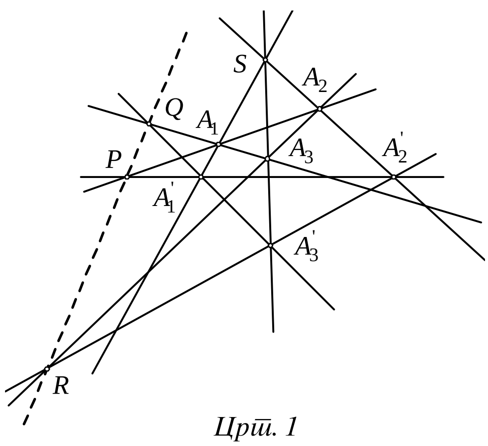
Игор Димовски, Прилеп

ТЕОРЕМА НА ДЕЗАРГ

Во еден од претходните броеви на Сигма користејќи ја теоремата на Менелај беше докажана теоремата на Дезарг. Оваа теорема е една од фундаменталните во евклидовата геометрија, но истата е од огромно значење за проективната геометрија. Токму затоа во оваа статија подетално ќе се запознаеме со теоремата на Дезарг и некои нејзини примени.

Теорема 1. Нека два триаголници $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се поставени во рамнината така што соодветните страни не им се паралелни, а правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се сечат во една точка. Ако P е пресечна точка на правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$, R е пресечна точка на правите A_2A_3 и $A_2'A_3'$, а Q на правите A_1A_3 и $A_1'A_3'$, тогаш ***точките P, Q и R се колинеарни***!

Доказ. Нека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ лежат во рамнината Ψ, така што соодветните страни не им се паралелни, правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се сечат во точката S и $A_1A_2 \cap A_1'A_2' = P$, $A_2A_3 \cap A_2'A_3' = R$ и $A_1A_3 \cap A_1'A_3' = Q$. (*Црт 1*).



Црт. 1

Нека B е точка во просторот, надвор од рамнината Ψ, таква што A_3 е нејзината ортогонална проекција врз рамнината Ψ. Полуправите SA_1, SA_2 и SB определуваат едно трирабно ќоше K. Ортогоналната проекција на полуправата SB врз рамнината Ψ е полуправата SA_3, па на полуправата SB постои точка C, таква што ортогоналната проекција на C е точката A_3', која лежи на правата SA_3. Нека Σ е рамнината што ја определуваат точките A_1, A_2 и B, а Π е рамнината што ја определуваат точките A_1', A_2' и C. Бидејќи правата A_1A_2 лежи во Σ, правата $A_1'A_2'$ во Π, пресечната точка P на правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$ лежи во пресекот на рамнините Σ и Π. Значи $\Sigma \cap \Pi \neq \varnothing$, па бидејќи овие две рамнини не се совпаѓаат, нивниот пресек е права p' која минува низ точката P.

Правите BA_1 и CA_1' лежат на иста рамнина определена со ѕидот SA_1B на ќошето K. Ако претпоставиме дека правите BA_1 и CA_1' се паралелни, тогаш ќе бидат паралелни и нивните ортогонални проекции врз рамнината Ψ – A_3A_1 и $A_3'A_1'$. Тоа е во спротивност со претпоставката дека соодветните страни на триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ не се паралелни, па правите BA_1 и CA_1' се сечат во некоја точка Q'. Слично, правите BA_2 и CA_2' се сечат во некоја точка R'. Бидејќи точката Q' лежи на правите BA_1 и CA_1', таа лежи и на рамнините Σ и Π, па лежи и на нивниот пресек – правата p'. Аналогно, и точката R' лежи на p'.

Сега, ортогоналната проекција на правата BA_1 врз рамнината Ψ е правата A_3A_1, а на правата CA_1' е правата $A_3'A_1'$, од што следува дека ортогоналната проекција на нивната пресечна точка Q' врз рамнината Ψ е пресечната точка на правите A_3A_1 и $A_3'A_1'$, т.е. точката Q. Слично се заклучува дека ортогоналната проекција на точката R' е точката R.

