Алекса Малчески, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ТЕОРЕМА НА ЧЕВА

Во геометријата многу тврдења се докажани пред стотици, па дури и илјади години. Некои од овие тврдења, т.е. нивната примена се посебно интересни и разновидни, па затоа често пати се составен дел од решенијата на голем број задачи, а особено на геометриските задачи кои се задаваат на престижните натпревари по математика. Едно такво тврдење е теоремата на Чева, која е предмет на нашите разгледувања.

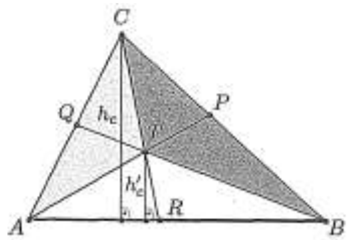
Теорема (Чева). Нека P,Q,R се точки на правите BC,CA,AB определени со страните на триаголникот ABC. Правите AP,BQ,CR се сечат во една точка ако и само ако

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=1. \qquad (1)$$

Доказ. Нека правите AP,BQ,CR се сечат во точката T. Нека h_c и $h_c^{'}$ се дожините на нормалите повлечени од точките C и T на правата AB, соодветно (цртеж десно). Имаме

$$P_{\triangle ACR}=\frac{\overline{AR}\cdot h_c}{2},\ P_{\triangle BCR}=\frac{\overline{BR}\cdot h_c}{2},$$

$$P_{\triangle ATR}=\frac{\overline{AR}\cdot h_c^{'}}{2},\ P_{\triangle BTR}=\frac{\overline{BR}\cdot h_c^{'}}{2}.$$



Според тоа,

$$P_{\triangle CAT}=P_{\triangle ACR}-P_{\triangle ATR}=\frac{\overline{AR}\cdot(h_c-h_c^{'})}{2} \text{ и}$$

$$P_{\triangle BCT}=P_{\triangle BCR}-P_{\triangle BTR}=\frac{\overline{BR}\cdot(h_c-h_c^{'})}{2}.$$

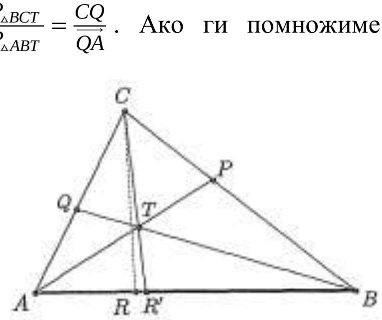
Бидејќи векторите $\overrightarrow{AR}$ и $\overrightarrow{RB}$ се олинеарни и истонасочени добиваме

$$\frac{P_{\triangle CAT}}{P_{\triangle BCT}}=\frac{\frac{\overline{AR}\cdot(h_c-h_c^{'})}{2}}{\frac{\overline{BR}\cdot(h_c-h_c^{'})}{2}}=\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}.$$

Аналогно се докажува дека $\frac{P_{\triangle ABT}}{P_{\triangle CAT}}=\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ и $\frac{P_{\triangle BCT}}{P_{\triangle ABT}}=\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}$. Ако ги помножиме последните три равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{P_{\triangle ABT}}{P_{\triangle CAT}}\cdot\frac{P_{\triangle BCT}}{P_{\triangle ABT}}\cdot\frac{P_{\triangle CAT}}{P_{\triangle BCT}}=1,$$

т.е. точно е равенството (1).



Обратно, нека P,Q,R на страните $BC,CA,$ AB се такви што важи (1). Нека праите AP и

BQ се сечат во точката T и нека правата CT ја сече страната AB во точката R' (цртеж десно). Тогаш точките P, Q, R' припаѓаат на страните BC, CA, AB и се такви што правите AP, BQ, CR' се сечат во точката T. Затоа од претходно докажаното следува дека $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = 1$. Од последното равенство и од (1) следува дека $\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Понатаму, на дадена отсечка постои единствена точка која таа отсечка ја дели во даден однос, па од последното равенство следува дека $R \equiv R'$, што значи дека правите AP, BQ, CR се сечат во една точка. ■

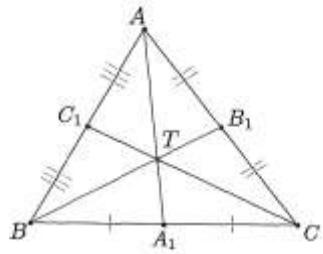
Последица 1. Тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка (тежиште на триаголникот).

