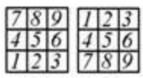
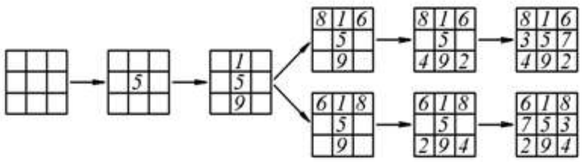
Сава Гроздев, Бугарија
Веселин Ненков, Бугарија

МАГИЧНИ КВАДРАТИ

1. Магични квадрати од трет ред. Вообичаено на тастатурата на калкулаторите и телефоните броевите од 1 до 9 се распоредени на еден од двата начина, покажани на цртеж 1. Со други зборови дирките кои ги содржат овие цифри, се распоредени во единечните полињата на квадрат со димензии 3×3. Така се добиваат два начина за распоредување на броевите од 1 до 9 во полињата на 3×3 квадрат. Задачата за такви распоредувања е разгледувана од памтивек, но со поставување на некои дополнителни услови. Овие услови се: секој од броевите од 1 до 9 се содржи во точно едно поле на квадратот, а збировие на броевите кои се наоѓаат во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали на квадратот се еднакви на еден ист број K_3. Квадратот со димензии 3×3, чии единечни полиња се пополнети на укажаниот начин, се нарекува *магичен квадрат от трет ред*, а бројот K_3 – *магична константа*.



Цртеж 1



Цртеж 2

За да конструираме еден магичен квадрат од трет ред, потребно е да ја знаеме вредноста на магичната константа K_3. Бидејќи $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, трите реда на квадратот ги содржат сите броеви од 1 до 9 точно по еднач и збирот на броевите во секок ред е еднаков на бројот K_3, добиваме $K_3=\frac{45}{3}=15$. Потоа, меѓу броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, сите можни тројки кои имаат збир 15 се: $1+5+9=15$, $1+6+8=15$, $2+4+9=15$, $2+5+8=15$, $2+6+7=15$, $3+4+8=15$, $3+5+7=15$, $4+5+6=15$. Од овие равенства се добиваат следните заклучоци: 1) бројот 5 учествува во четири различни равенства; 2) секој непарен број, различен од 5, се среќава во точно две од разгледуваните равенства; 3) секој парен број се среќава во точно три од равенствата. Бидејќи единствено централното поле на квадратот учествува во четири збирови, од 1) следува, дека во него се наоѓа бројот 5 (цртеж 2). Од 2) следува, дека 1 се наоѓа во некое од средните полиња на првиот ред, третиот ред, првата колона или третата колона. Нека 1 се наоѓа во средното поле на првиот ред (цртеж 2). Бидејќи $K_3=15$, добиваме дека во средното поле на третиот ред е бројот 9 (цртеж 2). Од 3) и $K_3=15$ следува, дека во двете крајни полиња на првиот ред се наоѓаат броевите 6 и 8. Тоа е можно да се направи на два начина (види цртеж 2). Ако земеме предвид, дека збировите на двате дијагонали се еднакви на $K_3=15$, заклучуваме дека двете крајни полиња на третиот ред ги содржат броевите 2 и 4 (за соодветните случаи види цртеж 2). Конечно, останува да пополниме две полиња со 3 и 7, чии места следуваат од равенството $K_3=15$ (цртеж 2). Така на цртеж 2 добивме два магични квадрати.

На аналоген начин, во останатите три случаи за позицијата на бројот 1, добиваме уште по два магични квадрати. Конечно, добивме осум магичнк квадрати, прикажани на цртеж 3.

Првиот квадрат во првиот ред на цртеж 3 се добива од вториот, третиот и четвртиот квадрат во истиот ред, ако овие квадрати се ротираат околу центарот соодветно за агол $90°$, $180°$ и $270°$ во насока на движењето на стрелката на часовникот. Овој квадрат се добива од првиот и третиот квадрат во вториот ред, ако се земе симетрија соодветно спрема вертикалната оска на квадратот (минува низ броевите 1, 5, 9) и хоризонталната оска на квадратот (минува низ броевите 3, 5, 7). Овој квадрат се добива и од вториот и четвртиот квадрат после нивно симетричното пресликување во однос на една од дијагоналите (во првиот случај тоа е 8, 5, 2, а во вториот – 6, 5, 4). На овој начин се гледа, дека секој квадрат на цртеж 3 се добива од останатите седум со ротации за $90°$, $180°$ и $270°$ и осни симетрии спрема четирите оски на симетрија на квадратот. Затоа сметаме дека овие осум квадрати не се различни меѓу себе и ги нарекуваме *еквивалентни*. Заради еквивалентноста, *имаме единствен магичен квадрат од трети ред*. Треба да забележиме уште дека заради симетријата и квадратите на цртеж 1 исто така се еквивалентни и не се сметаат за различни.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Цртеж 3

