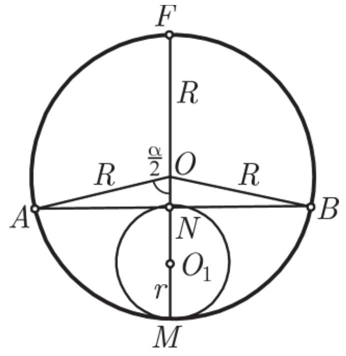
$$P=2\left(\frac{R\sqrt{3}\cdot R}{2}-\frac{R^2\frac{\pi}{3}}{2}\right)=\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi).$$

2. Во кружница со радиус R, определи го централниот агол на кој му соодветствува кружен отсечок со следново својство: тетивата на отсечокот е еднаква на периметарот на кружницата со најголем радиус која е впишана во него.

Решение. Нека AMB е бараниот кружен отсечок и нека $\measuredangle AOB = \alpha$. Јасно е дека $\measuredangle AOM = \frac{\alpha}{2}$. Од степен на точка во однос на кружница имаме

$$\overline{MN} \cdot \overline{NF} = \overline{AN} \cdot \overline{NB}. \qquad (1)$$

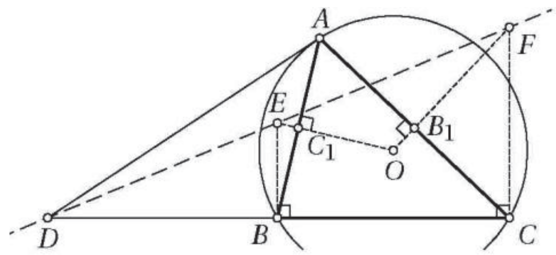
Нека r е радиусот на кружницата која што е впишана во отсечокот. Тогаш $l = 2r\pi$, $\overline{AN} = \overline{NB} = \pi r$ и $\overline{MN} = 2r$, $\overline{NF} = 2R - 2r$. Бидејќи $\frac{\pi r}{R} = \sin\frac{\alpha}{2}$, добиваме $R = \frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Според тоа, $\overline{NF} = 2\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 2r = 2r(\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1)$.



Ако замениме во (1), добиваме $\pi^2 r^2 = 4r^2(\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1)$, т.е. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4\pi}{4+\pi^2}$. Конечно, $\alpha = 2\arcsin\frac{4\pi}{4+\pi^2}$.

3. Нека ABC е триаголник таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Нека D е пресечната точка на тангентата на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката A и правата BC. Нека E и F се точки соодветно на симетралите на отсечките AB и AC такви што BE и CF се нормални на BC. Докажи дека точките D, E и F се колинеарни.

Решение. Доволно е да се докаже дека $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$. Нека B_1 и C_1 се соодветно средините на страните AC и AB. Од сличноста на триаголниците DBA и DAC следува



$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

па затоа $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. Од друга страна, имаме $\overline{BE} = \frac{\overline{BC_1}}{\cos\measuredangle ABE} = \frac{\overline{AB}}{2\sin\measuredangle ABC}$ и, слично, $\overline{CF} = \frac{\overline{AC}}{2\sin\measuredangle ACB}$. Според тоа, $\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}\sin\measuredangle ACB}{\overline{AC}\sin\measuredangle ABC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

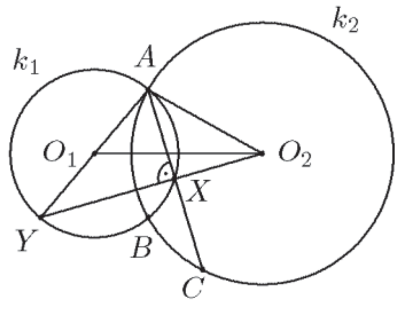
4. Две кружници k_1 и k_2 соодветно со центри O_1 и O_2 и радиуси 1 и $\sqrt{2}$ се сечат во точките A и B, при што $\overline{O_2O_1} = 2$. Нека AC е тетива во k_2 чија средина лежи на k_1. Определи ја должината на AC.

Решение. Средината на AC да ја означиме со X, а пресечната точка на O_2X и k_1 со Y. Тогаш $O_2X \perp AC$ и затоа AY е дијаметар на k_1, т.е. $O_1 \in AY$. Значи, O_2O_1 е тежишна линија во $\triangle YO_2A$, па затоа

$$16 = 4\overline{O_1O_2}^2 = 2\overline{O_2A}^2 + 2\overline{O_2Y}^2 - \overline{YA}^2 = 2\overline{O_2Y}^2,$$

т.е. $\overline{O_2Y} = 2\sqrt{2}$. Останува да ја пресметаме висината во $\triangle YO_2A$. Бидејќи

$$\cos\measuredangle YO_2A = \frac{2^2 + \sqrt{2}^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$



добиваме

$$\sin\measuredangle YO_2A=\sqrt{1-\cos^2\measuredangle YO_2A}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Сега, од равенството

$$2P_{YAO_2}=\overline{AY}\cdot\overline{AO_2}\sin\measuredangle YAO_2=\overline{AX}\cdot\overline{YO_2}$$

добиваме $\overline{AX}=\frac{\sqrt{14}}{4}$, па затоа $\overline{AC}=2\overline{AX}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

5. Во кружница со радиус $\sqrt{21}$ се повлечени три меѓусебе еднакви тетиви, кои со своите пресеци се поделени на три еднакви дела.Пресметај ја должината на тие тетиви.

Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=3t$, тогаш $\overline{EM}=\overline{CM}=2t$. Триаголникот PQM е рамностран (види цртеж) па следува дека $\measuredangle EMD=120^\circ$. Со примена на косинусната теорема за $\triangle EMD$ добиваме:

$$\overline{ED}^2=\overline{EM}^2+\overline{DM}^2-2\overline{EM}\cdot\overline{DM}\cdot\cos120^\circ=7t^2$$

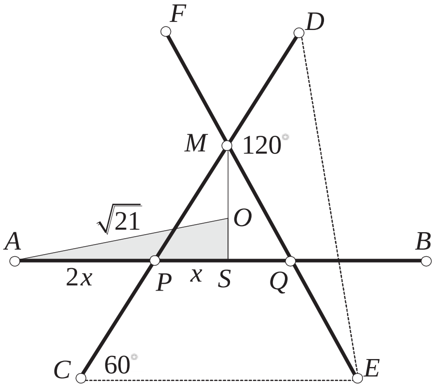
Според синусната теорема, пак, за $\triangle CED$ имаме:

$$\overline{ED}=2R\sin60^\circ=2\sqrt{21}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{63}$$

Тогаш од $7t^2=63$ добиваме

$$t=3;\ \overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=9.$$

Значи, секоја тетива е еднаква на 9.



6. Нека k е кружница со дијаметар AB и t е тангентата на k во точката A. Нека $P\in k$ и N е ортогоналната проекција на точката P на правата t. Определи го $\measuredangle ABP$ за кои изразот $\overline{PN}+\overline{PB}$ има најголема можна вредност.

Решение. Да означиме $\overline{AB}=2R$ и $\measuredangle ABP=\varphi$. Тогаш триаголникот ABP е правоаголен и важи

$$\overline{PB}=2R\cos\varphi \text{ и } \overline{PA}=2R\sin\varphi.$$

Понатаму,

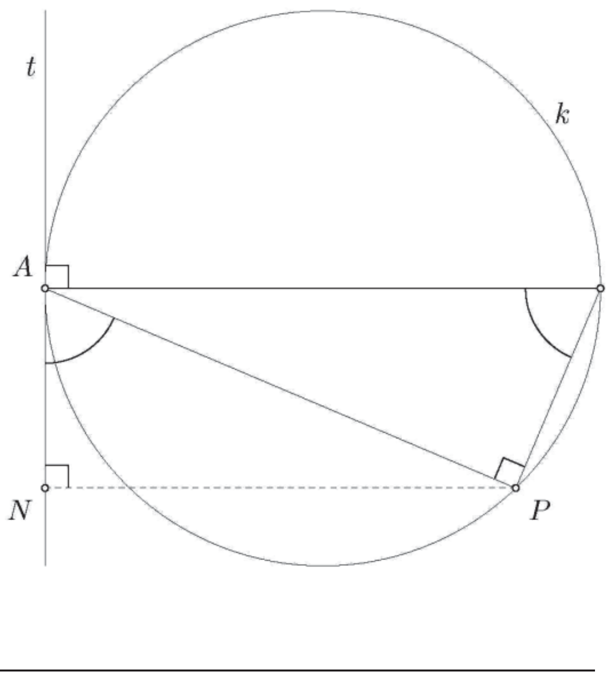
$$\measuredangle PAN=90^\circ-\measuredangle PAB$$
$$=\measuredangle PBA=\varphi$$

па затоа

$$\overline{PN}=\overline{PA}\sin\measuredangle PAN$$
$$=2R\sin\varphi\sin\varphi$$
$$=2R\sin^2\varphi$$

Ја бараме најголемата можна вредност на изразот

$$\overline{PN}+\overline{PB}=2R\cos\varphi+2R\sin^2\varphi$$
$$=2R(1+\cos\varphi-\cos^2\varphi).$$



Последната функција е квадратна по променлива $\cos\varphi \in [-1,1]$ и нејзиниот максимум се достигнува во темето на параболата, т.е. за $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Според тоа, бараниот агол е $\varphi = 60^\circ$.

6. Во кружница со радиус r се повлечени две тетиви: $\overline{AB} = m$ и $\overline{AC} = n$, при што $m^2 + n^2 = 4r^2$. Пресметај ја должината на тетивата BC.

Решение. *Прв начин.* Ако $m = n$, тогаш $m = \sqrt{2}\,r$. Тетивите AB и AC се страни на впишан квадрат, а оттука $\overline{BC} = 2r$.

Нека $m < n$. Ја конструираме прво тетивата AC, тогаш помалата тетива можеме да ја нанесеме на двете страни од на AC, т.е. добиваме $\overline{AB}$ и $\overline{AB_1}$, (види цртеж 1). Едно решение е очигледно: ако $AB \perp AC$, тогаш

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = m^2 + n^2 = 4r^2,\ \overline{BC} = 2r.$$

Второто решение го добиваме од $\triangle AB_1C$. Очигледно

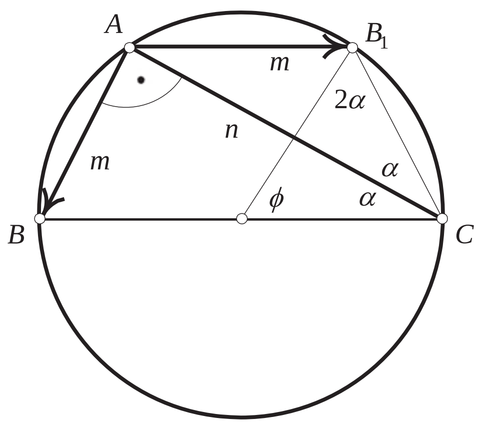
$$\overrightarrow{B_1C}^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB_1})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB_1}^2 - 2\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OC} = 2r^2 - 2r^2\cos\phi$$