Доказ. а) Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB на триаголникот ABC (цртеж десно). Тогаш

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = 1, \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1, \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1,$$

т.е.

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1,$$



па од теоремата на Чева следува дека тежишните линии AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка. ■

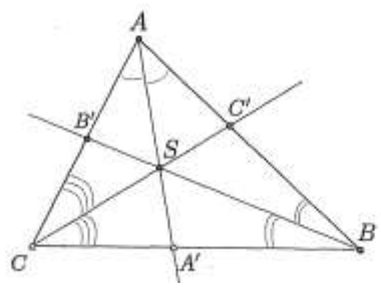
Последица 2. Симетралите на внатрешните агли на триаголникот се сечат во една точка (центар на впишаната кружница во триаголникот).

Доказ. Нека A', B', C' се точките во кои симетралите на аглите во темињата A, B, C ги сечат страните BC, CA, AB (цртеж десно). Од теоремата за симетралата на агол следува

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}, \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}.$$

Ако ги помножиме последните три равенства добиваме

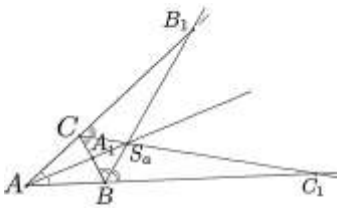
$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = 1.$$



Конечно, од теоремата на Чева следува дека симетралите на внатрешните агли на триаголникот се сечат во една точка. ■

Последица 3. Симетралата на еден внатрешен агол на триаголникот и симетралите на преостанатите два надворешни агли се сечат во една точка (центар на припишана кружница на триаголникот).

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да ја разгледуваме само симетралата на внатрешниот агол во темето A. Нека A_1, B_1, C_1 се пресечните точки на симетралите на внатрешниот агол во темето A и симетралите на надворешните агли во темињата B и C со правите BC, AC, AB (цртеж десно). Од теоремата за симетралата на аголот



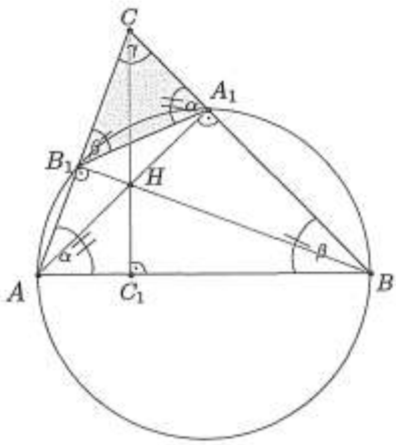
во темето A следува $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$ и теоремата за сметралата на надворешен агол следува $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$, Ако ги помножиме последните три равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = 1.$$

Конечно, од теоремата на Чева следува дека симетралата на внатрешниот агол и симетралите на другите два надворешни агли се сечат во една точка. ■

Последица 4. Висините на триаголникот се сечат во една точка (ортоцентар на триаголникот).

Доказ. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините на триаголникот повлечени од темињата A, B, C кон страните BC, CA, AB (цртеж десно). Од $\measuredangle AB_1B = \measuredangle AA_1B = 90^\circ$ следува дека четириаголникот BA_1B_1A е тетивен. Затоа $\measuredangle CB_1A_1 = \measuredangle ABC$. Триаголниците ABC и A_1B_1C имаат еден заеднички агол и еден пар еднакви агли, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$. Аналогно се докажува



дека $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ и $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$. Ако ги искористиме претходните равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = 1.$$

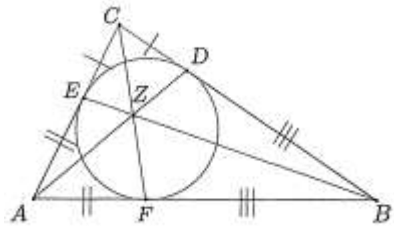
Конечно, од теоремата на Чева следува дека висините на триаголникот се сечат во една точка. ■

Последица 5. Ако впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно, тогаш правите AD, BE, CF се сечат во една точка (точка на Жергон на триаголник).

