Драгољуб Милошевиќ

НЕКОИ ТЕОРЕМИ ЗА ТОЧКИ ВО РАМНИНАТА НА ТРИАГОЛНКОТ

Веќе во шесто одделение научивме дека површината на триаголникот е еднаква на половина од производот на должината на страната и на неа соодветната висина. Со примена на оваа формула за површина на триаголник ќе ги докажеме првите две теореми кои се однесуваат на точка која е во внатрешноста или во надворешноста на рамностран триаголник.

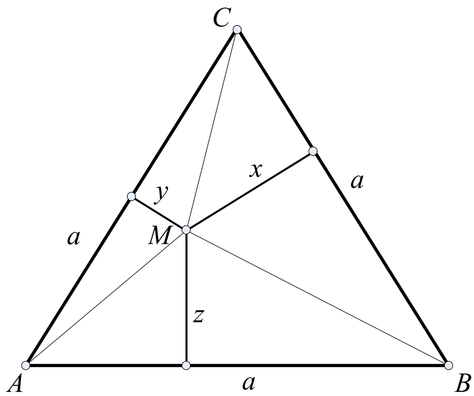
Теорема 1. Ако x, y и z се растојанија од произволна точка M која е во внатрешноста на рамностран триаголник ABC до страните AB, BC и CA соодветно (види цртеж), тогаш збирот $x+y+z$ е константен.

Доказ. Збирот на плоштините на триаголниците BCM, CAM и ABM е еднаков на плоштината на триаголникот ABC, па според тоа

$$\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}=\frac{ah}{2}.$$

Ако последното равенство го поделиме со $\frac{a}{2}$ добиваме

$$x+y+z=h. \blacksquare$$



Теорема 2. Ако точката M е во надвор од триаголникот ABC а во внатрешноста на аголот $\alpha=\measuredangle BAC$ (види цртеж), тогаш

$$y+z-x=h$$

(ознаките x, y и z се како од претходната теорема).

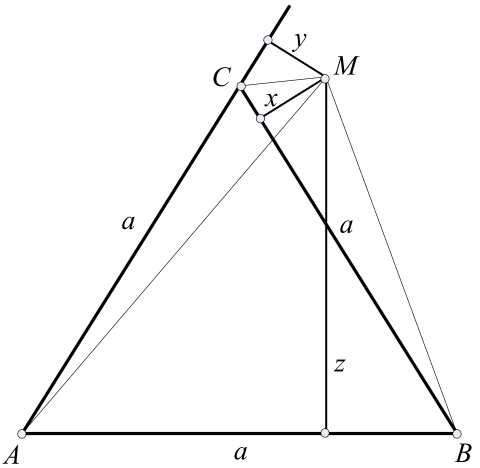
Доказ. Ако од збирот на плоштините на триаголниците ABM и ACM (види цртеж) ја одземеме плоштината на триаголникот BCM ја добиваме плоштината на рамностраниот триаголник ABC, т.е.

$$\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}-\frac{ax}{2}=\frac{ah}{2}.$$

Ако последното равенство го поделиме со $\frac{a}{2}$ добиваме

$$y+z-x=h,$$

т.е. точно е бараното равенство. ■



Теорема 3. За точката M која припаѓа на помалиот кружен лак BC од опишаната кружница околу рамностраниот триаголник ABC точно е равенството

$$\overline{MA}=\overline{MB}+\overline{MC}.$$

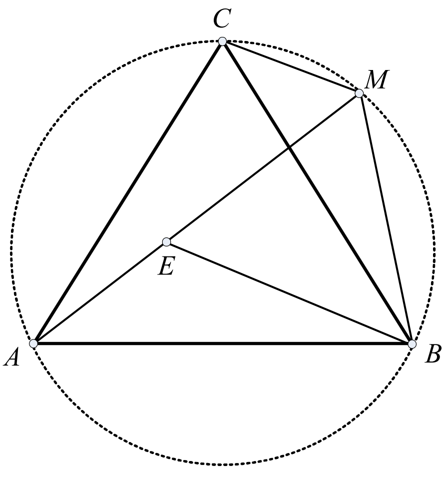
Доказ. На отсечката AM (види цртеж), избираме точка E така што $\overline{BE}=\overline{BM}$. Според тоа, триаголникот BME е рамнокрак и бидејќи $\measuredangle AMB=60^\circ$ и $\measuredangle AMC=60^\circ$ (како периферени агли над третина од кружница), триаголникот BME е рамностран, односно

$$\overline{MB}=\overline{BE}=\overline{EM}.$$

Понатаму, триаголниците ΔABE и ΔCMB се складни, па според тоа $\overline{AE}=\overline{MC}$. Сега е јасно дека