Понатаму, од рамнокракиот ΔB_1OC следува дека $\phi = 180^\circ - 4\alpha$; тогаш

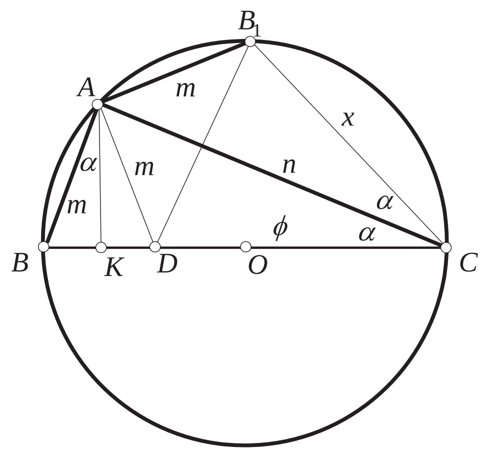
$$\overrightarrow{B_1C}^2 = 2r^2 + 2r^2\cos 4\phi = 2r^2(1+\cos 4\phi) = 4r^2\cos^2 2\alpha$$

$$= 4r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 = 4r^2\left(\frac{n^2}{4r^2} - \frac{m^2}{4r^2}\right)^2 = \frac{(n^2-m^2)^2}{4r^2}$$

Следствено, $\overline{B_1C} = \frac{n^2-m^2}{2r}$.



цртеж 1



цртеж 2

Втор начин. Нека $\overline{BC} = x$ (види цртеж 2). По косинусната теорема за $\triangle AB_1C$ добиваме

$$m^2 = x^2 + n^2 - 2xn\cos\alpha. \tag{1}$$

Потоа од правоаголниот триаголник ABC наоѓаме

$$\cos\alpha = \frac{n}{2r} \tag{2}$$

Со замена на (2) во (1) добиваме квадратна равенка по x

$$rx^2 - n^2x + n^2r - m^2r = 0,$$

чија дискримананта е:

$$D = n^4 - 4r^2(n^2 - m^2) = n^4 - (n^2 + m^2)(n^2 - m^2) = m^4,$$

а решенија се $x_1 = \frac{m^2+n^2}{2r} = 2r$; $x_2 = \frac{n^2-m^2}{2r}$.

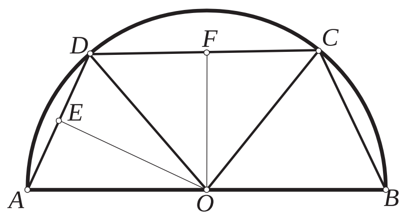
Трет начин. Првото решение $\overline{B_1C} = 2r$ е очигледно. Да го одредиме второто решение. Повлекуваме $B_1D \perp AC$ и $AK \perp BC$ (види цртеж 2).

Нека $\overline{B_1C} = x$, тогаш $\overline{DC} = x$, $\overline{AD} = m$, $\overline{BK} = \overline{KD} = \frac{m^2}{2r}$, а оттука

$$x = \overline{DC} = 2r - 2\frac{m^2}{2r} = \frac{4r^2-2m^2}{2r} = \frac{m^2+n^2-2m^2}{2r} = \frac{n^2-m^2}{2r} \text{ (за } n > m\text{)}.$$

8. Полукружница со избор на две точки на неа е разделена на три дела, така што должините на тетивите, на секој од деловите, се однесуваат како $1:2:1$. Определи ја местоположбата на двете точки.

Решение. Нека избраните точки се D и C (види цртеж), и ако воведеме ознаки $\overline{AD} = a$, $\overline{DC} = b$ и $\overline{CB} = c$, тогаш од условот на задачата имаме $a:b:c = 1:2:1$. Отсечките OE и OF се висини во триаголниците AOD и DOC соодветно. Ако воведеме ознаки $\measuredangle AOD = x$ и $\measuredangle DOC = \varphi$, тогаш



$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} \text{ и } \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{b}{2R}.$$

Бидејќи $a:b = 1:2$, добиваме $\sin\frac{x}{2} : \sin\frac{\varphi}{2} = a:b = 1:2$,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{x}{2}. \qquad (1)$$

Од условот на задачата $\measuredangle AOB = \measuredangle COB = x$, па според тоа

$$\pi = \measuredangle AOD + \measuredangle DOC + \measuredangle COB = x + \varphi + x = 2x + \varphi,$$

т.е. $\varphi = \pi - 2x$. Од равенството (1) и последното равенство, добиваме

$$2\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\pi-2x}{2} = \cos x \quad . \qquad (2)$$

Од идентитетот $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и равенството (2), добиваме

$$2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0 \ .$$

Ако воведеме смена $\sin\frac{x}{2} = t$, ја добиваме квадратната равенка

$$2t^2 + 2t - 1 = 0 \ ,$$

чии решенија се $t_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Значи,

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Конечно, $x = 2\arcsin(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12})$, $\varphi = 4\arcsin(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12})$.

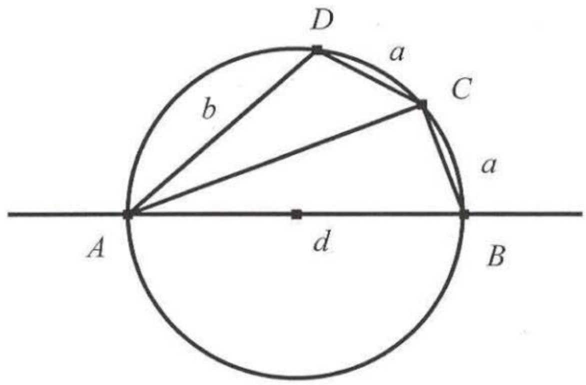
9. На полукружница со дијаметар со должина $\overline{AB}=d$ дадени се точки C и D такви да важи $\overline{BC}=\overline{CD}=a$ и $\overline{DA}=b$, каде a,b и d се различни природни броеви. Определи ја најмалата можна вредност на бројот d.

