

L олимпијада

1. Нека n е природен број и нека $a_1, a_2, \dots, a_k, (k \geq 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1} - 1)$ се деливи со n за секој $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1 - 1)$ не е делив со n .

Решение. *Прв начин.* Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n} \text{ за } i = 1, 2, \dots, k$$

(индексите се сметаат по модул k). Тогаш за секој j важи

$$a_j \equiv a_j a_{j+1} \equiv a_j a_{j+1} a_{j+2} \equiv \dots \equiv a_j a_{j+1} \dots a_{j+k-1} = a_1 a_2 \dots a_k \pmod{n},$$

па затоа $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_k \pmod{n}$, што е противречност.

2. Точката O е центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, а P и Q се внатрешни точки на отсечките AC и AB , соодветно. Точките K, L и M се средини на отсечките BP, CQ и PQ , соодветно, а Γ е кружницата која минува низ точките K, L и M . Ако правата PQ е тангента на кружницата Γ , докажи дека $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи PQ е тангента на Γ и $MK \parallel AB$ и $ML \parallel AC$, добиваме дека $\angle LKM = \angle LMP = \angle APQ$ и $\angle KLM = \angle KMQ = \angle AQP$, па затоа триаголниците MKL и APQ се слични. Оттука следува дека

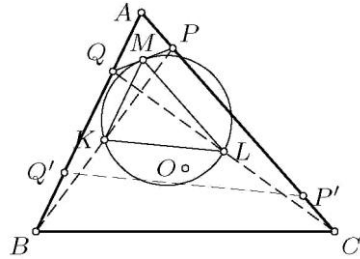
$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{QB}}, \text{ т.е. } \overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{AQ} \cdot \overline{QB}.$$

Сега, $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$ и $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = \overline{OA}^2 - \overline{OQ}^2$, како степени на точките P и Q во однос на опишаната кружница околу триаголникот ABC . Конечно, од последните три равенства следува $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

Втор начин. Нека P' и Q' се точки такви што $\overline{P'C} = \overline{AP}$ и $\overline{Q'B} = \overline{AQ}$. Тогаш

$$\overline{KL} = \overline{KM} + \overline{ML} = \frac{1}{2}(\overline{BQ} + \overline{PC}) = \frac{1}{2}(\overline{Q'A} + \overline{AP'}) = \frac{1}{2}\overline{Q'P'},$$

па затоа $Q'P' \parallel KL$. Сега, $\angle AQ'P = \angle MKL = \angle APQ$, од каде следува дека точките P, Q, P', Q' лежат на иста кружница. Центарот на оваа кружница е пресекот на симетралите на отсечките PP' и QQ' , што е точката O , бидејќи овие симетрали се совпаѓаат со симетралите на отсечките AC и AB . Оттука



следева $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

3. Нека s_1, s_2, s_3, \dots е строго растечка низа природни броеви таква што следните две нејзини поднизи

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{ И } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

се аритметички прогресии. Докажи дека низата s_1, s_2, s_3, \dots е аритметичка прогресија.

Решение. Нека $s_{s_n} = an + b$ и $s_{s_{n+1}} = cn + d$ за секој n , каде a, b, c, d се константи. Од $an + b = s_{s_n} \leq s_{s_{n+1}} = cn + d \leq s_{s_{n+1}} = a(n+1) + b$ добиваме дека $b - d \leq (c - a)n \leq a + b - d$, за секој n , па затоа мора да е $a = c$.

Бидејќи низата s_1, s_2, s_3, \dots е строго растечка, важи $s_m - s_n \geq m - n$ за $m \geq n$. Затоа $1 \leq s_{n+1} - s_n \leq s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = a$, па постојат $m = \min\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $M = \max\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Нека $s_{k+1} - s_k = m$ и $s_{l+1} - s_l = M$. Имаме:

$$\begin{aligned} Mm &= \sum_{i=1}^M m \leq \sum_{i=1}^M (s_{s_k+i} - s_{s_k+i-1}) = s_{s_k+1} - s_{s_k} = a \\ &= s_{s_l+1} - s_{s_l} = \sum_{i=1}^m (s_{s_k+i} - s_{s_k+i-1}) \leq \sum_{i=1}^m M = Mm. \end{aligned} \tag{1}$$

Според тоа, сите неравенства во (1) мора да се равенства, па за $i = 1$ добиваме $m = s_{s_k+1} - s_{s_k} = d - b = s_{s_l+1} - s_{s_l} = M$, т.е. $s_{n+1} - s_n$ е константа.

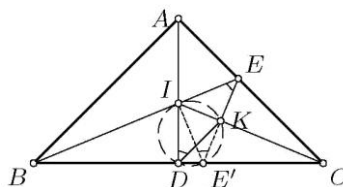
4. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} = \overline{AC}$. Симетралите на $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$ ги сечат страните BC и CA во точките D и E , соодветно. Нека K е центарот на впишаната кружница во триаголникот ADC . Ако $\sphericalangle BEK = 45^\circ$, определи ги сите можни вредности на $\sphericalangle CAB$.

Решение. Со I да го означиме центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а со E' точката симетрична на точката E во однос на правата CI . Бидејќи

$$\sphericalangle IE'K = \sphericalangle IEK = 45^\circ = \sphericalangle IDK,$$

заклучуваме дека точките I, D, E', K лежат на иста кружница.

Ако $E' \equiv D$, тогаш триаголниците IEC и IDC се складни, па затоа $\sphericalangle BEC = 90^\circ$, од каде што следува дека $\triangle ABC$ е рамностран и $\sphericalangle CAB = 60^\circ$. Навистина, во овој случај равенството $\sphericalangle BEK = \sphericalangle IDK = 45^\circ$ тривијално важи.