3	7	5
8	6	1
4	2	9

1	9	5
6	2	7
8	4	3

7	3	5
2	4	9
6	8	1

9	1	5
4	8	3
2	6	7

7	5	3
2	9	4
6	1	8

1	5	9
6	7	2
8	3	4

3	5	7
8	1	6
4	9	2

9	5	1
4	3	8
2	7	6

Цртеж 4

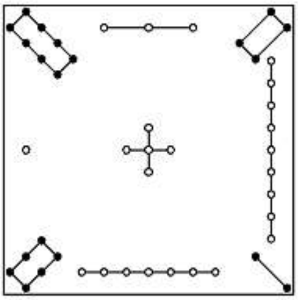
1	3	2
3	2	1
2	1	3

6	21	18
27	15	3
12	9	24

Цртеж 5

Нека сега во секој квадрат од првиот ред на цртеж 3 прво ги замениме местата на вторита и третита колона, а потоа во добиените квадрати ги замениме местата на првиот и вториот ред. Така ги добиваме квадратите од првиот ред на цртеж 4. Потоа во секој квадрат од вториот ред на цртеж 3 да ги замениме местата на првиот и вториот ред, а потоа во добиените квадрати да ги замениме местата на вториот и третиот ред. Така ги добиваме квадратите од вториот ред на цртеж 4. Во секој од квадратите од првиот ред на цртеж 4 едната дијагонала има збир 15, а другата има збир различен од 15 (за квадратите од лево на десно тој збир е соодветно 18, 6, 12, 24). Збировите во секоја од дијагоналите на квадратите од вториот ред на цртеж 4 се различни од 15. Такви квадрати, во кои само збирот на броевите во некоја од дијагоналите е различен од магичната константа, се нарекуваат *полумагични*. Се разгледуваат и квадрати од трет ред, во кои броевите не се задолжително различни. Доволно е сите збирови по редици, колони и дијагонали да се еднакви на една константа, која исто така се нарекува магична константа (цртеж 5). Овие квадрати се нарекуваат *нетрадиционни магични квадрати*. Во првиот квадрат на цртеж 5 (латински квадрат) магичната константа е 6, а во вториот – таа е 45.

Да забележиме дека магичниот квадрат од трет ред во Кина е познат пред илјадници години и се нарекува Ло Шу. Се разбира тогаш цифрите не постоеле во вид, во кој ги знаеме денес и тој е прикажан на начинот кој е даден на цртеж 6. Постојат различни легенди, кои тврдат, дека овој квадрат бил запишан на грбот на голема желка. Квадратот Ло Шу и до денес се користи како талисман во Индија и Далечниот Исток.



Цртеж 6

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Цртеж 7

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Цртеж 8

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

Цртеж 9

2. Магични квадрати од $n-$ти ред. Природно обопштување на магичните квадрати од трет ред се квадратите од тип $n\times n$, кои ги имаат својствата: секој од броевите од 1 до n^2 ($n\geq 1$) се содржи во точно едно поле на квадратот, а збировите на броевите кои се наоѓаат во секој ред, секја колона и во двате дијагонали на квадратот, се еднакви на еден и ист број K_n. Таквите квадрати се нарекуваат *магични квадрати од* $n-$*ти ред*, а бројто K_n – *магична константа*. За $n=3$ констатиравме дека со точност до еквивалентност постои само еден магичен квадрат. За $n=1$ очигледно постои единствен магичен квадрат. За $n=2$ лесно се гледа дека таков квадрат не постои. Првиот документиран магичен квадрат од $4-$ти ред е откриен во релеф од $XI-XII$ век во индискиот град Каджурао (цртеж 7). На цртеж 8 е даден магичен квадрат од $5-$ти ред, а на цртеж 9 – магичниот квадрат од $6-$ти ред, кој во $XIII-$ти век е откриен од кинескиот математичар Јан Хуеи.