Доказ. Заради еднаквоста на тангентните отсечки на впишаната крружница важи $\overline{CD}=\overline{CE}, \overline{BD}=\overline{BF}, \overline{AF}=\overline{AE}$ (цртеж десно). Оттука следува

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{BD}}=1.$$

Конечно, од теоремата на Чева следува дека правите AD, BE, CF се сечат во една точка. ■



Во претходните разгледувања ја докажавме теоремата на Чева и како последици од истата докажавме пет тврдења кои се однесуваат на повеќето значајни точки за триаголникот. Во продолжение ќе разгледаме неколку задачи кои се задавани на различни натпревари и за чие решавање ќе ја искористиме теоремата на Чева.

Задача 1. Даден е остроаголен ΔABC така што $\overline{AB}\neq\overline{AC}$. Нека V е пресекот на симетралата на аголот кај темето A со страната BC и D е подножјето на висината од спуштена од темето A кон страната BC. Ако E и F се пресечните точки на опишаната кружница на $\triangle AVD$ со страните CA и AB соодветно, докажи дека AD, BE и CF се сечат во иста точка.

Решение. Имаме $\measuredangle ADV=90^\circ$ па затоа точките A, D, V, E, F лежат на иста кружница и $\measuredangle BFV=180^\circ-\measuredangle AFV=90^\circ$, $\measuredangle CEV=180^\circ-\measuredangle AEV=90^\circ$. Значи, $\triangle BFV\sim\triangle BDA$ и $\triangle CEV\sim\triangle CDA$, од каде добиваме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}} \text{ и } \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{VC}} \qquad (1)$$

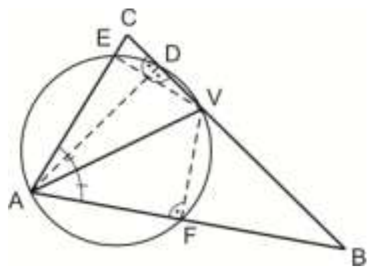
Но,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{VC}} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{VC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$$

т.е.



$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \qquad (3)$$

Исто така $\measuredangle FAV=\measuredangle VAE$ па следува

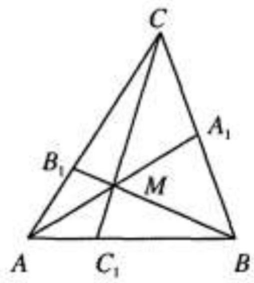
$$\overline{AE}=\overline{AF} \qquad . \qquad (4)$$

Сега од (3) и (4) имаме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=1.$$

Конечно, од теоремата на Чева следува дека AD, BE и CF се сечат во иста точка. ■

Задача 2. Нека M е внатрешна точка за $\triangle ABC$. Правите AM, BM, CM ги сечат страните BC, CA, AB во точките A_1, B_1, C_1, соодветно така што $P_{CB_1M} = 2P_{AC_1M}$. Докажи дека точката A_1 е средина на страната BC ако и само ако $P_{BA_1M} = 3P_{AC_1M}$.



Решение. Нека A_1 е средината на страната BC. Од теоремата на Чева следува дека $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1$. Оттука добиваме , т.е. $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{B_1A}}{\overline{CB_1}}$, т.е. $B_1C_1 \parallel BC$, па затоа

$$P_{BC_1M} = P_{CB_1M} = 2P_{AC_1M} \text{ и } P_{AB_1M} = P_{AC_1M}.$$

Тогаш

$$\tfrac{1}{3} = \frac{P_{AC_1M}}{P_{AMC}} = \frac{\overline{C_1M}}{\overline{MC}} = \frac{P_{BC_1M}}{P_{BMC}} = \frac{2P_{AC_1M}}{2P_{BA_1M}}$$

па затоа $P_{BA_1M} = 3P_{AC_1M}$.

