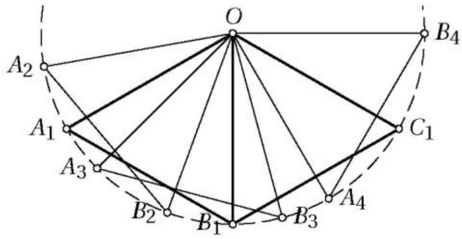
LVI олимпијада

1. Конечното множество $\mathbb{S}$ точки во рамнината го нарекуваме урамнотежено ако за секои две различни точки A и B од множеството $\mathbb{S}$ постои точка C во множеството $\mathbb{S}$ таква што $\overline{AC} = \overline{BC}$. Множеството $\mathbb{S}$ го нарекуваме бесцентрично ако за никои три точки A, B и C од множеството $\mathbb{S}$ не постои точка P во $\mathbb{S}$ таква што $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

   а) Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ постои урамнотежено множество кое се состои од n точки.

   б) Определи ги сите природни броеви $n \geq 3$ за кои постои урамнотежено бесцентрично множество.

   Решение. а) Избираме различни точки $A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m, C_1$ на кружница k со центар O такви што триаголниците OA_iB_i ($i = 1, 2, ..., m$) и OB_1C_1 се рамнострани. Множествата



$$\{O, A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m\} \text{ и } \{O, A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m, C_1\}$$

   се ирамнотежени и имаат $2m+1$ и $2m+2, m \in \mathbb{N}$ елементи.

   б) Одговор: сите непарни броеви.

   За непарен n множеството темиња на правилен $n-$аголник е урамнотежено и бесцентрично множество. Останува да докажеме дека за парен n такво множество $\mathbb{S}$ не постои.

   Нека го претпоставиме спротивното. На секој од $\frac{n(n-1)}{2}$ подредени парови (A, B) точки од $\mathbb{S}$ му соодветствува точка P таква што $\overline{PA} = \overline{PB}$, па според принципот на Дирихле постои точка P на која и соодветствуваат најмалку $[\frac{n-1}{2}] = \frac{n}{2}$ парови точки од $\mathbb{S}$. Бидејќи ниту еден од ови парови не ја сoржи точката P некои два пара имаат заедничка точка: нека се тоа (A, B) и (A, C). Тогаш $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, што противречни на бесцентричноста на множеството $\mathbb{S}$.

2. Определи ги сите тројки природни броеви (a, b, c) такви што секој од броевите

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

   е степен на бројот 2.

   Решение. Нека претпоставиме дека $a = b$. Тогаш $b(c-1)$ и $b^2 - c$ се степени на бројот 2, па затоа $b = 2^k$ и $c = 2^l + 1$ за некои $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $b^2 - c =$

$2^{2k}-2^{l}-1$ е степен на бројот 2, што е можно единствено за $k=1$ и $l\in\{0,1\}$. Одовде ги добиваме решенијата $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$.

Понатаму, заради симетрија можеме да сметаме дека $a<b<c$. Јасно е дека мора да биде $a>1$. Да означиме $bc-a=2^{\alpha}, ca-b=2^{\beta}$ и $ab-c=2^{\gamma}$. Тогаш $\alpha>\beta>\gamma$.

Броевите

$$2^{\alpha}+2^{\beta}=(c-1)(b+a) \text{ и } 2^{\alpha}-2^{\beta}=(c+1)(b-a)$$

се деливи со 2^{β}. Но, барем еден од броевите $c\pm1$ не е делив со 4, па затоа $2(a+b)$ или $2(a-b)$ е делив со 2^{β}. Според тоа,

$$2^{\beta}=ca-b\le 2(a+b), \text{ т.е. } a(b+1)\le ac\le 2a+3b<a+4b,$$

па затоа $ab<4b$, т.е. $a<4$.