Еден од најпознатите квадрати е прикажан во горниот десен агол на гравурата „Меланхолија" на Албрехт Дирер (цртеж 10). Овој квадрат се гледа појасно на цртеж 11. Квадратот на Дирер се смета за ззначаен, бидејќи има различни интересни својства. Некои од нив се: 1) Во средните полиња на долниот ред се наоѓаат броевите 15 и 14, кои го формираат бројот 1514–годината на создавање на гравурата; 2) Секој пар броеви, кои се симетрични во однос на центарот на квадратот, имаат збир $4^2+1=17$; 3) Збирот на броевите во секој од аголните 2×2 квадрати и централниот 2×2 квадрат е еднаков на 34; 4) Магичната

Цртеж 10

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Цртеж 11

1	8	9	16
14	11	6	3
4	5	12	13
15	10	7	2

Цртеж 12

константа $M_4 = 34$ е еднаква на збировите $1+6+16+11 = 14+9+3+8 = 15+5+2+12 = 4+10+13+7$, кои се добиваат со одот на шаховската фигура коњ; 5) За квадратите на броевите се исполнети својствата: а) збировите на квадратите во двата крајни реда са еднакви: $16^2+3^2+2^2+13^2 = 4^2+15^2+14^2+1^2 = 438$; б) збировите на квадратите во двата средни реда са еднакви: $5^2+10^2+11^2+8^2 = 9^2+6^2+7^2+12^2 = 310$; в) збировите на квадратите во двете крајни колони се еднакви: $16^2+5^2+9^2+4^2 = 13^2+8^2+12^2+1^2 = 378$; г) збировите од квадратите во двете средни колони се еднакви: $3^2+10^2+6^2+15^2 = 2^2+11^2+7^2+14^2 = 370$.

Магичната константа K_n во општ случај се пресметува по ист начин, како за K_3. Имено, од $1+2+\cdots+n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, следува $K_n = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Од оваа формула добиваме дека $K_4 = 34$, $K_5 = 65$ и $K_6 = 111$. Овие вредности лесно се проверуваат за квадратите од цртежите 7, 8 и 9, соодветно.

Во општ случај со броевите од 1 до n^2 можеме да конструираме $(n^2)!$ квадрати од тип $n \times n$. Секој квадрат, кој се добива од веќе познат квадрат со ротација за $90°$, $180°$, $270°$ или осна симетрија во однос на некоја од четирите оски на симетрија на квадратот, се смета за *еквивалентен* со веќе разгледаниот. Значи, постојат $(n^2)!/8$ нееквивалентни квадрати од тип $n \times n$. За $n = 3$ имаме $9!/8 = 45\,360$ нееквивалентни 3×3 квадрата, а од нив само еден е магичен. Затоа се поставова прашањето за бројот на магичните квадрати од даден ред n. Францускиот математичар Френикл де Беси (1605-1675) за прв пат ги коснтруирал сите 880 магични квадрати од $4-$ти ред и така го определил нивниот број. Сите 275305224 магични квадрати от $5-$ред се добиени во 1975 г. од М. Билер со помош на компјутер. За $n \geq 6$ не е познат точниот број на магични квадрати.

17	47	30	36	21	43	26	40
32	34	19	45	28	38	23	41
33	31	46	20	37	27	42	24
48	18	35	29	44	22	39	25
49	15	62	4	53	11	58	8
64	2	51	13	60	6	55	9
1	63	14	52	5	59	10	56
16	50	3	61	12	54	7	57

Цртеж13

1	10	19	28	37	46	55
45	54	7	9	18	27	36
26	35	44	53	6	15	17
14	23	25	34	43	52	5
51	4	13	22	31	33	42
39	41	50	3	12	21	30
20	29	38	47	49	2	11

Цртеж 14

1	47	6	48	5	43
35	17	30	16	31	21
36	12	41	13	40	8
42	10	37	9	38	14
29	19	34	20	33	15
7	45	2	44	3	49