Ако $E' \neq D$, тогаш точките D и K се на кружница над дијаметар IE' , па затоа $90^\circ = \angle IKE' = \angle IKE$. Понатаму,

$$\angle CIE = 45^\circ \text{ и } \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle CAB = 135^\circ,$$

па затоа $\angle CAB = 90^\circ$. Од друга страна, ако $\angle CAB = 90^\circ$, нека нормалата во K на CI ги сече AC и BC соодветно во точките E^* и E^{**} . Точките I, D, E^{**}, K припаѓаат на кружницата, па е $\angle IE^*K = \angle IE^{**}K = \angle IDK = 45^\circ$ и $\angle CIE^* = 45^\circ = \angle CIE$, па е $E^* \equiv E$.

Според тоа, можни вредности за $\angle CAB$ се 60° и 90° .

5. Определи ги сите функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такви што за секои природни броеви a и b постои недегенериран триаголник чии должини на страни се

$$a, f(b) \text{ и } f(b+f(a)-1).$$

Решение. Ставаме $a=1$ и добиваме дека $1, f(b)$ и $f(b+f(1)-1)$ се страни на триаголник, па затоа мора да важи $f(b+f(1)-1) = f(b)$. Ако $f(1) \neq 1$, од последното равенство следува дека функцијата f е периодична, па затоа важи $f(x) \leq M$ за некој M . Но, тогаш $2M, f(b)$ и $f(b+f(2M)-1)$ не може да се страни на триаголник, па затоа $f(1) = 1$.

За $b=1$ добиваме дека $a, 1$ и $f(f(a))$ се страни на триаголник за секој a , па затоа $f(f(a)) = a$, т.е. f е биекција. Ако наместо a ставиме $f(a)$ добиваме дека $f(a), f(b)$ и $f(a+b-1)$ се страни на триаголник.

Нека $f(2) = z$. Очигледно $z > 1$ и $f(z) = 2$. Бидејќи $f(z), f(z)$ и $f(2z-1)$ се страни на триаголник, имаме $f(2z-1) < 2f(z) = 4$, т.е. $f(2z-1) \in \{1, 2, 3\}$. Но, f е биекција и $2z-1 \notin \{1, 2\}$, па затоа единствена можност е $f(2z-1) = 3$, т.е. $f(z) = 2z-1$.

Со индукција ќе докажеме дека $f(n) = (n-1)z - (n-2)$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Јасно, ова важи за $n \leq 2$. Нека претпоставиме дека равенството важи за секој $n < k$ ($k \geq 3$). Бидејќи $f((k-1)z - k + 2), f(z)$ и $f(kz - k + 1)$ се страни на триаголник, важи

$$f(kz - k + 1) \leq f(z) + f((k-1)z - k + 2) = 2 + k - 1 = k + 1,$$

па како функцијата е биекција следува дека $f(kz - k + 1) = k + 1$ и оттука $f(k+1) = kz - k + 1$, со што индуктивниот доказ е завршен. Исто така следува дека f е растечка. Тоа значи дека од $z \geq 2$ следува $2 = f(z) \geq f(2) = z$, па е $z = 2$. Конечно, $f(n) = 2(n-1) - n + 2 = n$. Лесно се проверува дека функци-

јата $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$ ги исполнува условите на задачата.

6. Нека се a_1, a_2, \dots, a_n по парови различни природни броеви и нека је M е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Скакулец треба да направи n скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координата 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите a_1, a_2, \dots, a_n , во некој редослед. Докажи, дека тој редослед може да се избере така што скакулецот никогаш нема да скокне во точка чија координата е во множеството M .

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n . За $n=1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $n \geq 2$ и дека тврдењето важи за сите $k < n$. Нека $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и $m = \min M$. Можни се два случаја.

- 1) $m < a_n$. Ако $a_n \notin M$, скакулецот го прави првиот скок со должина a_n .

Потоа, треба да направи скокови со дужина a_1, a_2, \dots, a_{n-1} така што прескокнува $n-2$ точки од множеството $M \setminus \{m\}$, а тоа според индуктивната претпоставка може да го направи. Нека претпоставиме дека $a_n \in M$. Паровите $(a_i, a_i + a_n)$ за $1 \leq i \leq n-1$ се меѓусобно дисјунктни, па барем еден од нив не содржи ниту еден елемент од множеството $M \setminus \{a_n\}$ (а не го содржи ниту a_n). Нека тоа е парот $(a_k, a_k + a_n)$. По два скока со должини a_k и a_n редоследно, на скакулецот му останува да направи скокови со должини $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}$ така што ќе прескокнува $n-3$ точки на множеството $M \setminus \{m, a_n\}$, што според индуктивната претпоставка повторно може да го направи.

- 2) $m \geq a_n$. Според индуктивната претпоставка, скакулецот може првиот скок да го направи со должина a_n и останатите скокови по некој редослед $a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}}$ така што ќе ги заобиколи сите точки на множеството $M \setminus \{m\}$. Ако притоа не скокне и во точката m , доказот е завршен. Затоа нека претпоставиме дека во k -тиот скок тој скокнува во точката m , т.е. $a_n + a_{i_1} + \dots + a_{i_{k-1}} = m$. Во овој случај, скакулецот со низа $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_n, a_{i_{k+1}}, \dots, a_{n-1}$ ги исполнува барањата на задачата. Навистина, и на овој начин скакулецот ги прескокнува точките на множеството $M \setminus \{m\}$, но ја прескокнува и точката m бидејќи $a_{i_1} + \dots + a_{i_k} < m < a_{i_1} + \dots + a_{i_k} + a_n$.