Ристо Малчески, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

ХОМОТЕТИЈА

Геометриските трансформации во рамнината се важен дел од математиката, при што посебна улога имаат движењата и сличностите. Притоа, во делот на сличностите важна улога има хомотетијата, која е предмет на разгледување во оваа статија.

1. Поим за хомотетија. Основни својства

Дефиниција 1. Нека O е точка во рамнината и k е реален број различен од нула. Трансформацијата со која произволна точка X се пресликува во точка X' таква што $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ ја нарекуваме *хомотетија*, во ознака $\mathrm{H}_{O,k}$, со центар во O и коефициет k. За две фигури ќе велиме дека се *хомотетични* ако постои хомотетија која едната фигура ја пресликува во другата.

Ако $k > 0$, тогаш за хомотетијата $\mathrm{H}_{O,k}$ велиме дека е позитивна, а ако $k < 0$, тогаш велиме дека таа е негативна. Јасно, ако хомотетијата со центар O ја пресликува точката X во точката X', тогаш точките O, X, X' се колинеарни. Понатаму, од дефиницијата на хомотетијата непосредно следува дека ова пресликување е биекција и дека хомотетијата еднозначно е определена со својот центар O и коефициент k. Исто така, од дефиниција 1 следува и точноста на следнава теорема, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Теорема 1. а) Хомотетија со произволен центар и коефициент $k = 1$ е идентичното пресликување.

б) Хомотетија со центар O и коефициент $k = -1$ е централна симетрија со центар O. □

Теорема 2. Нека се $\mathrm{H}_{O,k}$ и $\mathrm{H}_{O,k'}$ хомотетии со ист центар. Тогаш

а) $\mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k} = \mathrm{H}_{O,kk'}$.

б) $\mathrm{H}_{O,k} \circ \mathrm{H}_{O,k'} = \mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k}$.

в) $(\mathrm{H}_{O,k})^{-1} = \mathrm{H}_{O,\frac{1}{k}}$.

Доказ. а) Нека X е произволна точка. Тогаш од $\mathrm{H}_{O,k}(X) = X'$ следува $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, а од $\mathrm{H}_{O,k'}(X') = X''$ следува $\overrightarrow{OX''} = k'\overrightarrow{OX'}$. Според тоа,

$$(\mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k})(X) = \mathrm{H}_{O,k'}(\mathrm{H}_{O,k}(X)) = \mathrm{H}_{O,k'}(X') = X''$$

и притоа важи $\overrightarrow{OX''} = k'\overrightarrow{OX'} = k'k\overrightarrow{OX}$, т.е. $X'' = \mathrm{H}_{O,kk'}(X)$. Конечно, од произволноста на точката X следува $\mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k} = \mathrm{H}_{O,kk'}$.

б) Од тврдењето под а) следува $\mathrm{H}_{O,k} \circ \mathrm{H}_{O,k'} = \mathrm{H}_{O,kk'} = \mathrm{H}_{O,k'k} = \mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k}$.

в) Непосредно следува од теорема 1 а) и тврдењето под б). ■

Во претходната теорема всушност докажавме дека множесвото хомотетии со ист центар во однос на композицијата на пресликувања е комутативна група.

Теорема 3. За точките A, B и нивните слики A', B' при хомотетија $\mathrm{H}_{O,k}$ важи $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Доказ. Од $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ следува $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA}$, па затоа $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$. ■

Теорема 4. а) Со хомотетија секоја права се пресликува во паралелна права.

б) Секои две паралелни прави се хомотетични.

в) Единствени прави при хомотетија $\mathrm{H}_{O,k}$, $k \neq 1$ се пресликуваат во самите себе се правите кои минуваат низ центарот на хомотетијата.

г) Агол при хомотетија $\mathrm{H}_{O,k}$ се пресликува во складен агол.

Доказ. а) Непосредно следува од теорема 3.

г) непосредно следува од тврдењето под а) и теоремата за агли со паралелни краци.

Доказите на тврдењата под б) и в) ги оставаме на читателот за вежба. ■

Теорема 5. а) Кружница при хомотетија се пресликува во кружница.

б) Секои две кружници се хомотетични.