Цртеж 15

8	6	4	2
6	4	2	8
4	2	8	6
2	8	6	4

Цртеж 16

Квадратите, во кои само збирот на броевите во некоја од дијагоналите е различен од магичната константа, се нарекуваат *полумагически*. Таков е квадратот од $4-$ти ред на цртеж 12 (збировите на дијагоналите се 26 и 42) и познатиот квадрат на Бенџамин Франклин од $8-$ми ред на цртеж 13 (збировите на дијагоналите са 268 и 298). Се разгледуваат и квадрати од $n-$ти ред, во кои броевите не се задолжително различни и од 1 до n^2. Доволно е сите збирови по редици, колони и дијагонали да се еднакви на една константа, која исто така се нарекува магична константа (цртеж 14, 15). Таквите квадрати се нарекуваат *нетрадиционални магични квадрати* (затоа, кога магичните квадрати кои ги опишавме уште се нарекуваат *традиционални*). Магичните константи на нетрадиционалните магични квадрати од цртежите 14 и 15 се 196 и 150, соодветно. На цртеж 16 е прикажан нетрадиционален полумагичен квадрат.

3. Видови магични квадрати. Некои магични квадрати имаат дополнителни својства, кои во некаква смисла ги прават „помагични“. Еден таков вид квадрати е поврзан со таканаречените скржени дијагонали. Обичните дијагонали на квадратот уште ги нарекуваме *главни дијагонали*. Скршена дијагонала се добива од n полиња кои лежат на линија паралелна на главна дијагонала.

7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4

Цртеж 17

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

Цртеж 18

1	63	3	61	8	58	6	60
16	50	14	52	9	55	11	53
17	47	19	45	24	42	22	44
32	34	30	36	25	39	27	37
57	7	59	5	64	2	62	4
56	10	54	12	49	15	51	13
41	23	43	21	48	18	46	20
40	26	38	28	33	31	35	29

Цртеж 19

Најлесно се разбира кои полиња лежат на скршена дијагонала, кога се земе копија на дадениот квадрат и таа копија се „залепи“ за првиот квадрат. Полињата кои се подредени на права, паралелна на главна дијагонала, формираат *скршена дијагонала*. Така за индискиот квадрат од цртеж 7, после извршување на опишаните дејствија, се добива цртеж 17, од кој се гледа, дека четворките броеви 6,10,11,7; 15,5,2,12; 4,16,13,1; 9,5,8,12; 6,16,11,1; 15,3,2,14 ги формираат сите шест скршени дијагонали на квадратот. Уште повеќе, збировите на броевите на овие скршени дијагонали се еднакви на магичната константа 34. Магичен квадрат, во кој збировите на броевите на сите скршени дијагонали се еднакви на магичната константа, се нарекува *ѓаволски или пандиагонален*.

4. Преобразување на магични квадрати во магични квадрати. Кога располагаме со некој магичен квадрат, од него на определен начин можеме да конструираме нов магичен квадрат. Тука ќе разгледаме два едноставни начина за преобразување на магични квадрати во нови магични квадрати.

10	5	16	3
15	4	9	6
1	14	7	12
8	11	2	13

Цртеж 20

64	2	62	4	57	7	59	5
49	15	51	13	56	10	54	12
48	18	46	20	41	23	43	21
33	31	35	29	40	26	38	28
8	58	6	60	1	63	3	61
9	55	11	53	16	50	14	52
24	42	22	44	17	47	19	45
25	39	27	37	32	34	30	36

Цртеж 21

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

$\rightarrow$

9	6	15	4
2	13	8	11
16	3	10	5
7	12	1	14

$\rightarrow$

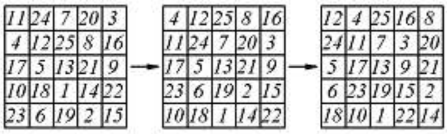
4	6	15	9
11	13	8	2
5	3	10	16
14	12	1	7

Цртеж 22

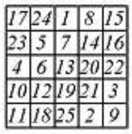
Можда наједноставниот начин за преобразување на магичен квадрат во магичен квадрат е замената на секој број во квадратот со неговиот комплементарен, т.е. замената на бројот x со бројот n^2+1-x. На тој начин од пандијагоналниот индиски квадрат на цртеж 7 се добива пандиагоналниот квадрат на цртеж 20, а од совршениот квадрат на цртеж 19 се добива нов совршен магичен квадрат на цртеж 21, во кој дијагоналните 4×4 квадрати ги замениле местата. Воопшто со овој метод пандијагоналните и совршените квадрати се преобразуваат во квадрати од сответниот вид. Со овој метод од асоциативен квадрат не се добива нов квадрат, бидејќи новиот квадрат е еквивалентен на првиот. Со овој метод од полумагичен квадрат се добива полумагичен квадрат.

