Светлозар Дојчев
Стара Загора, Бугарија

КОЈ БРОЈ Е ПОГОЛЕМ?

Млади пријатели на математиката, дали знаете што мери светлосната година? Не, не е време. Всушност светлосната година е единица мерка за растојание. Една светлосна година е приближно еднаква на $9,4\cdot 10^{15}m$. Сигурно ќе ви е интересно да научите, дека масата на Земјата приближно е еднаква на $6\cdot 10^{24}kg$. Претпоставувам, знаете дека најпопуларниот пребарувач на интернет – гугол, е математичкото име на бројот 10^{100}. Воопшто, во многу случаи – практични и математички, потребно е да се користат доста големи броеви, кои најчесто се запишуваат со помош на степени.

Ајде да се забавуваме, решавајќи неколку задачи, во кои се бара да споредуваме броеви. Се надевам, дека добро сте внимавале на лекциите за степенување и ги помните основните својства на степените. Да преминеме на решавање на нашите задачи.

Задача 1. Кој број е поголем: 2^{3000} или 3^{2000}?

Решение. При решавање на задачата ќе користиме, дека ако $a>b$ и n се природни броеви, тогаш $a^n>b^n$. Имаме

$$2^{3000}=(2^3)^{1000}=8^{1000}<9^{1000}=(3^2)^{1000}=3^{2000}.\ \blacksquare$$

Задача 2. Кој број е поголем: 2^{40} или 3^{28}?

Решение. Да се обидеме да ја искористиме истата идеја, како во претходната задача. Степеновите показатели 40 и 28 имаат заеднички делител 4. Значи, доволно е да ги споредиме броевите $2^{10}=1024$ и $3^7=2187$. Имаме, $2^{10}<3^7$, па затоа $(2^{10})^4<(3^7)^4$, т.е. $2^{40}<3^{28}$. ■

Задача 3. Кој број е поголем: 5^{44} или 4^{53}?

Решение. Во случајов степените на се многу погодни. Сепак, да искористиме дека $5^{44}=(5^{11})^4$ и да се обидеме овој степен на бројот 5 да го споредуваме со степените на бројот 2. За таа цел да побараме блиски по вредност степени на броевите 2 и 5. На пример, можеме да искористиме, дека $5^3 = 125 < 128 = 2^7$. Тогаш $5^9 = (5^3)^3 < (2^7)^3 = 2^{21}$ и бидејќи $5^2 < 2^5$, добиваме дека $5^{11} = 5^9 \cdot 5^2 < 2^{21} \cdot 2^5 = 2^{26}$. Оттука добиваме, дека

$$5^{44} = (5^{11})^4 < (2^{26})^4 = 2^{104} = 4^{52},$$

што е доволно да заклучиме дека $5^{44} < 4^{53}$. Овде искористивме, дека ако $0 < a < b$ и $0 < c < d$, тогаш $ac < bd$. ■

Задача 4. Докажи дека $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Решение. *Прв начин*. Очигледно $2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100}$, па затоа доволно е да го докажеме неравенството $2 \cdot 3^{100} < 4^{100}$, кое е еквивалентно со неравенството $2 < (\frac{4}{3})^{100}$. Да забележиме дека од $\frac{4}{3} > 1$ следува дека за секој природен број n важи $(\frac{4}{3})^n > 1$ и освен тоа важи $(\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} > 2$. Сега имаме $(\frac{4}{3})^{100} = (\frac{4}{3})^{97}(\frac{4}{3})^3 > 2$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Имаме

$$(\tfrac{2}{4})^{100} + (\tfrac{3}{4})^{100} = (\tfrac{2}{4})^{98}(\tfrac{2}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^{98}(\tfrac{3}{4})^2 < (\tfrac{2}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{13}{16} < 1,$$

па ако во последното неравенство помножиме со $4^{100} > 0$ го добиваме бараното неравенството. ■

Во посложени ситуации, кога треба да споредуваме степени го користиме познатото неравенство на Бернули:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ , за секој } x \geq -1 \text{ и за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Еден таков пример е подобрувањето на неравенството од задача 4.

Задача 5. Докажи дека $4^{79} < 2^{100} + 3^{100} < 4^{80}$.

Решение. За десното неравенство пак ќе искористиме дека $2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100}$. Ќе докажеме дека $2 \cdot 3^{100} < 4^{80}$. Последнот неравенство можеме да го запишеме во видот $\frac{4^{80}}{3^{100}} > 2$, односно во видот $(\frac{256}{243})^{20} > 2$. Понатаму, имаме $\frac{256}{243} > \frac{21}{20} = 1 + \frac{1}{20}$, па затоа од неравенството на Бернули добиваме

$$(\tfrac{256}{243})^{20} > (1 + \tfrac{1}{20})^{20} > 1 + 20 \cdot \tfrac{1}{20} = 2.$$

За да го докажеме левото неравенство ќе докажеме дека $3^{100} > 4^{79}$. Така, важи следната низа од неравенства

$$(\tfrac{256}{243})^{20} < (\tfrac{19}{18})^{20} = (\tfrac{361}{324})^{10} < (\tfrac{9}{8})^{10} = (\tfrac{81}{64})^{5} < (\tfrac{9}{7})^{5} < 4\,. \blacksquare$$

Следува една доста посложена задача.