Доказ. а) Нека е дадена хомотетијата $\mathrm{H}_{O,k}$ и кружницата $\omega(A,r)$. Ако M е произволна точка од кружницата K и $A' = \mathrm{H}_{O,k}(A)$, тогаш од теорема 2 следува $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$, па затоа $\overline{A'M'} = k\overline{AM}$, што значи дека $M' \in \omega'(A', kr)$. Според тоа, $\mathrm{H}_{O,k}(\omega) \subseteq \omega'$. Аналогно се докажува дека $\mathrm{H}_{O,\frac{1}{k}}(\omega') \subseteq \omega$ и како $\mathrm{H}_{O,k}$ и $\mathrm{H}_{O,\frac{1}{k}}$ се биекции заклучуваме дека $\mathrm{H}_{O,k}(\omega) = \omega'$.

б) Ако кружниците $\omega(A,r)$ и $\omega'(A,r')$, $r \neq r'$ се концентрични, тогаш бараната хомотетија е, на пример, $\mathrm{H}_{A,\frac{r}{r'}}$. Ако кружниците $\omega(A,r)$ и $\omega'(A',r')$ не се концентрични, тогаш постои единствена точка O таква што $\overrightarrow{AO} = \frac{r}{r+r'}\overrightarrow{AA'}$ и притоа важи $\mathrm{H}_{O,-\frac{r'}{r}}(\omega) = \omega'$. ■

Лесно се докажува дека во случај кога круговите се дисјунктни, тогаш пресекот на нивните надворешни тангенти O е центар на хомотетија $\mathrm{H}_{O,\frac{r}{r'}}$ таква да $\mathrm{H}_{O,\frac{r'}{r}}(\omega) = \omega'$, а додека пресекот на низвните внатрешни тангенти O' е центар на хомотетија $\mathrm{H}_{O',-\frac{r'}{r}}$ таква што $\mathrm{H}_{O,-\frac{r'}{r}}(\omega) = \omega'$.

Непосредно од теорема 3 следува дека хомотетијата ги запазува односите меѓу должините, од теорема 4 следува дека хомотетијата ја запазува паралелноста, што значи дека ја запазува колинеарноста на точките, а од теорема 5 следува дека хомотетијата ја запазува и концикличноста. Понатаму, во теорема 2 ги разгледавме композициите на хомотетиите со ист центар. Логично се поставува прашањето што претставува композиција на хомотетии со различни центри и дали пресликувањата кои се резултат на ваквите композиции заедно со хомотетиите формираат некоја алгебарска структура. Одговорот на ова прашање го дава следнава теорема, која ќе ја прифатиме без доказ.

Теорема 6. а) Композиција на две хомотетии со различни центри е хомотетија или транслација.

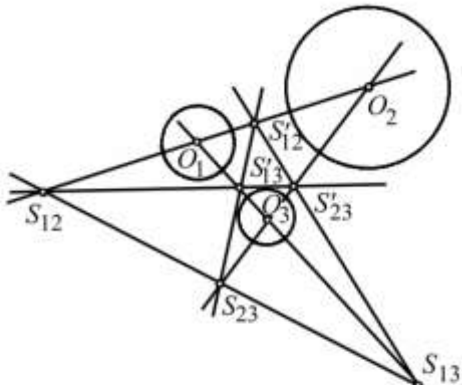
б) Композиција на хомотетија и транслација е хомотетија. □

Од теоремите 3 и 6 и фактот дека композиција на транслации е транслација непосредно следува дека множеството хомотетии и транслации во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна група. Понатаму, во случајот кога композицијата на две хомотетии е хомотетија за трите центри на хомотетија точна е следнава теорема.

Теорема 7. Ако H_1 и H_2 се хомотетии со центри O_1 и O_2 и $\mathrm{H}=\mathrm{H}_2\circ\mathrm{H}_1$ е хомотетија со центар во O, тогаш точките O,O_1 и O_2 се колинеарни.

Доказ. Со k_1 и k_2 да ги означиме коефициентите на хомотетиите H_1 и H_2, соодветно. Нека A е произволна точка во рамнината, $B=\mathrm{H}_1(A)$ и $C=\mathrm{H}_2(B)$ $=\mathrm{H}(A)$. Точките O,O_1 и O_2 припаѓаат на страните AB,BC и AC на ΔABC, соодветно. Притоа важи $\frac{\overrightarrow{AO_1}}{\overrightarrow{O_1B}}=-k_1, \frac{\overrightarrow{BO_2}}{\overrightarrow{O_2C}}=-k_2$ и $\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OA}}=-\frac{1}{k_1k_2}$, па затоа од теоремата на Менелај следува дека точките O,O_1 и O_2 се колинеарни. ■

Последица 1 (Монжова теорема). Ако центрите на кружниците $\omega_i, i=1,2,3$ се неколинеарни и нивните радиуси се меѓусебно различни, тогаш нивните центри на хомотетија $S_{12},S_{23},S_{13},S_{12}',S_{23}',S_{13}'$, цртеж 1, лежат на четири прави, така што на секоја од нив лежат по три центри на хомотетија.