$$\overline{MA}=\overline{AE}+\overline{EM}=\overline{MC}+\overline{MB},$$

со што теоремата е докажана. ■



Теорема 4. Збирот

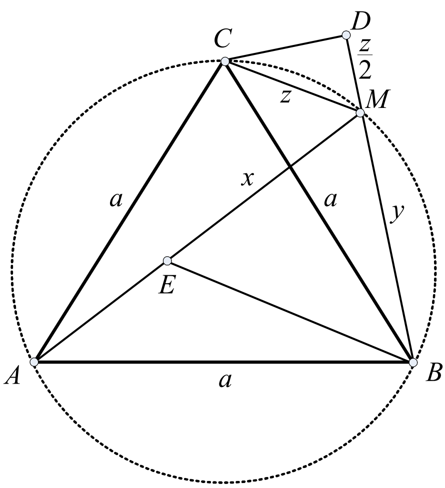
$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$$

(види цртеж), не зависи од изборот на точката M на лакот BC, т.е. е константен.

Доказ. Ќе ги воведеме ознаките

$$\overline{MA}=x,\ \overline{MB}=y \text{ и } \overline{MC}=z \text{ и}$$

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a.$$



Од $\measuredangle BMC = 120^\circ$, следува $\measuredangle DMC = 60^\circ$ (види цртеж). Правоаголниот триаголник MCD е половина од рамностран триаголник со страна z па според тоа $\overline{DM} = \frac{z}{2}$. Со примена на Питагорина теорема за правоаголниот триаголник CDM добиваме

$$\overline{CD}^2 = z^2 - (\tfrac{z}{2})^2 \text{, т.е. } \overline{CD}^2 = \tfrac{3}{4}z^2 .$$

Од правоаголниот триаголник BCD имаме

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 \text{, т.е. } \tfrac{3}{4}z^2 = a^2 - (y + \tfrac{z}{2})^2 .$$

Одовде, по средувањето, добиваме

$$y^2 + z^2 + yz = a^2 .$$

Ако последната равенка ја помножиме со 2 добиваме

$$y^2 + z^2 + (y^2 + z^2 + 2yz) = 2a^2 .$$

Изразот во втората заграда во последното равенство е полн квадрат, па затоа

$$y^2 + z^2 + (y + z)^2 = 2a^2 .$$

Но, од теорема 3 имаме $y + z = x$ и со замена во претходното равенство добиваме

$$y^2 + z^2 + x^2 = 2a^2 \text{, т.е. } \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2a^2 ,$$

и како $2a^2$ е константа добиваме дека и изразот

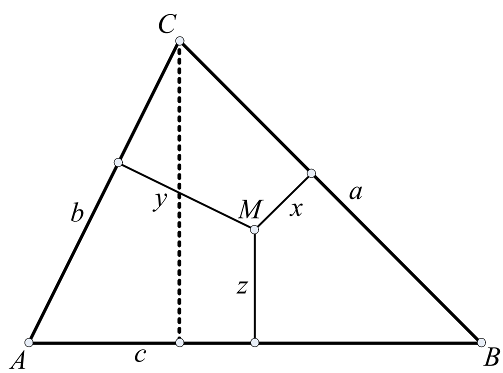
$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

е константен, т.е. не зависи од изборот на точката M на лакот BC. ■

Задачи за самостојна работа

1. Користејќи го доказот на теорема 1, докажи дека во секој триаголник ABC (види цртеж) е исполнето равенството

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1 .$$

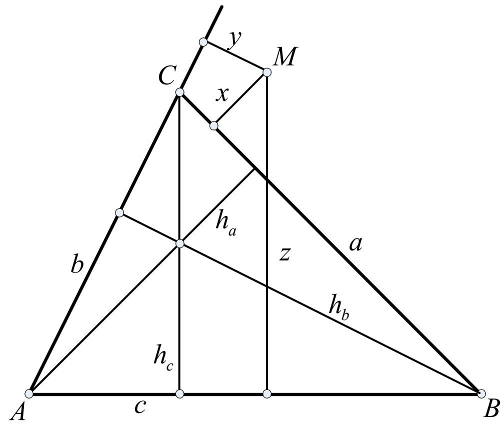


2. Кои равенства важат ако точката M припаѓа на страната а) AB, б) BC в) CA.

3. На продолжението на основата AB на рамнокрак триаголник ABC е избрана точка D. Докажи дека разликата на растојанијата на точката D од правите на кои припаѓаат краците на триаголникот е константна, т.е. не зависи од изборот на точката D на правата $p(A,B)$.

4. Докажи дека во секој триаголник ABC за точка M надовр од него (види цртеж) е точно равенството

$$-\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1\,.$$



КОЛКУ ДА ЗНАЕТЕ!

Колинеарноста на центарот на опишаниот круг, тежиштето и ортоцентарот на триаголникот прв ја докажал швајцарскиот математичар Леонард Ојлер (Leonard Ouler, 1707-1783), па според него правата одредена со тие три точки се нарекува *Ојлерова права*.