Šefket Arslanagić
Saraevo, Republika Bosna i Hercegovina

Занимливости за функцијата цел дел

Во ова работа ќе се занимаваме со функцијата цел дел од бројот x, И ќе докажеме две интересни равенства поврзани со ова функција. Најпрво ќе ја дефинираме функцијата цел дел и уште две други функции поврзани со ова функција.

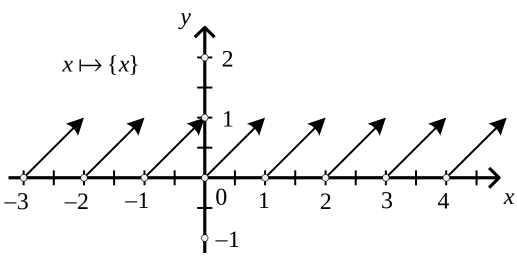
Дефинција 1. За реалниот број x со $\lfloor x \rfloor$ ќе го означиме целиот дел од бројот x, т.е. најголемиот цел број кој не е поголем од x.

Пример 1. Имаме
$$\lceil 5 \rceil = 5, \qquad \lceil -2,6 \rceil = -2, \qquad \lceil \pi \rceil = 3, \qquad \lceil e \rceil = 2, \qquad \lceil -\sqrt{3} \rceil = -2.$$

Дефинција 2. За реалниот број x со $\lceil x \rceil$ го означуваме

Пример 2. Имаме
$$\lceil 5 \rceil = 5, \qquad \lceil -2,6 \rceil = -2, \qquad \lceil \pi \rceil = 3, \qquad \lceil e \rceil = 2, \qquad \lceil -\sqrt{3} \rceil = -2.$$

Дефинција 3. За реалниот број x со $\{x\}$ го означуваме децималниот дел од бројот x, т.е. имаме $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.



Пример 3. Имаме
$$\{5\} = 5 - \lfloor 5 \rfloor = 5 - 5 = 0,$$
$$\{-\sqrt{3}\} = -\sqrt{3} - \lfloor -\sqrt{3} \rfloor = -\sqrt{3} - (-2) = 2 - \sqrt{3},$$
$$\{-1,253\} = -1,253 - \lfloor -1,253 \rfloor = -1,253 - (-2) = 2 - 1,253 = 0,747.$$

Лесно се гледа дека $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ ако е x е цел број, односно $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, ако x не е цел број. Исто така очигледно е дека $0 \le \{x\} < 1$.

На цртежите се дадени графиците на функциите $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, $x \mapsto \lceil x \rceil$ и $x \mapsto \{x\}$.

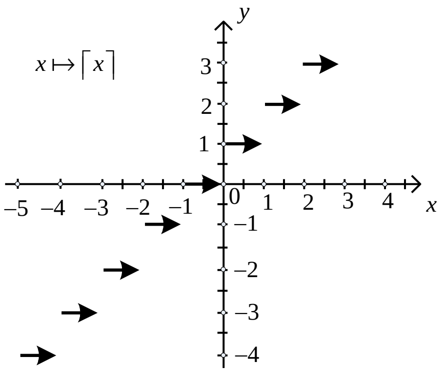
Во наредниот дел ќе докажеме дека за функцијата цел дел од x е точно следното равенство:

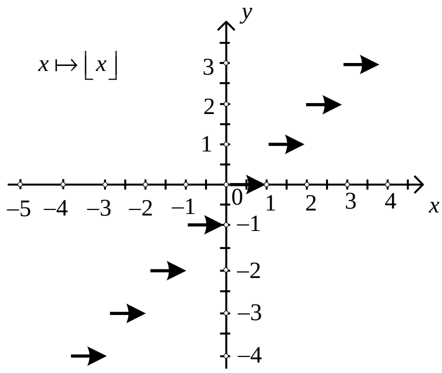
$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor \tag{1}$$

Се смета дека ова равенство го докажал Францускиот математичар Хермит (Charle Hermite, 1822-1901).

Доказ. Ќе разликуваме два случаи.

Случај 1. $0\le\{x\}<\frac{1}{2}$.





Во овој случај имаме

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\lfloor x\rfloor+\{x\}+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$$

и

$$\lfloor 2x\rfloor=\lfloor 2(\lfloor x\rfloor+\{x\})\rfloor=\lfloor 2\lfloor x\rfloor+2\{x\}\rfloor=2\lfloor x\rfloor,$$

па според тоа

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor,$$

односно

$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor.$$

Случај 2. $\frac{1}{2}\le\{x\}<1$.

Во тој случај $\lfloor x\rfloor=\left\lfloor\lfloor x\rfloor+\alpha+\frac{1}{2}\right\rfloor$, каде што $\alpha=\{x\}-\frac{1}{2}$ и $0\le\alpha<\frac{1}{2}$, од каде добиваме

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\lfloor x\rfloor+\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor\lfloor x\rfloor+1+\alpha\rfloor=\lfloor x\rfloor+1$$

и

$$\lfloor 2x\rfloor=\left\lfloor 2\left(\lfloor x\rfloor+\alpha+\frac{1}{2}\right)\right\rfloor=\lfloor 2\lfloor x\rfloor+1+2\alpha\rfloor=2\lfloor x\rfloor+1.$$

Од последните две равенства добиваме

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor,$$

односно

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor ,$$

што требаше и да се докаже.

Сега со равенството (1) ќе ја решиме следната задача: Ако $x \in \mathbb{R}$, докажи дека важи равенството

$$\lfloor x \rfloor^3 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor^3 + 3\lfloor x \rfloor \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor^3 \qquad (2)$$

Решение. Ќе го искористиме следниот алгебарски идентитет:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c - ab - bc - ca) . \qquad (3)$$

Ќе воведеме ознаки $a = \lfloor x \rfloor$, $b = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ и $c = -\lfloor 2x \rfloor$. Тогаш од равенството (1) добиваме

$$a + b + c = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 2x \rfloor = 0 .$$

Сега од (3) имаме

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 ,$$

односно

$$\lfloor x \rfloor^3 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor^3 - \lfloor 2x \rfloor^3 + 3\lfloor x \rfloor \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \lfloor 2x \rfloor = 0 .$$

Значи,

$$\lfloor x \rfloor^3 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor^3 + 3\lfloor x \rfloor \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor^3 ,$$

што требаше и да се докаже.

Литература

[1] **Bencze, M., Arslanagić, Š.** A Mathematical problem book, Graficar promet d.o.o. Saraevo, 2008.

[2] **Stanić, M., Ikodimović. N., :** Teorija Broejeva-Zbirka zadataka, Zavod za udzbenike I nastavna sredstva, Beograd, 2004.