1) Нека $a=3$. Претходно видовме дека 2^{β} е делител на $2(b+3)$ или на $2(b-3)$. Но, $2^{\beta}=3c-b>\max\{2(b-3),b+3\}$, па единствена можност е $3c-b=2(b+3)$, т.е. $c=b+2$. Сега $2^{\alpha}=bc-a=(b-1)(b+3)$, што значи дека $b-1$ и $b+3$ се степени на бројот 2 чија разлика е еднаква на 4. Оттука следува дека $b=5$, што го дава решението $(3,5,7)$.

2) Нека $a=2$. Имаме $2c-b=2^{\beta}$ и $2b-c=2^{\gamma}$. Ако $\gamma>0$, тогаш броевите b и c се парни, па затоа $2c-b$ не е делив со 4, што не е можно. Според тоа, $\gamma=0$ и $c=2b-1$. Од $2^{\beta}=2c-b=3b-2$ следува

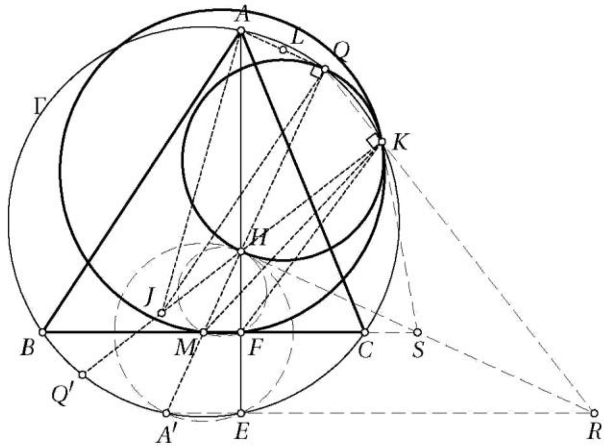
$$b=\tfrac{2^{\beta}+2}{3} \text{ и } 2^{\alpha}=b(2b-1)-2=\tfrac{2^{2\beta+1}+5\cdot2^{\beta}-16}{9}.$$

Ако $\beta>4$, последниот израз не е делив со 2^{5}, па затоа не е делив со 2^{α}, што е противречност. Според тоа, $\beta\le4$. Со проверка на можните случаи го добиваме решението $(2,6,11)$.

Конечно, решенија на задачата се подредените тројки $(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,6,11)$ и $(3,5,7)$ и нивните пермутации.

3. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $\overline{AB}>\overline{AC}$, Γ е неговата опишана кружница, H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и F е подножјето на висината повлечена од темето A. Точката M е средина на отсечката BC. Нека Q е точка на кружницата Γ таква што $\measuredangle HQA=90^{\circ}$, а K е точка на кружницата Γ таква што $\measuredangle HKQ=90^{\circ}$. Сметаме дека точките A,B,C,K и Q се меѓу себе различни и лежат на кружницата Γ во овој редослед.

Докажи дека опишаните кружници на триаголниците KQH и FKM се допираат.



Решение. *Прв начин*. Нека A' и Q' се точки на Γ дијаметрално спротивни на A и Q, соодветно. Од $\measuredangle AQH = \measuredangle AQA' = 90^\circ$ следува дека точките A', H и Q се колинеарни. Слично, точките Q', H и K се колинеарни. Нека E е вториот пресек на правата AF со кружницата Γ. Точките F и M се средини на отсечките HE и HA', соодветно. Со J да ја означиме средината на отсечката HQ'. За произволна точка T на тангентата на кружницата KQH во K таква што Q и T се од различни страни на правата HK важи

$$\measuredangle HKT = \measuredangle HQK = 90^\circ - \measuredangle A'HQ'.$$

Треба да докажеме дека KT е тангента на кружницата KFM, т.е. дека важи $\measuredangle MKT = \measuredangle CFK$, што е еквивалентно со

$$90^\circ - \measuredangle A'HQ' = \measuredangle CFK + \measuredangle HKM\ . \qquad (1)$$

Од $\triangle KHE \sim \triangle AHQ$ следува $\triangle KHF \sim \triangle AHJ$, па затоа

$$\measuredangle CFK = 90^\circ - \measuredangle KFH = 90^\circ - \measuredangle AJH\ .$$

Слично, $\triangle HKM \sim \triangle HQJ$ и оттука $\measuredangle HKM = \measuredangle JQH$. Така равенството (1) се сведува на равенството $\measuredangle A'HQ' = \measuredangle AJH - \measuredangle JQH$.