Обратно, нека $P_{AC_1M} = 1, P_{CB_1M} = 2$ и $P_{BA_1M} = 3$, $P_{BC_1M} = x$, $P_{CA_1M} = 3y$ и $P_{AB_1M} = 2z$. Треба да докажеме дека $y = 1$. Имаме

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{P_{AC_1M}}{P_{AMC}} = \frac{\overline{C_1M}}{\overline{MC}} = \frac{P_{BC_1M}}{P_{BMC}} = \frac{x}{3(y+1)} .$$

Аналогно

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3y}{3(z+1)} \text{ и } \frac{2}{3(y+1)} = \frac{2z}{y+1}.$$

Ако ги помножиме овие неравенства добиваме $xyz = 1$. Затоа $z = \frac{1}{xy}$ и од првото равенство следува дека

$$xy = \frac{3y^2+3y-2}{2}. \tag{1}$$

Аналогно од второто равенство добиваме дека

$$2(1+\tfrac{1}{xy}) = xy + y. \tag{2}$$

Ако од (1) замениме во (2) го добиваме равенството

$$(3y^2 + 3y - 2)^2 + 2y(3y^2 + 3y - 2) - 12y(y+1) = 0,$$

кое е еквивалентно со равенството

$$(y-1)(3(y+2)(3y^2 + 3y + 2) + 6y^2 - 16) = 0.$$

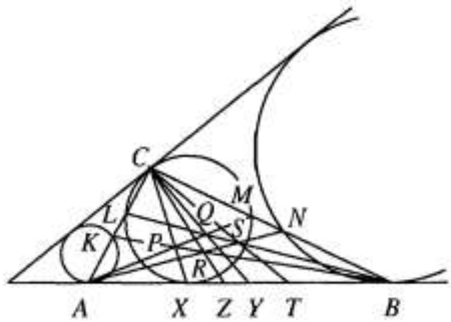
Од (1) следува дека $3y^2 + 3y > 2$ и како $y > 0$ заклучуваме дека

$$3(y+2)(3y^2 + 3y + 2) + 6y^2 - 16 > 6(3y^2 + 3y - 2) - 16 > 8.$$

Затоа $y = 1, x = 2$ и $z = \frac{1}{2}$, со што задачата е решена. ■

Задача 3. Три кружници $k_i(O_i,r_i), i=1,2,3, r_1<r_2<r_3$, кои не се сечат внатрешно ги допираат краците на даден агол. Едниот крак на аголот ги допира k_1 и k_3 во точките A и B соодветно, а другиот крак ја допира k_2 во точката C. Пресечните точки на AC со k_1 и k_2 се означени со K и L, соодветно, а пресечните точки на BC со k_2 и k_3 се означени со M и N, соодветно. Правите низ C кои минуваат низ $P=AM\cap BK$, $Q=AM\cap BL$, $R=AN\cap BK$ и $S=AN\cap BL$ ја сечат AB во точките X,Y,Z и T, соодветно. Докажи, дека $\overline{XZ}=\overline{YT}$.

Решение. Ако F и E се вторите допирни точки на k_1 и k_2 со краците на аголот, тогаш од



$$\overline{AF}^2=\overline{AL}\cdot\overline{AC}, \overline{CE}^2=\overline{CK}\cdot\overline{CA}$$

и $\overline{AF}=\overline{CE}$ следува дека $\overline{AL}=\overline{CK}$. Според тоа, $\overline{AK}=\overline{CL}$ и аналогно $\overline{CM}=\overline{BN}$. Од теоремата на Чева за точките P и S наоѓаме

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{AK}\cdot\overline{CM}}{\overline{KC}\cdot\overline{MB}} \text{ и } \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}=\frac{\overline{AL}\cdot\overline{CN}}{\overline{LC}\cdot\overline{NB}}.$$

Ако ги помножиме последните равенства добиваме $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{TB}}{\overline{AT}}$, па затоа

$$\frac{\overline{AX}+\overline{XB}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{TB}+\overline{AT}}{\overline{AT}}, \text{ т.е. } \overline{AT}=\overline{BX},$$