Ако со p ја означиме ортогоналната проекција на правата p' врз рамнината Ψ, тогаш точките Q и R, како ортогонални на Q' и R' (кои лежат на p'), лежат на правата p. Конечно, точката P лежи на рамнината Ψ, па нејзина ортогонална проекција е самата точка P. Бидејќи точката P лежи на правата p', лежи и на правата p, па точките ***P, Q и R лежат на истата права p, односно се колинеарни.***

Пример 1. Како можат да се насадат 10 дрвца во 10 реда, така што секоја садница е во три реда и во секој ред има по 3 дрвца.

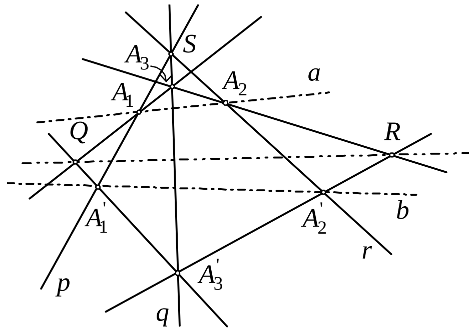
Решение. Дрвцата треба да се распоредат како точите A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3', S, P, Q и R на *црт. 1*.

Забелешка. Една фигура која се состои од ν точки и ν прави, така што на секоја права лежат k од точките и низ секоја точка минуваат k од правите се вика ***конфигурација*** $\boldsymbol{\nu_k}$.

Со теоремата 1 е определена конфигурација 10_3.

Пример 2. Само со линијар да се конструира права која минува низ дадена точка Q и низ пресечната точка на две прави a и b која е недостапна.

Решение. Нека правите a и b се сечат во точката X која не е достапна на цртачкиот лист. Нека S е точка, различна од Q, што не лежи на ниедна од правите a и b. (*Црт. 2*).



Црт. 2

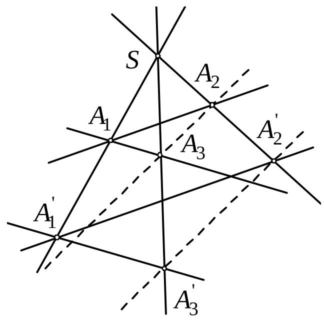
Нека p, q и r се прави што минуваат низ S, не минуваат низ Q и не се паралелни со ниедна од правите a и b. Нека A_1 и A_1' се пресечните точки на правата p со правите a и b соодветно, а A_2 и A_2' се пресечните точки на правата r со правите a и b соодветно. Нека A_3 и A_3' се пресечните точки на правата q со правите QA_1 и QA_1' соодветно. Сега, триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ ги исполнуваат условите од теорема 1, па ако R е пресечната точка на A_2A_3 со $A_2'A_3'$, тогаш (бидејќи пресечна точка на правите A_1A_3 и $A_1'A_3'$ е точката Q), точките R, Q и недостапната точка X со колинеарни. Значи бараната права е правата RQ.

Теорема 2. Нека два триаголници $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се поставени во рамнината така што правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се сечат во една точка. Ако правите A_iA_j и $A_i'A_j'$ се паралелни, Q е пресечна точка на правите A_iA_k и $A_i'A_k'$, а R на правите A_jA_k и $A_j'A_k'$ (i, j и k се меѓусебно различни броеви од множеството {1, 2, 3}), тогаш ***правата QR е паралелна со правите*** $\boldsymbol{A_iA_j}$ ***и*** $\boldsymbol{A_i'A_j'}$.