Цртеж 1

Доказ. Нека H_1 и H_2 се хомотетии со центри во точките S_{12} и S_{23} кои ги пресликуваат ω_1 во ω_2 и ω_2 во ω_3, соодветно. Хомотетијата $\mathrm{H}=\mathrm{H}_2\circ\mathrm{H}_1$ која ја пресликува ω_1 во ω_3 има центар S_{13}. Конечно од теорема 7 следува дека точките S_{12}, S_{23} и S_{13} се колинеарни. ■

Последица 2. Нека кружиците ω_1 и ω_2 од внатре ја допираат кружницата ω во точките A и B. Тогаш надворешните тангенти на кружниците ω_1 и ω_2 се сечат на правата AB.

Доказ. Непосредно следува од последица 1. ■

2. Примена на хомотетијата

Теорема 8. Ако триаголниците ABC и $A'B'C'$ се такви што $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ и $CA \parallel C'A'$, тогаш тие се складни или се хомотетични.

Доказ. Ако никои две од правите AA', BB' и CC' не се сечат, тогаш јасно $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ и $\overline{CA} = \overline{C'A'}$, што значи дека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни.

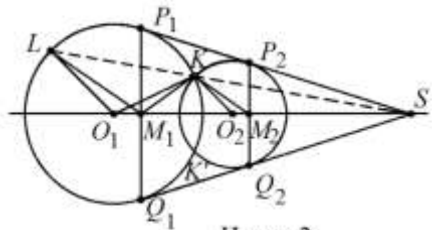
Нека претпоставиме дека две од правите AA', BB' и CC'. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека правите AA' и BB' се сечат во точка O. Хомотетијата со центар во O која ги пресликува точките A и B во точките A' и B' ја пресликува точката C во точка C_1 така да важи $B'C_1 \parallel BC$ и $A'C_1 \parallel AC$, па затоа $C_1 \equiv C'$, што и требаше да се докаже. ■

Пример 1. Во триаголник ABC ортоцентарот H, тежиштето T и центарот на опишаната кружница O лежат на една права (*Ојлерова права*) и притоа важи $\overline{HT} = 2\overline{OT}$. Докажи!

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Од $BC \parallel B_1C_1$ и $OA_1 \perp BC$ следува $OA_1 \perp B_1C_1$. На потполно ист начин се докажува дека $OB_1 \perp A_1C_1$ и $OC_1 \perp B_1A_1$. Според тоа, точката O е ортоцентар на триаголникот $A_1B_1C_1$. Хомотетијата $\mathrm{H}_{T,-\frac{1}{2}}$ го пресликува триаголникот ABC во триаголникот $A_1B_1C_1$, па затоа слика на ортоцентарот H на триаголникот ABC е ортоцентарот O на триаголникот $A_1B_1C_1$. Според тоа, $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$, што значи дека точките H, T и O лежат на една права и притоа важи $\overline{HT} = 2\overline{OT}$. ■

Пример 2. Кружниците ω_1 и ω_2 со центри O_1 и O_2, соодветно, се сечат во точките K и K'. Едната заедничка тангента ги допира ω_1 и ω_2 во точките P_1 и P_2, а другата во точките Q_1 и Q_2. Нека M_1 и M_2 се средините на P_1Q_1 и P_2Q_2, соодветно. Докажи дека

$$\measuredangle O_1KO_2 = \measuredangle M_1KM_2 .$$



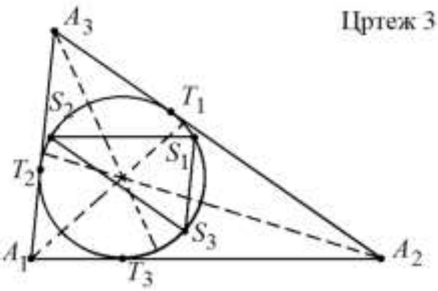
Цртеж 2

Решение. Прво да забележиме дека условот $\measuredangle O_1KO_2 = \measuredangle M_1KM_2$ е еквивалентен со условот $\measuredangle O_1KM_1 = \measuredangle O_2KM_2$. Нека S е пресекот на заедничките тангенти. Хомотетијата со центар во S која ја пресликува ω_1 во ω_2 ја пресликува точката K во точката L, цртеж 2. Од $\Delta SO_1P_1 \sim \Delta SP_1M_1$ следува

$$\overline{SK} \cdot \overline{SL} = \overline{SP}_1^2 = \overline{SO_1} \cdot \overline{SM_1} ,$$