Решение. Јасно е дека $a,b<d$. Од $\overline{BC}=\overline{CD}$ следува $\measuredangle BAC=\measuredangle CAD=\theta$. Понатаму, триаголникот ADB е правоаголен, па важи $\overline{AD}=b=d\cos 2\theta$. Слично, од правоаголниот триаголник ABC добиваме $\overline{BC}=a=d\sin\theta$. Користејќи го идентитетот

$$\cos 2\theta = 1-\sin^2\theta$$

добиваме

$$\frac{b}{d}=1-2\frac{a^2}{d^2}\text{, т.е. } bd+2a^2=d^2.$$



Ќе докажеме дека d не може да биде прост број. Во спротивно, од последното равенство следува $d\,|\,2a^2$ и како според условот на задачата $d>2$ добиваме $d\,|\,a^2$. Но, d е прост број, па затоа $d\,|\,a$, што не е можно бидејќи $a<d$.

Ако $d=2p$, каде p е прост број, добиваме $bp+a^2=2p^2$. Сега $p\,|\,a^2$, т.е. $p\,|\,a$, па затоа $p=a$ (следува од $a<d=2p$). Меѓутоа, тогаш и $b=p$, што противречи на условот $a\neq b$.

Првиот број кој не е прост и не е од видот $2p$, каде p е прост број е бројот 8. За $d=8$ добиваме $8b+2a^2=64$, т.е. $4b+a^2=32$. Според тоа, бројот a е парен и како $b>0$ добиваме дека може да биде $a=2$ или $a=4$. За $a=2$ добиваме $b=7$, а додека за $a=4$ добиваме $b=4$, што според условот на задачата не е можно.

Конечно, најмалата можна вредност на бројот d е 8.

10. Кружница со радиус R_1 е впишана во остар агол α. Друга кружница со радиус R_2 го допира едниот од краците на аголот α во истата точка како и првата кружница и го сече другиот крак на тој агол во точките A и B, а притоа центрите на двете кружници лежат внатре во аголот α. Докажи, дека

$$\overline{AB}=4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2-R_1)(R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}+R_2\sin^2\frac{\alpha}{2})}.$$

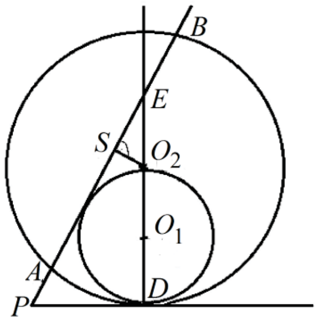
Решение. Нека O_1 и O_2 се центрите на првата и втората кружница, точката P е теме на дадениот агол, т.е. $\measuredangle APD=\alpha$, D е допирната точка на кружниците, E е пресекот на правите O_1O_2 и AB, а S е средината на отсечката AB (види цртеж).

Очигледно $\measuredangle SO_2E=\alpha$, како агли со нормални краци, па затоа

$$\overline{O_2S}=\overline{O_2E}\cos\alpha \qquad (1)$$

Точката O_1 лежи на симетралата на $\measuredangle APD$, па затоа

$$\overline{PD} = R_1 \operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}\,. \qquad (2)$$



Во $\triangle EPD$ важи

$$\overline{DE} = \overline{PD}\operatorname{tg}\alpha \overset{(2)}{=} R_1 \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2R_1}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\,. \qquad (3)$$

Од (3) следува

$$\overline{O_2E} = \overline{DE} - \overline{O_2D} = \frac{2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} - R_2 = \frac{2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2} - R_2\cos\alpha}{\cos\alpha}\,,$$

па заради (1) добиваме

$$\overline{O_2S} = \overline{O_2E}\cos\alpha = 2R_1\cos^2\tfrac{\alpha}{2} - R_2\cos\alpha\,. \qquad (4)$$

Од правоаголниот $\triangle AO_2S$ и (4) добиваме

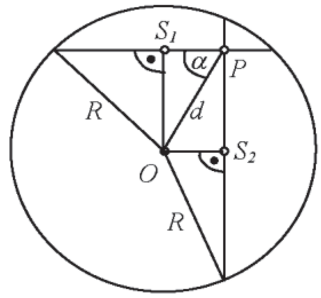
$$\overline{AS}^2 = \overline{AO_2}^2 - \overline{O_2S}^2, \text{ т.е. } \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2 = R_2^2 - \overline{O_2S}^2 = R_2^2 - (2R_1\cos^2\tfrac{\alpha}{2} - R_2\cos\alpha)^2$$

од каде после средувањето наоѓаме

$$\overline{AB} = 4\cos\tfrac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2 - R_1)(R_1\cos^2\tfrac{\alpha}{2} + R_2\sin^2\tfrac{\alpha}{2})}\,.$$

11. Точката P лежи во внатрешноста на кружницата k. Низ P повлекуваме две заемно нормални тетиви. Во која положба збирот од должините на овие тетиви е најмал, аво која е најголем и колкави се екстремните вредности, ако радиусот на кружницата е R, а растојанието од точката P до центарот на кружницата е d ($0 < d < R$)?