Доказ. Нека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ лежат во рамнината Ψ така што правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се сечат во една точка S, нека $A_1A_3 \cap A_1'A_3' = Q$, $A_2A_3 \cap A_2'A_3 = R$ и нека правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$ се паралелни (види *црт. 2*, или направи нов цртеж). Нека B е точка надвор од рамнината Ψ чија ортогонална проекција врз Ψ е A_3. На полуправата SB постои точка C чија ортогонална проекција е A_3'. Нека $BA_1 \cap CA_1' = Q'$ и $BA_2 \cap CA_2' = R'$. Јасно е дека ортогоналната проекција на точката Q' врз рамнината Ψ е точката Q, пресечната точка на A_3A_1 и $A_3'A_1'$ – ортогоналните проекции на правите BA_1 и CA_1'. Аналогно, ортогоналната проекција на точката R' е R. Нека Σ е рамнината определена со точките A_1, A_2 и B, а П е рамнината определена со точките A_1', A_2' и C, Правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$ кои лежат во рамнините Σ и П соодветно, се паралелни, па се паралелни и со пресечната права на Σ и П – правата Q'R'. Но паралелни прави при ортогонална проекција се проектираат во паралелни прави, па следи дека отогоналната проекција на Q'R' врз Ψ – ***правата QR е паралелна со правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$***.

Теорема 3. Нека два триаголници $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се поставени во рамнината така што правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се сечат во една точка. Ако два пара соодветни страни се паралелни, тогаш паралелен е и третиот пар соодветни страни.

Доказ. Нека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ лежат во рамнината Ψ така што правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се сечат во една точка S и нека правата A_1A_2 е паралелна со $A_1'A_2'$, а A_1A_3 е паралелна со $A_1'A_3'$. (*Црт. 3*).

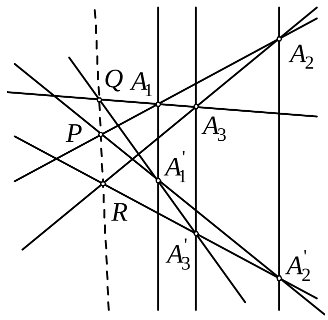


Црт. 3

Од паралелноста на правите A_1A_3 и $A_1'A_3'$ следи дека триаголниците SA_1A_3 и $SA_1'A_3'$ се слични, па од тука $SA_1 : SA_1' = SA_3 : SA_3'$. Од паралелноста на правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$ следи дека триаголниците SA_1A_2 и $SA_1'A_2'$ се слични, па од тука $SA_1 : SA_1' = SA_2 : SA_2'$. Од последните две равенства следува дека $SA_3:SA_3' = SA_2:SA_2'$. Значи правите A_2A_3 и $A_2'A_3'$ се паралелни.

Теорема 4. Нека два триаголници $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се поставени во рамнината така што соодветните страни не им се паралелни, а правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се паралелни. Ако P е пресечна точка на правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$, Q е пресечна точка на правите A_2A_3 и $A_2'A_3'$, а R на правите A_1A_3 и $A_1'A_3'$, тогаш ***точките P, Q и R се колинеарни***!

Доказ. Нека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ лежат во рамнината Ψ, така што соодветните страни не им се паралелни, нека правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се паралелни и нека $A_1A_2 \cap A_1'A_2' = P$, $A_2A_3 \cap A_2'A_3 = R$ и $A_1A_3 \cap A_1'A_3' = Q$. (*Црт 4*).



Црт. 4

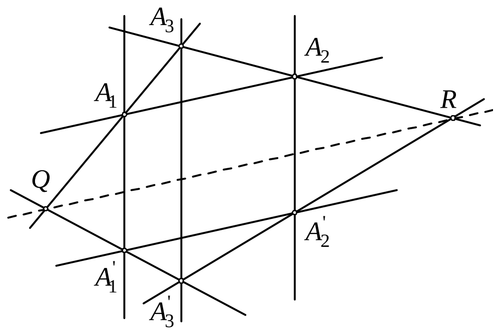
Нека B е точка во просторот, надвор од рамнината Ψ, чија ортогонална проекција врз Ψ е точката A_3. Нека низ точката B е повлечена права r паралелна со правата A_3A_3'. Бидејќи правата r и точката A_3' лежат во иста рамнина, низ A_3' може да се повлече нормала на r која ја сече правата r во точка C. Јасно, ортогоналната проекција на точката C врз Ψ е точката A_3'. Правата BC = r е паралелна со A_3A_3', а A_3A_3' е паралелна со A_1A_1' и A_2A_2', па следи дека BC е паралелна со A_1A_1' и A_2A_2'. Значи точките B, C, A_1 и A_1' лежат на иста рамнина, па бидејќи ортогоналната проекција на BA_1 врз Ψ – правата A_3A_1 ја сече ортогоналната проекција на правата CA_1' врз Ψ – правата $A_3'A_1'$ во точката Q, правата BA_1 ја сече правата CA_1' во точка Q' чија ортогонална проекција врз Ψ е точката Q. Аналогно, правата BA_2 ја сече правата CA_2' во точка R', чија ортогонална проекција врз Ψ е точката R.