Следниот метод, се користи во две варијанти.

1) Ги менуваат местата редовите си број i и $n+1-i$, а потоа се менуваат местата на колоните со истите броеви. На цртеж 22 е покажано како индискиот квадрат се преобразува во нов квадрат после размена на првиот и четвртиот ред, а потова и се менуваат новите прва и четврта колона.



Цртеж 23



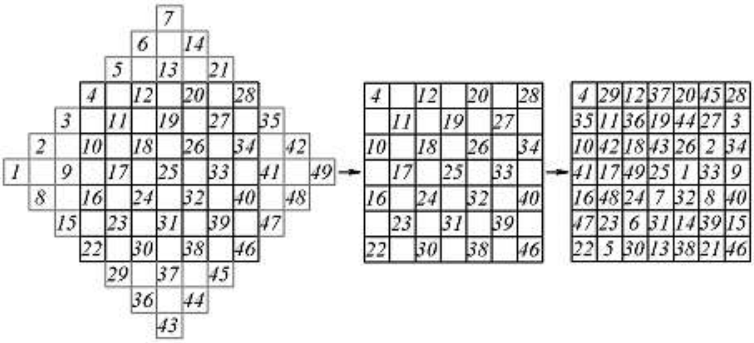
Цртеж 24

2) Се разменуваат паровите редови (i, j) и $(n+1-i, n+1-j)$, потоа се разменуваат паровите колони со истите броеви. На цртеж 23 е покажано добивањето на нов квадрат од квадратот на цртеж 8 после истовременото разменување на прв со втор ред и на трет со четврт, а потоа со разменување на паровите колони со исти броеви.

Да забележиме дека опишаните дејствија можат да се извршат и во обратен редослед, т.е. прво да се разменат колоните, а потоа редовите.

5. Некои методи за конструирање на магичени квадрати. Едно од најважните прашања, поврзани со магичените квадрати, е како да се конструира магичен квадрат од даден ред n. Постојат различни методи за конструирање на магични квадрати. Тука ќе разгледаме само неколку едноставни метода. Се покажува дека методите за добивање на магичен квадрат од ред n зависат од видот на бројот n. Затоа ќе разгледаме одделни методи во секој од овие случаи.

5.1. Конструирање на квадрати от ред $n = 2k+1$ $(k \geq 1)$. Прво ќе го разгледаме таканаречениот *индиски метод*. Правилата на овој метод се следните: Прво се запишува бројот 1 во средното поле на најгорниот ред. Потоа се запишуваат последователно следните природни броеви одејќи по комплементарните дијагонали на квадратот. Кога ќе се добие број од висот mn $(m \geq 1)$ следниот број се запишува под него и пополнувањето на квадратот продолжува на истиот начин.



Цртеж 25

Опишаниот метод е прикажан на цртеж 24 за квадрат од петти ред.

Следниот метод, кој ќе го разгледаме се нарекува *метод на тераси*. Над секоја од страните се конструираат последователно редови од квадрати со должина $n-2$, $n-4, \ldots, 1$. Така се добива назабен квадрат (цртеж 25). Во квадратите на добиената фигура последователно дијагонално се внесуваат броевите од 1 до n^2 (цртеж

25). Терасите, кои содржат броеви кои не припаѓаат во дадениот квадрат се залепуваат за соодветните на нив спротивни страни квадратот. Така се пополнуваат празните полиња на квадратот со броеви од терасите. Овој метод е прикажан на цртеж 25 за квадрат од $7-$ми ред.

Ќе разгледаме уште еден метод, кој се нарекува *метод на латински квадрати*. Квадрат од тип $n \times n$, во чии полиња се запишани броевите $0,1,2,\ldots,n-1$ така, што секој ред и секоја колона го содржи точно еднаш секој од овие броеви, се нарекува *латински квадрат од ред* n. На цртеж 26 се прикажани два латински квадрати од седми ред. Ако два латински квадрата од ред n се поставата еден врз дриг се добива нов квадрат во чии полиња се наоѓааs подредени парови броеви. Кога во полињата на новиот квадрат се содржат сите n^2 различни подредени парови тој квадрат се нарекува *грчко-латински квадрат од ред* n. Два латински квадрати од ред n, од кои може да се добие грчко-латински квадрат, се нарекуваат *ортогонални*. После преклопувањето на двата латински квадрати на цртеж 26 се добива третиот квадрат на истиот цртеж, кој е грчко-латински квадрат. Значи, овие латински квадрати са ортогонални.

