Jens Carstensen, Алија Муминагиќ, Данска

Еден тригонометриски идентитет за аглите на триаголник и негова примена

Во оваа статија ќе дадеме неколку докази за еден тригонометриски идентитет и ќе дадеме неколку негови примени. Ќе ја покажеме следната теорема:

Теорема. Докажи дека во триаголникот ABC е исполнето равенството $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}$, каде α,β и γ се аглите на триаголникот а r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница во триаголникот, соодветно.

Доказ 1. Ако ги искористиме тригонометриските идентитети

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\gamma=1-\sin^2\frac{\gamma}{2},\quad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

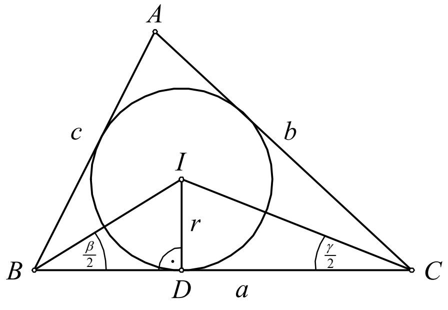
и равенството $\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ кое е исполнето во секој триаголник, добиваме

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma&=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}\right)+1=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+1=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+1\qquad(1)\end{aligned}$$

Ќе покажеме дека

$$\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{a}\cos\frac{\alpha}{2},\qquad(2)$$

каде што a е должината на страната BC во триаголникот ABC (види црт. 1). Воведуваме ознаки како на црт. 1. Од правоаголните триаголници BDI и CDI имаме $\overline{BD}=r\cdot ctg\frac{\beta}{2}$ и $\overline{CD}=r\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$. Заради равенството $\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC}=a$, од претходните равенства добиваме



Црт. 1

$$a=r\left(ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}\right)=r\frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=r\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=r\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},$$

т.е.

$$\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{a}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Со замена на (2) во (1) добиваме:

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma&=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+1=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{r}{a}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+1=2\frac{r}{a}\sin\alpha+1\\&=\frac{2r}{a}\cdot\frac{a}{2R}+1=\frac{r}{R}+1.\end{aligned}$$

(го искористивме тригонометрискиот идентитет $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$ и синусната теорема $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, односно $\frac{a}{2R}=\sin\alpha$).

Доказ 2. Ако T е плоштината, а s полупериметарот на триаголникот, тогаш

$$\frac{r}{R}+1=\frac{r+R}{R}=\frac{\frac{T}{s}+\frac{abc}{4T}}{\frac{abc}{4T}}=\frac{4T^2+sabc}{sabc}=1+\frac{4T^2}{sabc}=1+\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}$$
$$=\frac{abc+4\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot\frac{1}{2}(a+c-b)\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)}{2abc}.$$

Ако последното равенство го средиме добиваме

$$\frac{r+R}{R}=\frac{a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

(Во доказот 2 ги користевме равенствата $T=rs$, $R=\frac{abc}{4T}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$, $T^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ - Хероновата формула и косинусната теорема.)

Доказ 3. Ќе покажеме дека: ако α,β,γ се агли во триаголник, тогаш $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ се корени на равенката

$$4R^2x^3-4R(R+r)x^2+(s^2+r^2-4R^2)x+(2R+r)^2-s^2=0, \qquad (3)$$

каде ознаките s,r,R се како и во претходниот дел.

Со ознаки како на цртеж 2, лесно се покажува дека

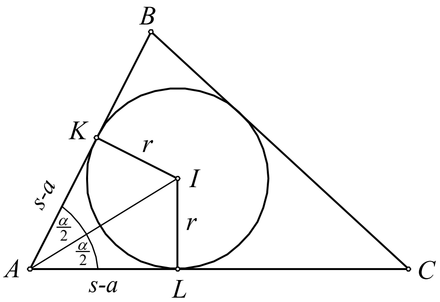
$$\overline{AK}=\overline{AL}=r\cdot ctg\frac{\alpha}{2} \qquad (4)$$

Од синусната теорема

$$a=2R\cdot\sin\alpha \qquad (5)$$

Со собирање на (4) и (5) добиваме

$$rctg\frac{\alpha}{2}+2R\sin\alpha=s.$$



Црт. 2

Ако последното равенство го квадрираме, добиваме:

$$r^2ctg^2\frac{\alpha}{2}+4Rrctg\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+4R^2\sin^2\alpha=s^2 \qquad (6)$$

Бидејќи $ctg\frac{\alpha}{2}\sin\alpha=ctg\frac{\alpha}{2}\cdot2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$, $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$ со замена во (6) добиваме $r^2\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+4R(1+\cos\alpha)+4R^2(1-\cos^2\alpha)-s^2=0$, и по средување на последното равенство, добиваме

$$4R^2\cos^3\alpha-4R(R+r)\cos^2\alpha+(s^2+r^2-4R^2)\cos\alpha+(2R+r)^2-s^2=0.$$

Значи, бројот $\cos\alpha$ е корена на равенката (3). На ист начин покажуваме дека и $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ се корени на таа равенка.