Нека Σ е рамнината определена со точките A_1, A_2 и B, а П е рамнината определена со точките A_1', A_2' и C. Бидејќи A_1A_2 и $A_1'A_2'$ се сечат во точката P, пресекот на рамнините Σ и Π е права p' која минува низ точката P. Очигледно точките Q' и R' лежат на правата p', па нивните ортогонални проекции врз Ψ – Q и R лежат на правата p која е ортогонална проекција на правата p' врз Ψ. Но, точката P лежи на Ψ, па нејзината ортогонална проекција е точката P и таа мора да лежи на правата p. Значи, точките P, Q и R лежат на правата p, односно се колинеарни.

Теорема 5. Нека два триаголници $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се поставени во рамнината така што правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се паралелни. Ако правите A_iA_j и $A_i'A_j'$ се паралелни, Q е пресечна точка на правите A_iA_k и $A_i'A_k'$, а R на правите A_jA_k и $A_j'A_k'$ (i, j и k се меѓусебно различни броеви од множеството {1, 2, 3}), тогаш ***правата QR е паралелна со правите A_iA_j и $A_i'A_j'$***.

Доказ. Нека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ лежат во рамнината Ψ така што правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се паралелни. Нека правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$ се пралелни и нека $A_1A_3 \cap A_1'A_3' = Q$ и $A_2A_3 \cap A_2'A_3' = R$ (*црт.5*).

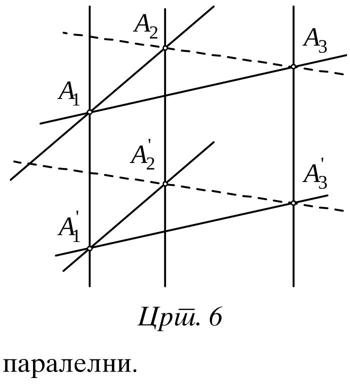
Слично како во доказот на теорема 4, нека B и C се точки чии ортогонални проекции врз Ψ се точките A_3 и A_3' соодветно, така што правата BC е паралелна со правата A_3A_3'. Правите BA_1 и CA_1' се сечат во точка Q' чија ортогонална проекција врз Ψ е точката Q, а правите BA_2 и CA_2' се сечат во точкат R' чија ортогонална проекција врз Ψ е точката R. Слично како во доказот на теорема 2, од паралелноста на правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$ следува дека тие се паралелни со правата Q'R', па и со нејзината ортогонална проекција врз Ψ – правата QR. Значи, правата QR е паралелна со правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$.



Црт. 5

Теорема 6. Нека два триаголници $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се поставени во рамнината така што правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се паралелни. Ако два пара од нивните соодветни страни се паралелни, тогаш паралелни се и третиот пар соодветни страни.

Доказ. Ако правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се паралелни, правата A_1A_2 е паралелна со $A_1'A_2'$ и правата A_1A_3 е паралелна со правата $A_1'A_3'$, тогаш четириаголниците $A_1A_2A_1'A_2'$ и $A_1A_3A_1'A_3'$ се паралелограми, па отсечките $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ се еднакви како и отсечките $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1'A_3'}$ (*црт. 6*). Бидејќи аглите $A_2A_1A_3$ и $A_2'A_1'A_3'$ се меѓусебно еднакви како агли со паралелни краци, следи дека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се складни. Значи аглите $A_2A_3A_1$ и $A_2'A_3'A_1'$ се еднакви и од паралелноста на правите A_1A_3 и $A_1'A_3'$ следува дека правите A_2A_3 и $A_2'A_3'$ се паралелни.



