

I олимпијада

1. Докажи дека дробката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати ниту за еден природен број n .

Решение. Од $3 \cdot (14n+3) - 2 \cdot (21n+4) = 1$, следува дека броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n \in \mathbb{N}$. Според тоа, дадената дробка не може да се скрати за еден природен број n .

2. Во $\mathbb{R}$ реши ги равенките:

а) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$

б) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 1$

в) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$

Решение. Од $(x-1)^2 \geq 0$, следува $x^2 \geq 2x-1$, па затоа за $x \geq \frac{1}{2}$ равенките имаат решение. Со квадрирање, левата страна го добива обликот $2x+2|x-1|$.

а) Решение на равенката е секој реален број x таков што $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

б) Равенката нема реални решенија.

в) Решение на равенката е $x = \frac{3}{2}$.

3. Нека $x \in \mathbb{R}$ и реалните броеви $a, b, c, \cos x$ ја задоволуваат равенката

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0.$$

Напиши ја аналогната квадратна равенка за $a, b, c, \cos 2x$, а потоа спореди ги дадената и добиената равенка за $a = 4, b = 2, c = -1$.

Решение. Равенката

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

ја множиме со

$$4(a \cos^2 x - b \cos x + c)$$

и по средувачето на изразот од левата страна добиваме

$$4a^2 \cos^4 x + 2(4ac - 2b^2) \cos^2 x + 4c^2 = 0.$$

Ако го искористиме идентитетот $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, од последната равенка добиваме

$$a^2 (1 + \cos 2x)^2 + (4ac - 2b^2)(1 + \cos 2x) + 4c^2 = 0,$$

или

$$a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + (a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2) = 0. \quad (1)$$

За $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ од дадената равенка добиваме

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

а од равенката (1) добиваме

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0.$$

4. Конструирај правоаголен триаголник со должина на хипотенузата c , ако се знае дека должината на тежишната линија повлечена кон хипотенузата е геометриска средина на должините на катетите.

Решение. Нека α е еден од острите агли во бараниот триаголник. Тогаш $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\frac{a}{c}\frac{b}{c}$, каде a и b се должини на катетите на бараниот триаголник. Должината на тежишната линија спуштена кон хипотенузата е половина од должината на хипотенузата, па од условот на задачата добиваме $\frac{c^2}{4} = ab$. Од претходните равенства следува $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ и како α е остар агол имаме $\alpha = 15^\circ$ или $\alpha = 75^\circ$.

Значи, треба да конструираме триаголникот со страна c и налегнати агли на неа $\alpha = 15^\circ$ и $\beta = 75^\circ$. Задачата има единствено решение.

5. Во рамнина е дадена отсечка AB и една нејзина внатрешна точка M . Над отсечките AM и MB како страни конструирани се квадрати $AMCD$ и $MBEF$ кои се наоѓаат на иста страна од правата AB . Кружниците опишани околу овие квадрати, со центри P и Q , се сечат во точки M и N , соодветно.

а) Докажи дека правите AF и BC се сечат во точката N .

б) Докажи дека правата MN минува низ една иста точка S , независно од изборот на точката M .

в) Најди го геометриското место на средините на отсечките PQ .

Решение. Поставуваме координатен систем така што правата AB е x -оска, а правата AD е y -оска. Точката A има координати $(0,0)$ и нека точките B и M имаат координати $B(b,0)$ и $M(m,0)$.

а) Точките F , C , P и Q имаат координати $F(m, b-m)$, $C(m, m)$, $P(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$ и $Q(\frac{b+m}{2}, \frac{b-m}{2})$. Равенките на правите AF и BC се

$$AF: y = \frac{b-m}{m}x \quad \text{и} \quad BC: y = \frac{m}{m-b}(x-b).$$

Равенките на кружниците опишани околу квадратите $AMCD$ и $MBEF$ се

$$(x - \frac{m}{2})^2 + (y - \frac{m}{2})^2 = \frac{m^2}{2} \quad \text{и} \quad (x - \frac{b+m}{2})^2 + (y - \frac{b-m}{2})^2 = \frac{(b-m)^2}{2}.$$