Решение. Нека O е центар на дадената кружница, нека α, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ е аголот меѓу OP и тетивата со должина $t_1(\alpha)$, нека долината на втората тетива е $t_2(\alpha)$, нека S_1 и S_2 се средините на тетивите соодветно, и нека $S(\alpha) = t_1(\alpha) + t_2(\alpha)$. Тогаш,



$$\frac{t_1(\alpha)}{2} = \sqrt{R^2 - \overline{OS_1}^2}\,,\quad \frac{t_2(\alpha)}{2} = \sqrt{R^2 - \overline{OS_2}^2}$$

и бидејќи $\overline{OS_1} = d\sin\alpha$, $\overline{OS_2} = d\cos\alpha$, добиваме дека

$$S(\alpha) = 2(\sqrt{R^2 - d^2\sin^2\alpha} + \sqrt{R^2 - d^2\cos^2\alpha}\,),$$

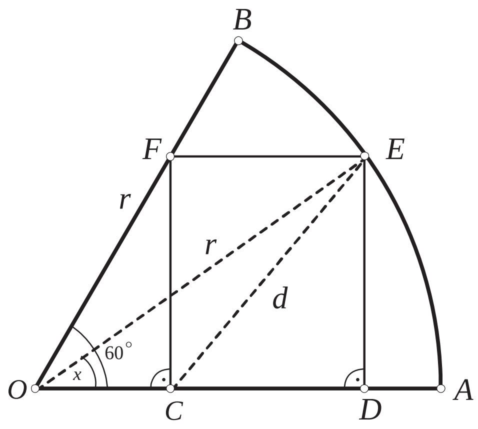
односно

$$(S(\alpha))^2 = 4(2R^2 - d^2 + 2\sqrt{R^4 - R^2d^2 + \tfrac{d^4}{4}\sin^2 2\alpha}\,).$$

Овој израз достигнува најмала вредност, кога $\sin 2\alpha = 0$, односно кога $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, т.е. кога една од тетивите минува низ центарот на кружницата и тогаш збирот на тетивите е $S(\alpha) = 2(R + \sqrt{R^2 - d^2})$. Овој израз достигнува најголема вредност, кога $\sin 2\alpha = 1$, односно кога $\alpha = \frac{\pi}{4}$, т.е. кога тетивите формираат агол $\frac{\pi}{4}$ со OP и тогаш збирот на тетивите изнесува $S(\alpha) = 4\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{2}}$.

12. Во кружен исечок OAB со централен агол 60° и радиус r да се впише правоаголник со дијагонала d и една негова страна да лежи на OA.

Решение. Нека е $CDEF$ бараниот правоаголник вписан во кружниот исечок и нека точката E е на лакот AB, (цртеж десно). Да означиме $\angle AOE = x$. Од косинусната теорема применета на ΔEOC добиваме



$$d^2 = r^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OC}r\cos x. \qquad (1)$$

Понатаму, $\overline{OC} = r\sin x \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{3}\sin x$ и ако замениме во (1) последователно добиваме

$$d^2 = r^2 + \frac{r^2}{3}\sin^2 x - \frac{2\sqrt{3}r^2}{3}\sin x\cos x,$$

$$d^2(\sin^2 x + \cos^2 x) = r^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{r^2}{3}\sin^2 x - \frac{2\sqrt{3}r^2}{3}\sin x\cos x,$$

$$(d^2 - r^2 - \frac{r^2}{3})\sin^2 x + \frac{2\sqrt{3}r^2}{3}\sin x\cos x + (d^2 - r^2)\cos^2 x = 0,$$

$$(4r^2 - 3d^2)\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}r^2\operatorname{tg}x + 3r^2 - 3d^2 = 0. \qquad (2)$$

Од $x \in (0, \frac{\pi}{3})$, следува $\operatorname{tg}x \in (0, \sqrt{3})$. Да означиме

$$f(t) = (4r^2 - 3d^2)t^2 + 2\sqrt{3}r^2 t + 3r^2 - 3d^2.$$

а) Равенката (2) има едно само решение ако $f(0)f(\sqrt{3}) < 0$, односно ако $(3r^2 - 3d^2)(3r^2 - 4d^2) < 0$, од што следува дека $\frac{r\sqrt{3}}{2} < d < r$.

б) Равенката (2) иа две решенија ако се исполнети условите

i) $D = 12r^4 - 4(4r^2 - 3d^2)(3r^2 - 3d^2) \ge 0$, т.е. $r \cdot \sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{6}} \le d \le r \cdot \sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{6}}$,

ii) $(4r^2 - 3d^2)f(0) = (4r^2 - 3d^2)(3r^2 - 3d^2) > 0$, т.е. $d < r$ или $d > \frac{2r}{\sqrt{3}}$,

iii) $(4r^2 - 3d^2)f(\sqrt{3}) = (4r^2 - 3d^2)(9r^2 - 12d^2) > 0$ т.е. $d < \frac{r\sqrt{3}}{2}$ или $d > \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, и

iv) $0 < \frac{t_1+t_2}{2} < \sqrt{3}$, т.е. $0 < \frac{\sqrt{3}r^2}{4r^2-3d^2} < \sqrt{3}$, што значи $d < r$.

Од *i*)-*iv*) наоѓаме дека равенката (2) има две решенија за

$$r \cdot \sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{6}} \le d < \frac{r\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

И во двата случаи, решавајќи ја равенката (2) прво го определуваме аголот x, а потоа го коструираме бараниот правоаголник.