Четириаголникот $AQA'Q'$ е правоаголник, а точката J е еднакво оддалечена од правите AQ' и QH, од каде што следува $\overline{JA} = \overline{JQ}$. Затоа, ако L е средина на отсечката AQ, имаме $JL \parallel AQ'$ и конечно

$$\measuredangle JQH = \measuredangle QJL = \measuredangle AJL = \measuredangle AJH - \measuredangle A'HQ'\ .$$

Втор начин. Како во првото решение ги дефинираме точките A' и Q' и докажуваме дека точките A', M, H, Q се колинеарнио.

Кружниците KQH и $IA'H$ имаат колинеарни дијаметри QH и $A'H$, што значи дека имаат заедничка тангента t во точката H нормална на правата MH. Радикалните оски на кружниците $KQH, AEA'H$ и ABC по парови се $QK, A'E$ и t, и сите минуваат низ нивниот радикален центар R. Четириаголникот $HERK$ е тетивен бидејќи $\measuredangle QKH = \measuredangle HEA' = 90^\circ$, а негов центар на опишаната кружница е средината S на отсечката HR. Точката S

припаѓа на симетралата на отсечката HE, а тоа е правата BC. Бидејќи кружницата HFM исто така ја допира правата t во точката H, важи $\overline{SF}\cdot\overline{SM}=\overline{SH}^2=\overline{SK}^2$, што значи дека правата SK ја допира кружницата KFM. Според тоа, SK е заедничка тангента на кружниците KQH и KFM.

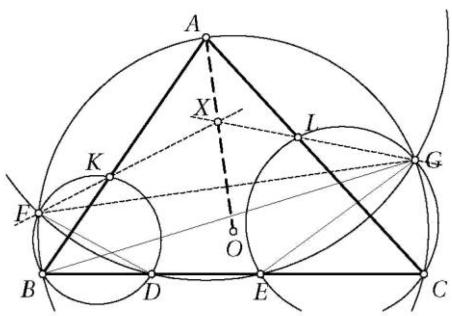
4. Нека Ω е опишаната кружница околу триаголникот ABC, а O е нејзиниот центар. Кружница Γ со центар во точката A ја сече отсечката BC во точките D и E така што точките B,D,E,C се различни меѓу себе и лежат на правата BC во овој редослед. Нека F и G се пресечните точки на кружниците Γ и Ω, при што точките A,F,B,C,G лежат на кружницата Ω во овој редослед. Нека K е втората пресечна точка на опишаната кружница околу триаголникот BDF и отсечката AB. Нека L е втората пресечна точка на опишаната кружница околу триаголникот CGE и отсечката CA.
Да претпоставиме дека правите FK и GL се различни и дека се сечат во точката X. Докажи дека точката X припаѓа на правата AO.

Решение. Правите AF и AQ се симетрични во однос на AO. Доволно е да докажеме дека правите FK и GL се симетрични во однос на AO, т.е. дека

$$\measuredangle AFK=\measuredangle AGL.$$

Последното равенство следува од

$$\begin{aligned}\measuredangle AFK&=\measuredangle GFD+\measuredangle AFG-\measuredangle DFK\\&=\measuredangle GEC+\measuredangle ABG-\measuredangle DBK\\&=\measuredangle GEC-\measuredangle GBC\\&=\measuredangle GLC-\measuredangle GAC\\&=\measuredangle AGL.\end{aligned}$$



5. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x), \qquad (*)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Во (*) ставаме $y=1$ и добиваме $f(x+f(x+1))=x+f(x+1)$, за секој $x\in\mathbb{R}$, што значи дека $g_x=x+f(x+1)$ е фиксна точка за функцијата f. Разликуваме два случаја.