3	4	1	5	0	2	6
6	3	4	1	5	0	2
2	6	3	4	1	5	0
0	2	6	3	4	1	5
5	0	2	6	3	4	1
1	5	0	2	6	3	4
4	1	5	0	2	6	3

1	4	0	2	6	5	3
4	0	2	6	5	3	1
0	2	6	5	3	1	4
2	6	5	3	1	4	0
6	5	3	1	4	0	2
5	3	1	4	0	2	6
3	1	4	0	2	6	5

31	44	10	52	06	25	63
64	30	42	16	55	03	21
20	62	36	45	13	51	04
02	26	65	33	41	14	50
56	05	23	61	34	40	12
15	53	01	24	60	32	46
43	11	54	00	22	66	35

Цртеж 26

Еден метод за конструирање на пар ортогонални латински квадрати ос ред $n=2k+1$ е следниов: За првиот квадрат се избира произволна пермутација $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ на броевите $0,1,2,\ldots,n-1$ во која $i_n=k$. Таа пермутација се запишува во последниот ред на квадратот. Потоа останатите редови се пополнуваат оддолу-нагоре кога секоја следна пермутация се добива од претходната со преместување на првиот член на крајот. На тој начин, од пермутацијата $(4,1,5,0,2,6,3)$ е добиен првиот квадрат на цртеж 26. За вториот квадрат се избира произволна пермутација $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ на броевите $0,1,2,\ldots,n-1$, во која $j_n=k$. Таа пермутација се запишува во првиот ред на квадратот. Потоа останатите редови се пополнуваат одгоре-надолу така што секоја следна пермутација се добива од претходната со преместување на првиот член на крајот. На тој начин, од пермутацијата $(1,4,0,2,6,5,3)$ е добиен вториот квадрат на цртеж 26.

23	33	8	38	7	20	46
47	22	31	14	41	4	16
15	45	28	34	11	37	5
3	21	48	25	30	12	36
42	6	18	44	26	29	10
13	39	2	19	43	24	35
32	9	40	1	17	49	27

11	33	2	20	43	38	28
35	4	19	44	41	22	10
3	21	46	40	23	13	29
15	45	42	25	12	30	6
48	36	24	14	32	5	16
37	27	8	31	7	18	47
26	9	34	1	17	49	39

Цртеж 27

Кога имаме на располагање два ортогонални квадрати A и B од нив можеме да добиеме два магични квадрати C' и C'' со помош на формулите:

$$c'_{ij}=na_{ij}+b_{ij}+1 \text{ и } c''_{ij}=nb_{ij}+a_{ij}+1,$$

каде a_{ij}, b_{ij}, c'_{ij} и c''_{ij} се броеви, запишани во полињата кои се наоѓаат во $i-$тиот ред и $j-$тата колона соодветно на квадратите A, B, C' и C''. Така од двата латински квадрата на цртеж 26 се добиени магичните квадрати на цртеж 27.

5.2. Конструкција на квадрати од ред $n = 4k \quad (k \geq 1)$. Ќе го разгледаме само *методот на Роуз-Бол*. Кај овој метод прво се запишуваат броевите од ` до n^2 одгоре-надолу во природниот редослед. Потоа квадратот се дели на k^2 квадрати со страна k. Во секој од овие квадрати се повлекуваат главните дијагонали (на цртеж 28 тоа е направено за $k = 3$, т.е. $n = 12$). На крајот секој број што лежи на некоја од дијагоналите го разменува местото со бројот кој му е симетричен во однос ма центарот на квадратот. На овој начин со помош на квадратот од цртеж 28 е добиен магичниот квадрат од $12-$ти ред прикажан на цртеж 29. Друга варијанта на овој метод е да се разменат местата на броевите кои не лежат на некоја од дијагоналите, со нивните симетрични во однос на центарот на квадратот.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

