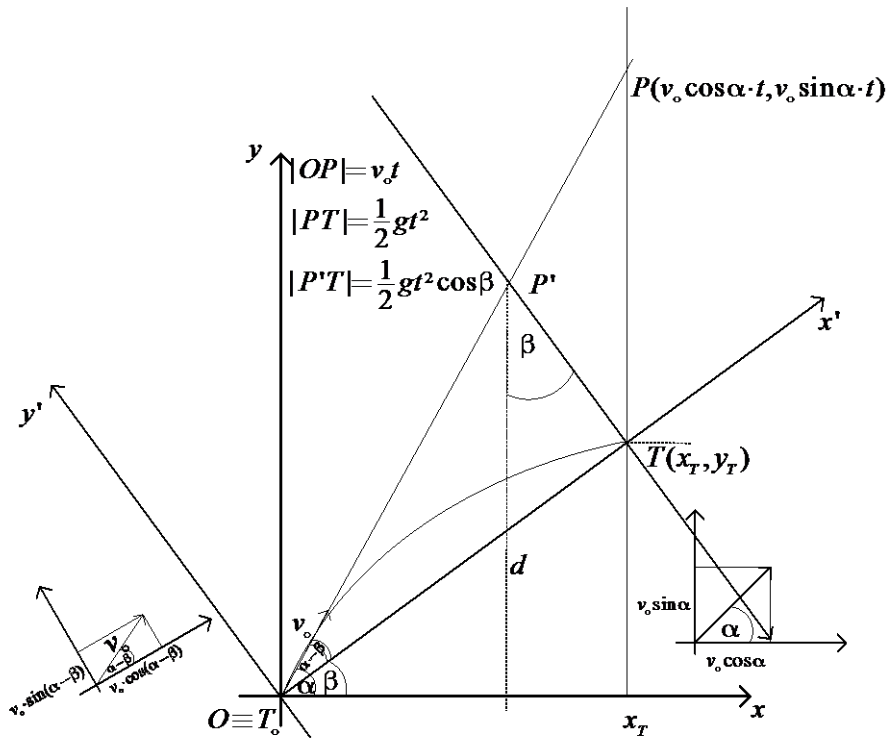
Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska
Boris Bašić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina

ФИЗИКАТА И ПОМАГА НА МАТЕМАТИКАТА

Во овој краток прилог ќе покажеме како го применуваме знаењето за кос истрел (физика) во докажување на адиционата формула

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta .$$



Нека топот се наоѓа во подножјето на ридот кој под агол β се издига во однос на хоризонаталната рамнина. Нека топовска граната е испукана од него со почетна брзина $v_\circ$ (тоа е брзината на гранатата во моментот $t = 0$) под агол α и нека по некое време паѓа на падината на ридот во точка T (види цртеж). Да претпоставиме дека гранатата во моментот $t = 0$ е во почетокот на координатниот систем $0\,(\equiv T_\circ)$, а координатната рамнина Oxy нека се поклопува со рамнината на летот на гранатата. Отпорот на воздухот се занемарува.

Од физика ни е познато дека законот на движење на точката T е даден со равенките

$$x_T = v_0 t\cos\alpha\,,\quad (x = x(t)) \tag{1}$$

$$y_T = v_0 t\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (y = y(t))\,. \tag{2}$$

Тоа се координати на положбата на точката T . Значи,

$$T(v_0 t\cos\alpha, v_0 t\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2)\,.$$

Нека е $|OT| = d$. Во правоаголниот триаголник $Ox_T T$ имаме

$$\cos\beta = \tfrac{x_T}{d} \;\Leftrightarrow\; d\cos\beta = x_T \;\Leftrightarrow\; d\cos\beta = v_0 t\cos\alpha \tag{3}$$

$$\sin\beta = \tfrac{y_T}{d} \;\Leftrightarrow\; d\sin\beta = y_T \;\Leftrightarrow\; d\sin\beta = v_0 t\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4}$$