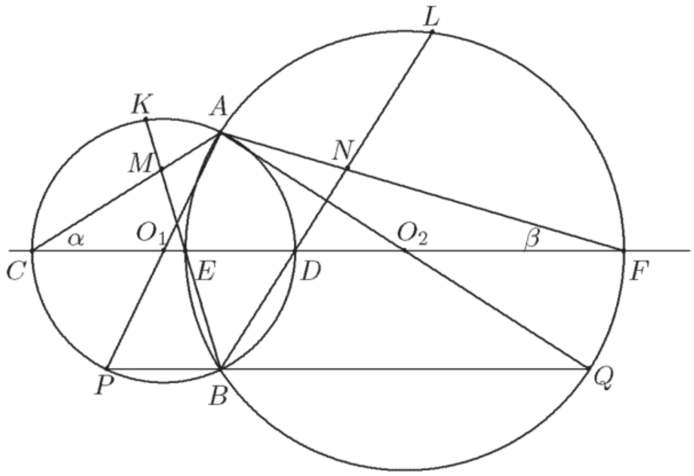
13. Дадени се кружниците $c_1(O_1, r_1)$ и $c_2(O_2, r_2)$, кои се сечат во точките A и B, при што $r_2 > r_1$ и $\measuredangle O_1AO_2 = 90^\circ$. Правата O_1O_2 ја сече c_1 во точките C и D, а c_2 ја сече во точките E и F (E е меѓу C и D, а D е меѓу E и F). Правата BE ги сече кружницата c_1 во точката K и правата AC во точката M, а правата BD ги сече кружницата c_2 во точката L и правата AF во точката N. Докажи, дека $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}$.

Решение. Нека $P = AO_1 \cap c_1$, $Q = AO_2 \cap c_2$, $\measuredangle ACO_1 = \alpha$ и $\measuredangle AFO_2 = \beta$. Тогаш $\measuredangle AFL = \measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \alpha$ и аналогно $\measuredangle ACK = \beta$. Од друга страна

$$\measuredangle APB = 2\alpha \text{ и } \measuredangle AQB = 2\beta .$$

Сега од $\triangle MKC$ и $\triangle CKE$ соодветно добиваме, дека

$$\overline{KM} = \frac{\overline{CK}\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)} \text{ и } \overline{KE} = \frac{\overline{CK}\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} .$$



Според тоа, $\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta\cos\beta}$ и аналогно $\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. Од последните две равенства следува $\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$. Останува да забележиме, дека $\measuredangle ABP = \measuredangle ABQ = 90^\circ$ и значи $\frac{\overline{AB}}{2r_1} = \sin 2\alpha, \frac{\overline{AB}}{2r_2} = \sin 2\beta$. Според тоа,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}} .$$

14. Две кружници со радиуси R и r, $r < R$ се допираат од внатрешната страна. Најдете ја страната на рамностраниот триаголник ако се знае дека едно негово теме е допирната точка на кружницата, а другите две темиња лежат на кружніците, по едно на секоја.

Решение. Бидејќи кружниците се допираат, допирната точка и нивните центри лежат на една иста права. Имаме $\measuredangle ACD = \measuredangle ABE = 90^\circ$. Ќе разгледаме два случаи:

$i)$ бараниот триаголник ABC е на една страна од дијаметарот (направи цртеж). Имаме,

$$\overline{AD} = 2r,\ \overline{AE} = 2R,\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{a}{2R} = \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{3}),\ \frac{a}{2r} = \cos\alpha .$$

Значи,

$$\frac{a}{2R} = \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\tfrac{a}{2r} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \tfrac{a^2}{4r^2}},\ 0 < \alpha < 90^\circ .$$

Бидејќи, $2r < R$ добиваме

$$\frac{a}{4r}-\frac{a}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}\ ,$$

односно

$$a=\frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{R^2-Rr+r^2}}\ . \qquad (1)$$

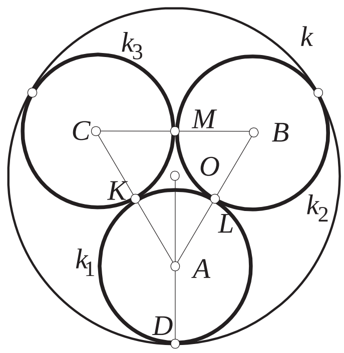
ii) бараниот триаголник ABC е поделен од дијаметарот (направи цртеж). Сега $\alpha+\beta=60^\circ$, $\frac{a}{2R}=\cos\beta$, $\frac{a}{2r}=\cos\alpha$. Значи,

$$\frac{a}{2R}=\cos(\tfrac{\pi}{3}-\alpha)=\tfrac{1}{2}\cos\alpha+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\tfrac{1}{2}\tfrac{a}{2r}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}\ ,\ 0<\alpha<90^\circ .$$

Од $2r>R$ го добиваме (1).

15. Во кругот k кој има радиус R впишани се три кружници ($k_1,\ k_2$ и k_3) кои имаат еднакви радиуси, ја допираат кружницата k и се допираат помеѓу себе. Да се пресмета плоштината на криволиниската фигура која е заградена со помалите кружни лаци од кружинците k_1,k_2 и k_3, а се ограничени со нивните допирни точки.

Решение. Центрите на две впишани кружници и нивната допирна точка се колинеарни, како и центарот на кружницата k, центарот на кружницата k_i и нејзината допирна точка со кружницата k, за $i=1,2,3$ (види цртеж).