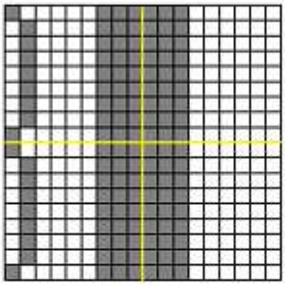
Цртеж 28

144	2	3	141	140	6	7	137	136	10	11	133
13	131	130	16	17	127	126	20	21	123	122	24
25	119	118	28	29	115	114	32	33	111	110	36
108	38	39	105	104	42	43	101	100	46	47	97
96	50	51	93	92	54	55	89	88	58	59	85
61	83	82	64	65	79	78	68	69	75	74	72
73	71	70	76	77	67	66	80	81	63	62	84
60	86	87	57	56	90	91	53	52	94	95	49
48	98	99	45	44	102	103	41	40	106	107	37
109	35	34	112	113	31	30	116	117	27	26	120
121	23	22	124	125	19	18	128	129	15	14	132
12	134	135	9	8	138	139	5	4	142	143	1

Цртеж 29

5.3. Конструкција на квадрати од ред $n = 4k + 2 \quad (k \geq 1)$. Ќе го разгледаме само *методот на четирите квадрата*. Во овој метод квадратот се разделува на четири $(2k+1) \times (2k+1)$ квадрата (цртеж 30). Во горниот лев квадрат, според некој од познатите методи, се конструира традиционален магичен квадрат од ред $2k+1$. Квадратите во долниот десен, горниот десен и долниот лов агол се пополнуват со нетрадиционни магически квадрати, коите се добиваат од традиционалниот кога на секој од броевите му додадеме $(2k+1)^2$, $2(2k+1)^2$ и $3(2k+1)^2$, соодветно. Потоа броевите кои се наоѓаат во обоените полиња на горните два квадратиа, како што е покажано на цртеж 30, ги заменуваат местата со броевите кои ги завземаат истите позиции, кои се наоѓаат во квадратите, кои стојат точно под нив. Обоениот раб во централниот дел на дадениот квадрат содржи $2k-2$ колони. На цртеж 30 квадратот е од ред $18 = 4 \cdot 4 + 2$. Затоа покажаниот централен раб се состои от $2 \cdot 4 - 2 = 6$ колони, кои се симетрични во однос на вертикалната оска на квадратот.

Пример за конструкција на квадрат од овој вид е даден за $n = 14$. Во горниот лев агол го ставаме првиот традиционален магичен квадрат од цртеж 27. Нетрадиционалните квадрати ги добиваме на опишаниот начин со додавање на 49, $2 \cdot 49$ и $3 \cdot 49$. Така го добиваме квадратот од цртеж 31. Средниот раб, во кој ќе ги разместуваме броевите, се состои од $2 \cdot 3 - 2 = 4$ колони (две од едната и две од другата страна на вертикалната оска на квадратот). После разместувањето на броевите во соодветните полиња добиваме магичен квадрат од $14-$ти ред (цртеж 32).



Цртеж 30

23	33	8	38	7	20	46	121	131	106	136	105	118	144
47	22	31	14	41	4	16	145	120	129	112	139	102	114
15	45	28	34	11	37	5	113	143	126	132	109	135	103
3	21	48	25	30	12	36	101	119	146	123	128	110	134
42	6	18	44	26	29	10	140	104	116	142	124	127	108
13	39	2	19	43	24	35	111	137	100	117	141	122	133
32	9	40	1	17	49	27	130	107	138	99	115	147	125
170	180	155	185	154	167	193	72	82	57	87	56	69	95
194	169	178	161	188	151	163	96	71	80	63	90	53	65
162	192	175	181	158	184	152	64	94	77	83	60	86	54
150	168	195	172	177	159	183	52	70	97	74	79	61	85
189	153	165	191	173	176	157	91	55	67	93	75	78	59
160	186	149	166	190	171	182	62	88	51	68	92	73	84
179	156	187	148	164	196	174	81	58	89	50	66	98	76

Цртеж 31

170	33	8	38	7	167	193	72	82	106	136	105	118	144
47	169	31	14	41	151	163	96	71	129	112	139	102	114
15	192	28	34	11	184	152	64	94	126	132	109	135	103
3	168	48	25	30	159	183	52	70	146	123	128	110	134
42	153	18	44	26	176	157	91	55	116	142	124	127	108
13	186	2	19	43	171	182	62	88	100	117	141	122	133
179	9	40	1	17	196	174	81	58	138	99	115	147	125
23	180	155	185	154	20	46	121	131	57	87	56	69	95
194	22	178	161	188	4	16	145	120	80	63	90	53	65
162	45	175	181	158	37	5	113	143	77	83	60	86	54
150	21	195	172	177	12	36	101	119	97	74	79	61	85
189	6	165	191	173	29	10	140	104	67	93	75	78	59
160	39	149	166	190	24	35	111	137	51	68	92	73	84
32	156	187	148	164	49	27	130	107	89	50	66	98	76