Ако го помножиме (3) со $\sin\beta$ и (4) со $\cos\beta$ и потоа ги одземеме, добиваме:

$$v_0 t\cos\beta\sin\beta = v_0 t\sin\alpha\cos\beta - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta\,,$$

од каде што добиваме дека

$$t = \tfrac{2v_0(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{g\cos\beta}\,. \tag{5}$$

Со завртување на координатниот систем Oxy , за агол β во насоката спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот (во систем $Ox'y'$, види цртеж) добиваме равенки на движење

$$x_T' = v_0 t\cdot\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}gt^2\cdot\sin\beta \quad (= d) \tag{6}$$

$$y_T' = v_0\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2\cdot\cos\beta \;\; (= 0) \tag{7}$$

па според тоа (види (7))

$$0 = v_0\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2\cdot\cos\beta$$

и од тука добиваме дека

$$t = \tfrac{2v_0\cdot\sin(\alpha-\beta)}{g\cdot\cos\beta}\,. \tag{8}$$

Конечно, од (5) и (8) следува дека

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta\,. \blacksquare$$

Понатаму, од равенките (1) и (2) следува дека е (види цртеж)

$$\begin{aligned} d = \sqrt{x_T^2 + y_T^2} &= \sqrt{v_0^2 t^2\cos^2\alpha + v_0^2 t^2\sin^2\alpha - v_0 t^3 g\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2 t^4} \\ &= \sqrt{v_0^2 t^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - v_0 g t^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2 t^4} \\ &= \sqrt{v_0^2 t^2 - v_0 g t^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2 t^4} \end{aligned} \tag{9}$$

Од равенката (6) следува дека

$$d^2 = v_0^2 t^2 \cos^2(\alpha-\beta) - v_0 g t^3 \cos(\alpha-\beta)\sin\beta + \tfrac{1}{4} g^2 t^4 \sin^2\beta$$

а од равенката (9) имаме

$$d^2 = v_0^2 t^2 - v_0 g t^3 \sin\alpha + \tfrac{1}{4} g^2 t^4,$$

т.е. по делење со t^2 последователно добиваме

$$v_0^2 \cos^2(\alpha-\beta) - v_0 g t \cos(\alpha-\beta)\sin\beta + \tfrac{1}{4} g^2 t^2 \sin^2\beta = v_0^2 - v_0 g t \sin\alpha + \tfrac{1}{4} g^2 t^2$$

$$-v_0 g t \cos(\alpha-\beta)\sin\beta = v_0^2[1-\cos^2(\alpha-\beta)] - v_0 g t \sin\alpha + \frac{1}{4} g t^2 (1-\sin^2\beta)$$

$$-v_0 g t \cos(\alpha-\beta)\sin\beta = v_0^2 \sin^2(\alpha-\beta) - v_0 g t \sin\alpha + \tfrac{1}{4} g t^2 \cos^2\beta$$

и пос замената на равенството (8) во последната равенка, добиваме

$$0 = v_0^2 \sin^2(\alpha-\beta) - v_0 g t \sin\alpha + v_0 g t \cos(\alpha-\beta)\sin\beta + \tfrac{1}{4} g t^2 \cos^2\beta$$

$$v_0 g t \sin\alpha - v_0 g t \cos(\alpha-\beta)\sin\beta = v_0^2 \sin^2(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{4} g t^2 \cos^2\beta$$

$$v_0 g(\sin\alpha - \cos(\alpha-\beta)\sin\beta)\tfrac{2v_0 \sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta} = v_0^2 \sin^2(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{4} g^2 (\tfrac{2v_0 \sin(\alpha-\beta)}{g\cdot\cos\beta})^2 \cos^2\beta$$

$$\left(\sin\alpha - \cos(\alpha-\beta)\sin\beta\right)\tfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = \sin^2(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha - \cos(\alpha-\beta)\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)\cos\beta$$

и од последното равенство ако воведеме смена $\alpha-\beta=\gamma \;\Leftrightarrow\; \alpha=\beta+\gamma$, конечно добиваме дека

$$\sin(\beta+\gamma) - \cos\gamma\sin\beta = \sin\gamma\cos\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta \,. \;\blacksquare$$