1) $f(0)\neq 0$. Ако во (*) ставиме $x=0$ добиваме $f(f(y))=f(y)+(y-1)f(0)$. Ако y е фиксна точка, оттука следува дека $y=1$. Значи, $x+f(x+1)=1$, т.е. $f(x)=2-x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.
2) $f(0)=0$. Тогаш $g_{-1}=-1$ е фиксна точка, т.е. $f(-1)=-1$. Во (*) ставаме $(x,y)=(1,-1)$ добиваме $f(1)=1$. Со замена $(x+1,0)$ во (*) добиваме

$f(g_x+1)=g_x+1$. Значи, за $x=1$ во (*) имаме:

$$f(1+f(y+1))+f(y)=1+f(y+1)+y. \qquad (1)$$

Оттука заклучуваме дека ако y и $y+1$ се фиксни точки на функцијата f, тогаш и $y2$ е фиксна точка на функцијата f. Меѓу другото, g_x+2 е фиксна точка, а со самото тоа и $g_{x-2}+2=x+f(x-1)$. Сега во (*) ставаме $y=-1$ и добиваме $f(-x)=-f(x)$. Ако во (*) замениме $(-1,-y)$ добиваме $f(-1+f(-y-1))+f(y)=f(-y-1)+y-1$, што се сведува на $-f(1+f(y+1))+f(y)=-f(y+1)+y-1$. Конечно, ако последното равенство го собереме со (1) добиваме $f(y)=y$.

Од досега изнесеното следува дека динствени решенија на (*) се $f(x)=f$ и $f(x)=2-x$.

6. Низата цели броеви $a_1,a_2,...$ ги задоволува условите

1) $1\le a_j\le 2015$ за секој $j\ge 1$,

2) $k+a_k\ne l+a_l$ за секои $1\le k<l$.

Докажи дека постојата природни броеви b и N такви што важи

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right|\le 1007^2$$

за секои природни броеви m и n такви што $n>m\ge N$.

Решение. Дефинираме $c_n=n+a_n$, за $n\in\mathbb{N}$. Нека претпоставиме дека сите членови на низата $\{c_n\}$ се различни и $n+1\le c_n\le n+2015$.

Да го разгледаме множеството $M=\mathbb{N}\setminus\{c_n\mid n\in\mathbb{N}\}$. За секој $n\in\mathbb{N}$, множеството $\{1,2,...,n+2015\}$ ги содржи членовите на низата $c_1,c_2,...,c_n$, па во овој случај има најмногу 2015 елементи на множеството M. Според тоа, $|M|\le 2015$ и како $1\notin M$ важи $|M|\ge 1$. Ќе докажеме дека броевите $b=|M|$ и $N=\max M$ ги задоволуват условите на задачата.

Нека $k\ge N$. Од претходните разгледувања следува дека множеството $I_k=M\cup\{c_1,...,c_k\}$ е подмножество од множеството $\{1,2,...,k+2015\}$ и ги содржи броевите $1,2,...,k+1$. Тоа значи дека

$$I_k=\{1,2,...,k+1\}\cup\{k+1+i\mid i\in R_k\},$$

за некое $(b-1)-$елементно подмножество од $R_k\subset\{1,2,...,2014\}$. Со $S(X)$ да го означиме збирот на елементите на множеството X. Од една страна важи $S(I_k)=S(M)+\sum_{i=1}^{k}(i+a_i)$, а од друга $S(I_k)=\sum_{i=1}^{k}i+b(k+1)+S(R_k)$, па со одземање на последните равенства добиваме

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i - b) = S(R_k) + b - S(M),$$

па затоа

$$\sum_{i=m+1}^{n}(a_i - b) = S(R_n) - S(R_m), \text{ за } n > m \geq N .$$

Притоа за секој $k \geq N$ важи

$$1 + 2 + ... + (b-1) \leq S(R_k) \leq 2014 + 2013 + ... + (2016 - b),$$

па затоа

$$| S(R_n) - S(R_m) | \leq (b-1)(2-15-b) \leq \tfrac{1}{4}((b-1) + (2015-b))^2 = 1007^2 .$$