Црт. 6

Дефиниција. Триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се ***централно перспективни*** ако правите A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3' се сечат во една точка или се паралелни.

Дефиниција. Ако за триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ е исполнет еден од условите:

(i) Точките $P = A_1A_2 \cap A_1'A_2'$, $Q = A_1A_3 \cap A_1'A_3'$ и $R = A_2A_3 \cap A_2'A_3$ лежат на иста права;

(ii) Правите A_iA_j, $A_i'A_j'$ и QR се паралелни, каде $Q = A_iA_k \cap A_i'A_k'$, а $R = A_jA_k \cap A_j'A_k'$ (i, j и k се меѓусебно различни броеви од множеството {1, 2, 3}) ;

(iii) Соодветните страни на триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се меѓусебно паралелни;

тогаш триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се ***осно перспективни***.

Од теоремите 1 – 6 непосредно следува следната:

Теорема 7. (Dezarg) Ако два триаголници се централно перспективни, тогаш тие се осно перспективни.

Важи и обратната од теоремата на **Дезарг**:

Теорема 8. Ако два триаголници се осно перспективни, тогаш тие се централно перспективни.

Доказ. Нека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се осно перспективни.

Случај 1: Соодветните страни на триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се меѓусебно паралелни.

а) Ако правата A_1A_1' е паралелна со A_2A_2' (*црт. 6*), тогаш четириаголникот $A_1A_2A_1'A_2'$ е пралелограм, па $A_1A_2 = A_1'A_2'$. Соодветните агли на триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се еднакви, па тие триаголници се складни од што следи дека $A_2A_3 = A_2'A_3'$. Во четириаголникот $A_2A_3A_2'A_3'$ спротивните страни A_2A_3 и $A_2'A_3'$ се паралелни и еднакви, па тој е паралелограм. Следува дека правата A_3A_3' е паралелна со правите A_1A_1' и A_2A_2', односно триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се централно перспективни.

б) Нека правите A_1A_1' и A_2A_2' се сечат во точка S (*црт. 3*). Триаголниците SA_1A_2 и $SA_1'SA_2'$ се слични, па $SA_1:SA_2 = SA_1':SA_2' = A_1A_2:A_1'A_2' = k$, каде k е коефициентот на сличност на триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ кои мора да се слични бидејќи аглите им се еднакви како агли со паралелни краци. Нека правите A_1A_1' и A_3A_3' се сечат во точка T. Заради паралелноста на A_1A_3 и $A_1'A_3'$, триаголниците TA_1A_3 и $TA_1'A_3'$ се слични, па $TA_1:TA_1' = TA_3:TA_3' = A_1A_3:A_1'A_3' = k$. Но, на правата A_1A_1' постои единствена точка X, таква што $XA_1:XA_1' = k$ и бидејќи $SA_1:SA_1' = TA_1:TA_1' = k$, следи дека точките S и T мора да се совпаѓаат. Значи и правата A_3A_3' минува низ пресечната точка S на правите A_1A_1' и A_2A_2', односно триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се централно перспективни.

Случај 2: Еден пар соодветни страни на триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се меѓусебно паралелни, а другите два пара соодветни страни се сечат во точки Q и R, така што правата QR е паралелна со паралелните страни на триаголниците. Нека правите A_1A_2 и $A_1'A_2'$ се паралелни, нека $A_1A_3 \cap A_1'A_3' = Q$, $A_2A_3 \cap A_2'A_3' = R$ и нека QR A_1A_2 $A_1'A_2'$. За триаголниците QA_1A_1' и RA_2A_2' важи QR A_1A_2 $A_1'A_2'$, па тие се централно перспективни.

а) Ако правата A_1A_1' е паралелна со A_2A_2' (*црт.5*), тогаш од $QA_1 \cap RA_2 = A_3$, $QA_1' \cap RA_2' = A_3'$, триаголниците QA_1A_1' и RA_2A_2' ги исполнуваат условите од теорема 5, па следи дека правата A_3A_3' е паралелна со правите A_1A_1' и A_2A_2', односно триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се централно перспективни.