Задача 6. Нека $a = 3^{100}$ и $b = 2^{150}$. Кој број е поголем 2^a или 3^b?

Решение. Имаме

$$2^a = 2^{9\cdot 3^{98}} = (2^9)^{3^{98}} \text{ и } 3^b = 3^{4\cdot 2^{148}} = (3^4)^{2^{148}}\,.$$

Бидејќи $2^9 > 3^4$, ако успееме да докажеме дека $3^{98} > 2^{148}$, ќе следува дека првиот од двата броја е поголем. Но, неравенството $3^{98} > 2^{148}$ е еквивалентно со неравенството $(\frac{9}{8})^{49} > 2$ и согласно со неравенството на Бернули последното неравенство е точно, бидејќи

$$(\tfrac{9}{8})^{49} = (1+\tfrac{1}{8})^{49} \geq 1 + \tfrac{49}{8} > 2\,. \blacksquare$$

Задача 7. Кој број е поголем: 100^{100} или $50^{50}150^{50}$?

Решение. Имаме $100^2 = 10000 > 7500 = 50\cdot 150$, па затоа

$$100^{100} = (100^2)^{50} > (50\cdot 150)^{50} = 50^{50}150^{50}\,. \blacksquare$$

Задача 8. Нека $a > b > 0$ се реални броеви и $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека

$$a^{2n} > (a-b)^n (a+b)^n\,.$$

Решение. Имаме $a^2 > a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, па затоа

$$a^{2n} > [(a-b)(a+b)]^n = (a-b)^n (a+b)^n\,. \blacksquare$$

Постојат и други интересни неравенства и меѓу броеви кои не се запишани како степени. Да разгледаме неколку неравенства од овој вид.

Задача 9. Кој број е поголем: $99!$ или 50^{99}?

Решение. Да спомeнеме, дека 99! означува производ на природните броеви од 1 до 99, заклучно. Бидејќи производите кои ги споредуваме имаат заеднички множител 50, доволно е да ги споредиме броевите $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 49\cdot 51\cdot 52\cdot \ldots \cdot 99$ и 50^{98}. Во последниот производ има точно 98 множители, кои можеме да ги групираме по парови: 1 и 99, 2 и 98 итн. до 49 и 51. Но, $(50-k)(50+k)=50^2-k^2<50^2$, за $k=1,2,...,49$, па затоа $99!<50^{99}$. ■

Задача 10. Кој број е поголем: $\frac{1234567}{7654321}$ или $\frac{1234568}{7654322}$?

Решение. Да означиме $x=1234567$ и $y=7654321$. Тогаш $\frac{1234567}{7654321}=\frac{x}{y}$ и $\frac{1234568}{7654322}=\frac{x+1}{y+1}$. За да ги споредиме по големина ќе ја разгледаме разликата

$$\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+1}=\frac{x(y+1)-y(x+1)}{y(y+1)}=\frac{x-y}{y(y+1)}.$$

Бидејќи $x<y$, добиваме дека горната разлика е негативна, па затоа

$$\frac{1234567}{7654321}<\frac{1234568}{7654322}. \blacksquare$$

Задача 11. Кој број е поголем: $\frac{2^{2005}+1}{2^{2006}+1}$ или $\frac{2^{2006}+1}{2^{2007}+1}$?

Решение. Ќе ја искористиме идејата од решението на претходната задача. Ако земеме $a=2^{2005}$, тогаш $\frac{2^{2005}+1}{2^{2006}+1}=\frac{a+1}{2a+1}$ и $\frac{2^{2006}+1}{2^{2007}+1}=\frac{2a+1}{4a+1}$. Имаме

$$\frac{a+1}{2a+1}-\frac{2a+1}{4a+1}=\frac{a}{(2a+1)(4a+1)}>0,$$

па затоа $\frac{2^{2005}+1}{2^{2006}+1}>\frac{2^{2006}+1}{2^{2007}+1}$. ■

На крајот од ова наше дружење ви предлагаме самостојно да ги решите следниве задачи:

Задача 12. Кој број е поголем: 31^{11} или 17^{14}?

Задача 13. Кој број е поголем: 7^{92} или 8^{91}?

Задача 14. Кој број е поголем: 215^{33} или 50^{50}?

Задача 15. Докажи дека бројот 2^{300} има не повеќе од 100 и не помалку од 90 цифри.

(Со одобрение на главниот и одговорен уредник статијата
е преземена од списанието Математика+, Софија).