Нека A,B,C се центри на вписаните кружници k_1,k_2,k_3 соодветно, а точките K,L,M се допирни точки на кружниците k_1 и k_3, k_1 и k_2, k_2 и k_3 соодветно. Нека r е должината на радиусот на вписаните кружници. Тогаш $\overline{AB}=2r,\overline{BC}=2r$ и $\overline{CA}=2r$, односно триаголникот ABC е рамностран. Бидејќи $\measuredangle ABC=\measuredangle BCA=\measuredangle CAB=60^\circ$, и вписаните кружници имаат еднакви радиуси, па според тоа кружните исечоци ALK, BML и CMK имаат еднакви плоштини. Доволно е да се пресмета плоштината на триаголникот ABC и плоштината на еден од кружните исечоци. Затоа ќе го пресметаме радиусот на вписаните кружници.

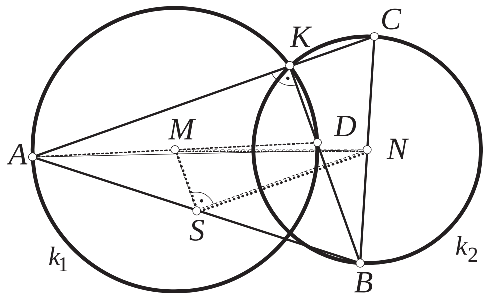
Нека O е центар на кружницата k, A е центар на кружницата k_1 и D е нивната допирна точка (види цртеж). Ако R е радиусот на вписаната кружница, тогаш $\overline{OA}=R-r$. Од правоаголниот триаголник OKA во кој аглите се еднакви на 30° и 60°, имаме $\frac{\overline{AK}}{\overline{OA}}=\cos 30^\circ$, т.е. $\frac{r}{R-r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, од каде добиваме $r=R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

Плоштината на рамностраниот триаголник е $P=\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}=r^2\sqrt{3}$, а плоштината на еден кружен исечок е $S=\frac{1}{6}r^2\sqrt{3}$. Според тоа плоштината на бараната фигура е еднаков на

$$Q=P-S=r^2(\sqrt{3}-\tfrac{\pi}{2})=3R^2(2-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}-\tfrac{\pi}{2})\ .$$

16. Нека K е пресечна точка на две кружници со центри M и N. Точките A и B лежат на првата и на втората кружница, соодветно и $\measuredangle AKB = 90^\circ$. Докажи дека вредноста на изразот $\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{AB}^2$ не зависи од изборот на точките A и B.

Решение. Нека K е пресечна точка на кружниците $k_1(M,R_1)$ и $k_1(N,R_2)$, $\measuredangle AKB = 90^\circ$ и C и D се пресечните точки на правите AK и BK со кружниците k_1 и k_2, соодветно (види цртеж).



Ако со S ја означиме средината на отсечката AB, тогаш:

$$\overline{SM} = \tfrac{1}{2}\overline{BD},\ \overline{SN} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}$$

како средни линии во триаголниците ABD и ABC.

Ќе ја користиме формулата за пресметување на тежишна линија на триаголник преку неговите страни:

$$t_a^2 = \tfrac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)\ .$$

За триаголниците ABC и ABD имаме:

$$\overline{AN}^2 = \tfrac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)$$

$$\overline{BM}^2 = \tfrac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2)$$

Бидејќи:

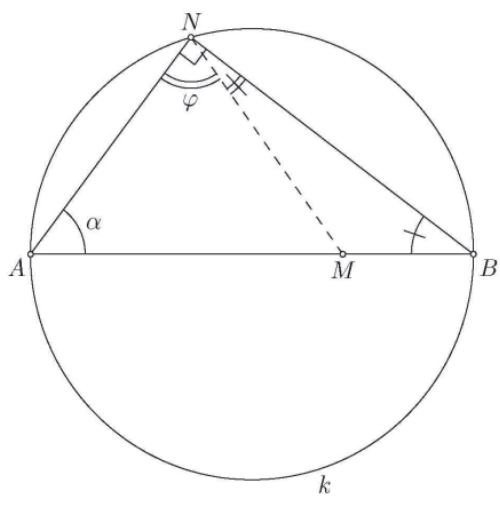
$$\overline{BC} = 2R_2,\ \overline{AD} = 2R_1,\ \overline{AC} = 2\overline{SN},\ \overline{BD} = 2\overline{SM},$$

$$\measuredangle MSN = 90^\circ \text{ и } \overline{SM}^2 + \overline{SN}^2 = \overline{MN}^2 = d^2,\ (\overline{MN} = d)$$

добиваме:

$$\begin{aligned}\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{AB}^2 &= \overline{AB}^2 + \tfrac{1}{2}(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2) - R_1^2 - R_2^2 - \overline{AB}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}4(\overline{SN}^2 + \overline{SM}^2) - R_1^2 - R_2^2 \\ &= 2d^2 - R_1^2 - R_2^2\end{aligned}$$

17. Дадени се три колинеарни точки A, B и M такви што M е меѓу A и B. На кружницата k со дијаметар AB земена е точка N различна од A и B. Докажи, дека вредноста на изразот $\frac{\operatorname{tg}\measuredangle ANM}{\operatorname{tg}\measuredangle MAN}$ не зависи од изборот на точката N.



