SEEMOUS 2017

February 28 – March 5, 2017,
Ohrid, Republic of Macedonia

Problems

<u>Задача 1.</u> Нека $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Да предположим, че за

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

е изпълнено

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < \tfrac{1}{5}.$$

Докажете, че матрицата $I + A$ е обратима.

<u>Задача 2.</u> Нека $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Докажете, че съществува $a > 0$, такова че за всяко $\varepsilon \in (-a, a)$, $\varepsilon \neq 0$, матричното уравнение

$$AX + \varepsilon X = B, \quad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

има единствено решение $X(\varepsilon) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Докажете, че ако $B^2 = I_n$, и A може да се диагонализира, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \mathrm{Tr}(BX(\varepsilon)) = n - \mathrm{rank}\, A.$$

<u>Задача 3.</u> Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Докажете, че

$$\int_0^4 f(x(x-3)^2)dx = 2\int_1^3 f(x(x-3)^2)dx.$$

<u>Задача 4.</u> a) Нека $n \geq 0$ е цяло число. Пресметнете $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

b) Нека $k \geq 0$ е фиксирано цяло число и нека $(x_n)_{n \geq k}$ е редицата

$$x_n = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \left(e - 1 - \tfrac{1}{1!} - \tfrac{1}{2!} - \ldots - \tfrac{1}{i!}\right).$$

Докажете, че редицата е сходяща и намерете границата ѝ.

Time for work 5 hours