одкаде следува дека

$$\overline{AX}=\overline{BT}. \qquad (1)$$

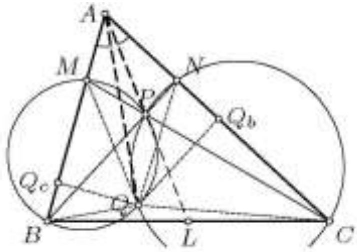
Аналогно, ако ја искористиме теоремата на Чева за точките Q и R, добиваме

$$\overline{AZ}=\overline{YB}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува дека $\overline{XZ}=\overline{YT}$. ■

Задача 4. Во триаголникот ABC точките M и N се соодветно на страните AB и AC такви, што правата MN е паралелна со страната BC. Нека P е пресекот на правите BN и CM. Кружниците опишани околу $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ се сечат во две различни точки P и Q. Докажи дека $\measuredangle BAQ=\measuredangle CAP$.

Решение. Нека правата AP ја сече BC во точка L. Од теоремата на Чева следува



$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=1,$$

т.е. L е средина на страната BC. Нека L_b и Q_b (односно L_c и Q_c) се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од L и Q на AC (односно на AB).

Бидејќи $\measuredangle QBN = \measuredangle QPC = \measuredangle QNC$ и аналогно $\measuredangle QMB = \measuredangle QCN$, триаголниците BQM и NQC се слични. Од оваа сличност следува дека

$$\frac{\overline{QQ_b}}{\overline{QQ_c}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LL_c}}{\overline{LL_b}},$$

па затоа $\triangle Q_bQQ_c \sim \triangle L_cLL_b$ и притоа важи

$$\measuredangle BAQ = \measuredangle Q_cAQ = \measuredangle Q_cQ_bQ = \measuredangle L_bL_cL = \measuredangle CAL = \measuredangle CAP. \ \blacksquare$$

Задача 5. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Кружницата k ги допира страните AD и BC соодветно во точките D и C. Кружницата k ја сече страната AB во точките K и L и притоа важи $\overline{DL} = \overline{CL}$. Нека E е средината на страната CD. Докажи, дека пресекот на дијагоналите AC и BD лежи на правата KE.

Решение. Нека E е средината на CD, O е пресекот на AC и BD, $X = AC \cap DK$ и $Y = BD \cap CK$. Од теоремата на Чева за $\triangle DKC$ следува, дека доволно е да го докажеме равенството

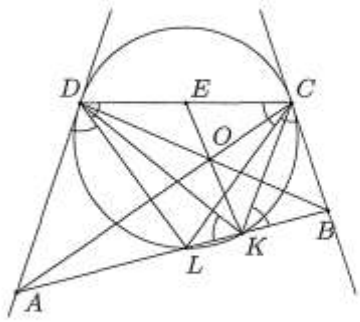
$$\frac{\overline{DX}}{\overline{XK}} \cdot \frac{\overline{KY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}} = 1.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{\overline{DX}}{\overline{XK}} = \frac{\overline{YC}}{\overline{KY}} \iff \frac{P_{ACD}}{P_{AKC}} = \frac{P_{DCB}}{P_{DKB}} \iff \frac{P_{AKC}}{P_{DKB}} = \frac{P_{ACD}}{P_{DCB}}.$$

Ако искористиме, дека $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD$ и $\measuredangle AKD = \measuredangle BKC$, последното равенство се сведува на равенството

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\overline{DK} \cdot \overline{KB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}. \qquad (1)$$



Од $\triangle ALD \sim \triangle AKD$ следува

$$\frac{\overline{DL}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AK}}. \qquad (2)$$

Од $\triangle BKC \sim \triangle BLC$ следува

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BC}}. \qquad (3)$$

Ако ги помножиме (2) и (3) и искористиме, дека $\overline{DL} = \overline{CL}$, го добиваме равенството

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AK}} \cdot \frac{\overline{BK}}{\overline{BC}},$$

кое е еквивалентно на равенството (1). ■