Сега ќе се вратиме наа доказот на нашето тврдење. Според виетовите формули имаме

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{r}{R}+1,$$
$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\gamma=\frac{s^2+r^2-4R^2}{4R^2},$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{s^2-(2R+r)^2}{4R^2}.$$

Примена

Пример 1. Докажи ја Carnot-овата теорема: Збирот на растојанијата од центарот на опишаната кружница до страните на триаголникот ABC еднаква е на збирот радиусите на впишаната и опишаната кружница, т.е.

$$d_a + d_b + d_c = R + r .$$

Воведуваме ознаки како на цртеж 3. Аглите на цртежот означени со исти ознаки се еднакви (како периферисќи и централни агли над ист кружен лак). Од правоаголните триаголници BOO_1, COO_2 и AOO_3 добиваме:

$$\cos\alpha = \frac{d_a}{R},\ \cos\beta = \frac{d_b}{R},\ \cos\gamma = \frac{d_c}{R}$$

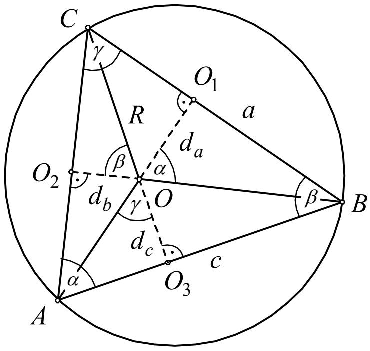
Со собирање на овие равенства добиваме:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{d_a}{R} + \frac{d_b}{R} + \frac{d_c}{R} = \frac{d_a + d_b + d_c}{R}$$

Според тоа $\frac{r+R}{R} = \frac{d_a + d_b + d_c}{R}$, т.е.

$$d_a + d_b + d_c = R + r .$$

Забелешка. Разгледај ги случаите кога триаголникот ABC е правоаголен или тапоаголен, и доказите изведи ги геометриски.



Црт. 3

Пример 2. Во тетивен четириаголник $ABCD$ збирот на радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABC и ADC е еднаков на збирот на радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABD и BCD.

Доказ. Нека е даден тетивен четириаголник $ABCD$ кој е впишан во кружница со радиус R, и r_1, r_2, r_3, r_4 се радиуси на кружниците впишани во триаголниците ABC, ADC, BCD и ABD соодветно. Треба да покажеме дека $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$. Аглите на цртежот 4 означени со исти ознаки се еднакви меѓу себе (зошто?). Во теоремата покажавме дека ако α, β и γ се агли во триаголник и r и R се радиуси на впишаната и опишаната кружница, тогаш

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R} \qquad (*)$$

Применувајќи го (*) на триаголникот ABC добиваме:

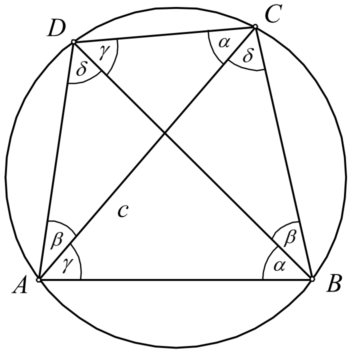
$$\cos\gamma + \cos\delta + \cos(\alpha+\beta) = \frac{r_1}{R} + 1$$

односно,

$$r_1 = [\cos\gamma + \cos\delta + \cos(\alpha+\beta) - 1]\cdot R \qquad (7)$$

Ако равенството (*) пак го примениме на триаголникот ADC, добиваме

$$r_2 = [\cos\alpha + \cos\beta + \cos(\gamma+\delta) - 1]\cdot R \qquad (8)$$



Црт. 4

Со собирање на равенствата (7) и (8) добиваме:

$$r_1 + r_2 = [\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 2]\cdot R \qquad (9)$$

(За да го добиеме последното равенство, го искористивме равенството $\cos(\alpha+\beta)=-\cos(\gamma+\delta)$). Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па според тоа $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=180^\circ$, па $\cos(\alpha+\beta)=\cos[180^\circ-(\gamma+\delta)]=-\cos(\gamma+\delta)$).

На потполно ист начин се покажува равенството

$$r_3+r_4=[\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta-2]\cdot R\,. \qquad (10)$$

Од (9) и (10) добиваме $r_1+r_2=r_3+r_4$.