Цртеж 32

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Цртеж 33

17	89	71
113	59	5
47	29	101

29	131	107
167	89	11
71	47	149

Цртеж 34

6. Магични квадрати од прости броеви. Од нетрадиционалните магични квадрати посебно се инетерсни оние кои содржат само прости броеви. Јасно, бројот 2 не може да учествува во таков квадрат, бидејќи во спротивно редот и колоната во кои се наоѓа ќе имаат различна парност од парноста на другите редови и колони. Затоа обично 2 се заменува со 1. При овој услов во почетокот на XIX – тиот век Хенри Дадни за прв пат конструирал магичен квадрат од трет ред кој се состои од прости броеви (цртеж 33). Магичната константа на квадратот на Дадни е 111.

Други магични квадрати од трет ред, кои се состојат само од прости броеви и не ја го содржат 1, се дадени на цртежите 34 и 35. На почетокот на XIX – тиот век Ален Џонсон открива магичен квадрат од четврт ред, цртеж 36. Магичната константа на квадратот на Џонсон е 120. На цртеж 37 се дадени уште два магични квадрати од четврт ред. Се забележува дека сите броеви во првиот квадрат на цртеж 37 имаат цифра на единици 7. Овие магични квадрати не се составени од последователни прости броеви, може да се каже дека имаат извесен недостаток.

37	79	103
139	73	7
43	67	109

59	53	101
113	71	29
41	89	83

Цртеж 35

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

Цртеж 36

7	367	587	197
617	167	97	277
227	557	337	37
307	67	137	647

19	23	103	107
113	97	29	13
83	79	47	43
37	53	73	89

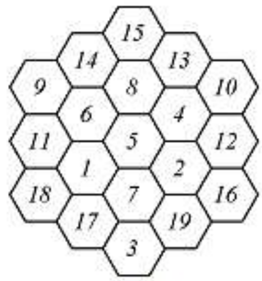
Цртеж 37

Во 1913 година Џ. Менси го конструира магичниот квадрат од цртеж 39, кој е од 12 – ти ред и ги содржи првите 143 последователни непарни прости числа. Уште повеќе, тој докажал дека тоа е можно најмалиот таков квадрат. Магичната константа на квадратот на Менси е 4514.

7. Магични шестаголници. На прв поглед шестаголниците немат ништо заедничко со разгледуваните прашања. Меѓутоа со правилни шестаголници, исто така како и со квадрати, може да се покрие целата рамнина. Затоа логично се поставува прашањето за можноста дел од рамнината да се покрие со шестаголници и во нив да се запишат првите природни броеви (толку, колку што е бројот на шестаголниците) така што збировите во сите насоки да се еднакви.

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Цртеж 38



Цртеж 39

Одговорот на ова прашање го дал К. У. Адамс. Тој во 1910 година се зафатил со решавање на задачата за конструкција на магичен шестаголник од трет ред (назабен шестаголник, чии страни содржат полиња од по три еднакви шестаголници) и успеал да ја реши во 1957 година. Меѓутоа го загубил листот со решението и повторно го нашол во 1962 година. На почетокот во 1963 година Адамс магичниот шестаголник му го пратил на познатиот популаризатор на математичките досетки Мартин Гарднер. Гарднер не верувал, дека добил некој нов резултат и затоа го прашал специјалистот за оваа тема Чарлз Триг. Иако Триг не знаел ништо за прашањето, тој докажал дека постојат магични шестаголници само од прв и трет ред. Случајот со еден шестаголник е јасен. Останува случајот со магичен шестаголник од трет ред. Тој веќе бил откриен од Адамс. Тој шестаголник е прикажан на цртеж 39. Се состои од 19 помали шестаголници, кои ги содржат броевите од 1 до 19. Магичната константа на шестаголникот на Адамс е 38.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарднер, М. Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977.
2. Гуревич, Е. Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969.
3. Макарова, Н. Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009.
4. Филеп, Л., Г. Березнай. История на цифрите. София, Техника, 1988.