Втората пресечна точка на овие кружници е точката

$$N\left(\frac{m^2b}{b^2-2mb+2m^2}, \frac{mb(b-m)}{b^2-2mb+2m^2}\right).$$

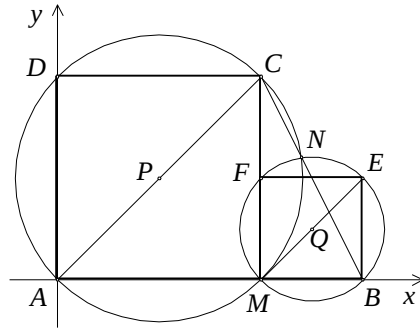
Лесно се проверува дека оваа точка лежи на правите AF и BC .

б) Равенката на правата која минува низ точките M и N е

$$y = \frac{b}{2m-b}(x-m).$$

Ако точката M_1 има координати $(m_1, 0)$ тогаш равенката на правата M_1N_1 е

$$y = \frac{b}{2m_1-b}(x-m_1).$$



Црп. 1.1.

Правите MN и M_1N_1 се сечат во точката $S(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$. Координатите на S не зависат од m и m_1 , па според тоа сите прави MN минуваат низ иста точка S .

в) Координатите на средината на отсечката PQ се $(\frac{b+2m}{4}, \frac{b}{4})$ т.е. $x = \frac{b+2m}{4}$ и $y = \frac{b}{4}$. Бидејќи $0 \leq m \leq b$, бараното геометриско место на точки е отсечка со крајни точки $(\frac{b}{4}, \frac{b}{4})$ и $(\frac{3b}{4}, \frac{b}{4})$.

6. Дадени се рамнини α и β кои се сечат во права p и точки $A \in \alpha$, $C \in \beta$ такви што $A, C \notin p$. Конструирај рамнокрак трапез $ABCD$, ($AB \parallel CD$) во кој може да се впише кружница, така што $B \in \alpha$ и $D \in \beta$.

Решение. Нека $ABCD$ е бараниот трапез. Тогаш, $AB \parallel CD \parallel p$ (ако рамнината $ABCD$ ја сече правата p во точка X , тогаш правите $AB = AX$ и $CD = CX$ нема да се паралелни). Значи, низ точките A и C треба да се конструираат прави паралелни со p и на нив да се најдат точки B и D , така што добиениот четириаголник да ги задоволува условите на задачата. Бидејќи трапезот $ABCD$ е тангентен добиваме

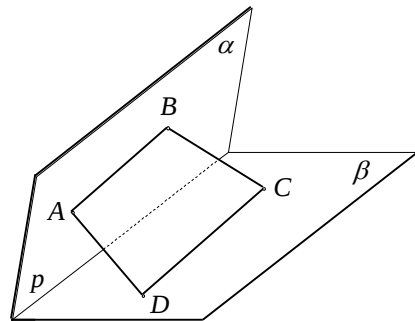
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{AD},$$

т.е.

$$\overline{CD} = 2\overline{AD} - \overline{AB}.$$

Ако F' е средина на страната AB , $FF' \perp r$ и E е ортогоналната проекција на A врз CD , тогаш $\overline{AF'} = \overline{EF}$, па според тоа

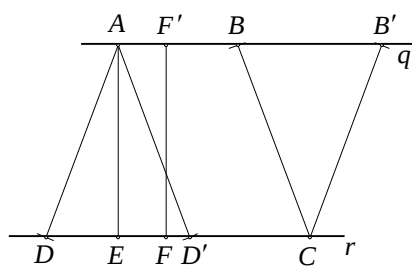
$$\overline{AB} = 2\overline{AF'} = 2\overline{EF} \text{ и } \overline{CD} = 2\overline{CE} - \overline{AB}.$$



Црп. 1.2.

Значи, $\overline{AD} = \overline{CE}$, од што следува дека точката D лежи на кружница со радиус CE и центар во A . За да задачата има решение потребно и доволно е да $\overline{AD} = \overline{CE} \geq \overline{FF'}$.

Конструкцијата непосредно следува од претходните разгледувања (црт. 1.3).



Црт. 1.3.