Решение. Нека $\measuredangle BAN = \alpha$ и $\measuredangle ANM = \varphi$ (цртеж десно). Бидејќи триаголникот ABN е правоаголен имаме

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\varphi}{\sin(90^\circ-\varphi)}\cdot\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\varphi}{\sin\measuredangle BNM}\cdot\frac{\sin\measuredangle ABN}{\sin\alpha}$$

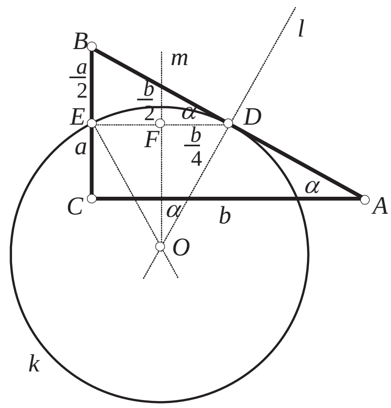
$$=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\measuredangle ABN}{\sin\measuredangle BNM}.$$

Од синусната теорема за триаголникот ANM следува $\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AM}}{\overline{MN}}$, а од истата теорема за триаголникот BMN следува $\frac{\sin\measuredangle ABN}{\sin\measuredangle BNM}=\frac{\overline{MN}}{\overline{BM}}$. Конечно,

$$\frac{\operatorname{tg}\measuredangle ANM}{\operatorname{tg}\measuredangle MAN}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\measuredangle ABN}{\sin\measuredangle BNM}=\frac{\overline{AM}}{\overline{MN}}\cdot\frac{\overline{MN}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}},$$

а ова очигледно не зависи од изборот на точката N.

18. Помалиот од аглите на правоаголниот триаголик е еднаков на α. Низ средината на помалата катета и средината на хипотенузата е повлечна кружница која ја допира хипотенузата. Да се најде односот на плоштините на кругот и триаголникот.



Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник, со теме на правиот агол во точката C, а помалиот од острите агли нека е $\measuredangle A=\alpha$. Точките E и D се средини на помалата катета BC и хипотенузата BA соодветно, а F е средина на отсечката ED. Правите l и m се симетрали на AB и ED соодветно. Пресекот O на овие две прави е центарот на кружницата k, со радиус $r=\overline{OD}=\overline{OE}$. При тоа $\measuredangle EDB=\measuredangle CAB=\alpha$, како агли со паралелни краци, и $\measuredangle FOD=\measuredangle CAB=\alpha$ како агли со нормални краци. Ако $\overline{CA}=b$, тогаш од тоа што ED е средна линија на триаголникот добиваме $\overline{ED}=\frac{b}{2}$, а бидејќи F е средна точка на ED, добиваме $\overline{FD}=\frac{b}{4}$.

Од правоаголниот триаголник DOF имаме

$$\frac{\frac{b}{4}}{r}=\sin\alpha\text{ , т.е. } r=\frac{b}{4\sin\alpha},$$

а од правоаголниот триаголник BED имаме

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}}=\operatorname{tg}\alpha\text{, т.е. } a=b\operatorname{tg}\alpha.$$

Плоштината на триаголникот ABC е $P_T=\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha$, а плоштината на кругот е еднаква на $P_k=r^2\pi=\frac{\pi}{16}\frac{b^2}{\sin^2\alpha}$. Конечно, $\frac{P_k}{P_T}=\frac{\pi\cos\alpha}{8\sin^3\alpha}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002

41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007
42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E. , Rouseau, C.. Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković-Veljan, Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pavković-Veljan: Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
67. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
68. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
69. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
70. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
71. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
72. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
73. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
74. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
75. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
76. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
77. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
78. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
79. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
80. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
81. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
82. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
83. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје

84. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
85. Арсеновић, М.; Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
86. Арсланагиħ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
87. Арсланагиħ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје
88. Арсланагиħ, Ш., Муминагиħ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
89. Арсланагиħ, Ш., Муминагиħ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
90. Арсланагиħ, Ш., Муминагиħ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
91. Арсланагиħ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол нма триаголник, Сигма, Скопје
92. Арсланагиħ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
93. Арсланагиħ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
94. Арсланагиħ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
95. Арсланагиħ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиħ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
97. Арсланагиħ,Ш., Муминагиħ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
98. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
108. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
109. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
110. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
111. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д. Полиномни равенки, Сигма, Скопје
113. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
114. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
115. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
116. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
117. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
118. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
121. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
122. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
123. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
124. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
125. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје

126. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
127. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
128. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
129. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015
130. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
131. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
132. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
134. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
135. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
136. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
137. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
138. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиноми по једној промењљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
153. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
154. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
155. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
157. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
158. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
159. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
160. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
161. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
162. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
167. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
168. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
169. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
170. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
171. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970

172. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
173. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
174. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
175. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
176. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
177. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
178. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
179. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје
180. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
181. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
182. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
183. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^+$, Софија, 1997
184. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
185. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
188. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
191. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
192. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
193. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
195. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
196. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
197. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
202. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
203. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
204. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001

210. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
211. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
212. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
213. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
214. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
215. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
216. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
217. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
218. Малчески, Р.. Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
219. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
220. Малчески, Р.: Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
221. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995
222. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
223. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
224. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
226. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
227. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
228. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
229. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
230. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединиte и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
231. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединиte, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
233. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
234. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
235. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
236. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
237. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
238. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
239. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
240. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
241. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
242. Малчески, Р.:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
248. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
249. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
252. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
253. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
254. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
255. Миличиħ, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013

256. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
257. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
258. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
259. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
260. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
261. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
262. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
263. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
264. Муминагиħ, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
265. Муминагиħ, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
266. Мушкаров, О., Грозед, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
267. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
268. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
269. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
270. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
271. Поја, Г.: Математическое откр̀итие, Москва 1976
272. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
273. Поповска – Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
274. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
275. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
276. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
277. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
278. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
279. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
280. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
281. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
282. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
283. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
284. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
285. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
286. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
287. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
288. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
291. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
292. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
293. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
294. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
295. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
296. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
297. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
299. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
301. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
302. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011