што значи дека точките K, L, O_1, M_1 се коциклични (лежат на иста кружница). Затоа, $\measuredangle O_1KM_1 = \measuredangle O_1LM_1 = \measuredangle O_2KM_2$, што и требаше да се докаже. ■

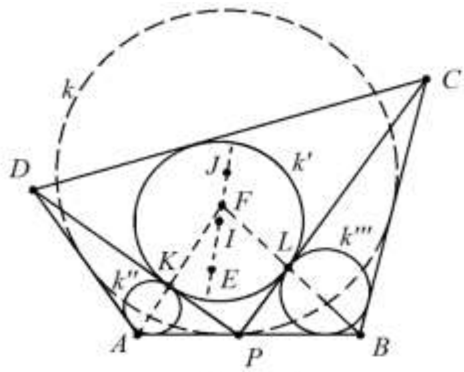
Пример 3. Во нерамнокрак триаголник $A_1A_2A_3$ со a_i е означена страната наспроти темето A_i. За $i = 1, 2, 3$ нека M_i, е средината на страната a_i, T_i е допирната точка на страната a_i со вписаната кружница во триаголникот $A_1A_2A_3$ и S_i е точката симетрична на точката T_i во однос на симетралата на аголот во темето A_i. Докажи дека правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 се сечат во една точка.



Цртеж 3

Решение. Точките $S_i, i = 1, 2, 3$ лежат на вписаната кружница. Со XY да го означиме ориентираниот лак XY. Лаците T_2S_1 и T_1T_3 се еднакви бидејќи се симетрични во однос на симетралата на $\measuredangle A_1$. Аналогно $T_3T_2 = S_2T_1$. Оттука следува $T_3S_1 = T_3T_2 + T_2S_1 = S_2T_1 + T_1T_3 = S_2T_3$, па затоа правата S_1S_2 е паралелна со правата A_1A_2, што значи и со правата M_1M_2. Слично, $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ и $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Но, триаголниците $M_1M_2M_3$ и $S_1S_2S_3$ немаат исти радиуси на опишани кружници, што значи дека тие не се складни, па од теорема 8 следува дека тие се хомотетични. Но, тоа значи дека правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 минуваат низ центарот на хомотетија, т.е. се сечат во една точка. ■

Пример 4. Нека P е точка на страната AB на конвексниот четириаголник $ABCD$. Нека k' е вписаната кружница во ΔCPD и I е неговиот центар. Да претпоставиме дека k' ги допира вписаните кружници во триаголниците APD и BPC во точките K и L, соодветно. Нека дијагоналите AC и BD се сечат во точката E, а правите AK и BL во точката F. Докажи дека точките E, I и F се колинеарни.



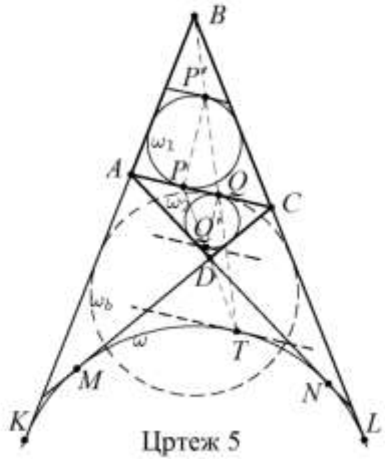
Цртеж 4

Решение. Со J да го означиме центарот на кругот k кој во полурамнината определена со правата AB ги допира правите DA, AB и BC и со k'' и k''' да ги означиме кружниците вписани во ΔADP и ΔBCP, соодветно. Нека F' е центарот на негативната хомотетија која ја пресликува k' во k. Центрите на негативната и позитивната хомотетија кои ја пресликуваат k'' во k' и k се K и A, соодветно. Сега од теорема 7 следува дека

$F' \in AK$ и аналогно $F' \in BL$. Но, тоа значи дека $F' \in AK \cap BL = \{F\}$, т.е. $F' \equiv F$. Според тоа, правата IJ која минува низ центрите на k и k' ја содржи точката F.

Од условот дека тангентните отсечки повлечени од P на k' и k'' се еднакви добивае дека $\overline{AP} - \overline{AD} = \overline{CP} - \overline{CD}$, што значи дека во четириаголникот $APCD$ може да се впише кружница k^*. Нека X е центарот на хомотетијата оја ја пресликува k^* во k'. Сега од теорема 7, применета на кружниците k'', k^*, k' следува дека точката X лежи на правата AC. Од друга страна, повторно од теорема 7 применета на кружниците k'', k', k следува колинеарноста на точките X, A, E', каде E' е центарот на позитивната хомотетија која k' ја пресликува во k. Оттука $E' \in AC$ и аналогно $E' \in BD$, па затоа $E \equiv E'$. Конечно, правата IJ ја содржи и точката E, со што доказот е завршен. ■

Пример 5. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{BA} \neq \overline{BC}$. Нека ω_1 и ω_2 се впишаните кружници во триаголниците ABC и ADC, соодветно. Да претпоставиме дека постои кружница ω која ја допира полуправата BA после точката A и ја допира полуправата BC после точката C, а која истовремено ги допира и правите AD и CD. Докажи дека надворешните заеднички тангенти на ω_1 и ω_2 се сечат на ω.



Цртеж 5

Решение. Нека ω ги допира правите AB, BC, CD, DA во точките K, L, M, N, соодветно. Тогаш

$$\overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \overline{AN} - \overline{DN} = \overline{BK} - \overline{DN} = \overline{BL} - \overline{DM} = \overline{BC} + \overline{CM} - \overline{DM} = \overline{BC} + \overline{CD}.$$

Тоа значи дека, ако со P и Q ги означиме допирните точки на ω_1 и ω_2 со AC, соодветно, тогаш

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC} + \overline{CD} - \overline{AD}}{2} = \overline{CQ}.$$

Со други зборови, припишаната кружница ω_b наспроти темето B во триаголникот ABC ја допира страната AC во точката Q.

Да ја разгледаме хомотетијата H со центар во B која ја пресликува ω_b во ω и да ставиме $T = \mathrm{H}(Q)$.Понатаму, точката P' дијаметрално спротивна на точката P на ω_1 лежи на правата AC, а точката Q' дијаметрално спротивно на точката Q на ω_2 лежи на правата DP. Тангентите во P', Q', T на $\omega_1, \omega_2, \omega$, соодветно се паралелни со правата AC. Според тоа, хомотетијата со центар во D која ја пресликува ω_2 во ω ја пресликува точката Q' во T, па затоа точките T, D, Q', P се колинеарни. Значи, правите $P'Q$ и $Q'P$ се сечат во точката T, па како е $PP' \| QQ'$, точката T е центар на хомотетијата која ω_1 ја пресликува во ω_2, од каде следува тврдењето. ■

3. Задачи за самостојна работа

1. Триаголник ABC таков што $\overline{AB}=\overline{AC}$ впишан е во кружница k. Кружницата k' однатре ја допира кружницата k и ги допира страните AB и AC во точките P и Q, соодветно. Докажи дека центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC е средина на отсечката PQ.

2. Нека за ΔABC важи $\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{BC}$. Докажи дека точката A, средините M и N на страните AB и AC и центрите на впишаната и опишаната кружница I и O, соодветно, припаѓаат на една кружница k. Исто така, докажи дека IT е тангента на кружницата k, каде T е тежиштето на триаголникот.

3. Три кружници со еднакви радиуси минуваат низ точката O и лежат во внатрешноста на триаголникот ABC. Секоја од кружниците допира по две страни на триаголникот. Докажи дека точката O и центрите на впишаната и опишаната кружница околу триаголникот ABC се колинеарни.

4. (теорема на Паскал). Нека шестаголникот $ABCDEF$, чии спротивни страни не се колинеарни е впишан во кружница. Со L,M,N да ги означиме пресечните точки на трите парови спротивни страни AB и ED, BC и EF, FA и CD, соодветно. Тогаш, точките L,M,N се колинеарни.

5. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC,CA и AB во точките D,E и F, соодветно. Докажи дека центрите на впишаната и опишаната кружница околу триаголникот ABC и ортоцентарот на триаголникот DEF се колинеарни.

6. Во нерамностран триаголник ABC впишаната кружница ги допира страните BC,CA и AB во точките D,E и F, соодветно. Точките $P,Q,$ R се подножјата на висините во триаголникот DEF спуштени од темињата D,E и F, соодветно. Докажи дека правите AP,BQ,CR се сечат на Ојлеровата права на триаголникот DEF.

Литература

1. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: *Geometrija za* I *razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998
2. Јаничиќ, П.: *Збирка задатака из геометрије (седмо издание)*, Математички факултет, Београд, 2007
3. Малчески, Р.: *Теорема на Менелај*, Сигма 43, Скопје, 1999
4. Самарџиски, А.: *Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј*, ПМФ, Скопје, 1988