б) Нека правите A_1A_1' и A_2A_2' се сечат во точка S (може да се искористи *црт. 2*). Бидејќи $QA_1 \cap RA_2 = A_3$, $QA_1' \cap RA_2' = A_3'$ и $A_1A_1' \cap A_2A_2' = S$, триаголниците QA_1A_1' и RA_2A_2' ' ги исполнуваат условите од теорема 4, па следи дека точките A_3, A_3' и S се колинеарни. Значи и правата A_3A_3' минува низ пресечната точка S на правите A_1A_1' и A_2A_2', односно триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се централно перспективни.

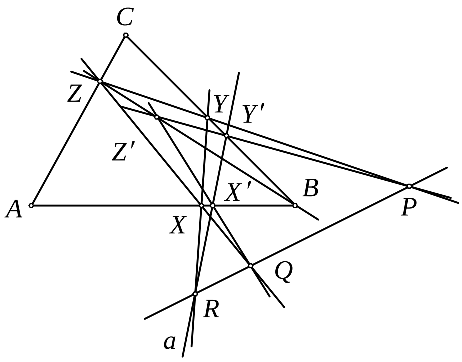
Случај 3: Точките $P = A_1A_2 \cap A_1'A_2'$, $Q = A_1A_3 \cap A_1'A_3'$ и $R = A_2A_3 \cap A_2'A_3$ лежат на иста права. За триаголниците QA_1A_1' и RA_2A_2' важи дека $P = QR \cap A_1A_2 \cap A_1'A_2'$, па тие се централно перспективни.

а) Ако правата A_1A_1' е паралелна со A_2A_2' (*црт. 4*), тогаш триаголниците QA_1A_1' и RA_2A_2' ги исполнуваат условите од теорема 2. Бидејќи $QA_1 \cap RA_2 = A_3$ и $QA_1' \cap RA_2' = A_3'$. Од теоремата 2 следува дека правата A_3A_3' е паралелна со правите A_1A_1' и A_2A_2', односно триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се централно перспективни.

б) Нека правата A_1A_1' ја сече правата A_2A_2' во точка S (*црт. 1*). Бидејќи $QA_1 \cap RA_2 = A_3$ и $QA_1' \cap RA_2' = A_3'$, триаголниците QA_1A_1' и RA_2A_2' ги исполнуваат условите од теорема 1, па следи дека точките S, A_3 и A_3' се колинеарни. Значи правата A_3A_3' минува низ пресечната точка S на правите A_1A_1' и A_2A_2', односно триаголниците $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ се централно перспективни.

Пример 3. Во триаголникот ABC да се впише триаголник XYZ така што страните YZ, ZX и XY минуваат низ три дадени колинеарни точки P, Q и R соодветно.

Решение. *Анализа:* Нека ABC е дадениот триаголник, нека P, Q и R се дадените колинеарни точки и нека XYZ е триаголникот што треба да се конструира (*црт. 7*). Нека *a* е произволна права низ R што ги сече AB и BC. Нека $a \cap AB = X'$ и $a \cap BC = Y'$. Нека $Z' = PY' \cap QX'$. Сега, $XY \cap X'Y' = R$;, $XZ \cap X'Z' = Q$ и $YZ \cap Y'Z' = P$. Бидејќи P, Q и R се колинеарни, триаголниците XYZ и X'Y'Z' се осно перспективни. Според теорема 8 тие се и централно перспективни и бидејќи XX' и YY' се сечат во точката B следува дека и *правата ZZ' минува низ точката B.*



Црт. 7

Конструкција: Се повлекува произволна права *a* низ R што ги сече AB и BC во точките X' и Y' соодветно. Низ точката $Z' = PY' \cap QX'$ се повлекува правата BZ'. Пресечната точка на правите BZ' и AC е точката Z, Y е пресечната точка на правите ZP и BC, а X на правите ZQ и AB. Триаголникот XYZ е впишан во триаголникот ABC и ги иполнува бараните својства.

Користена литература:

1. ***A. G. Merzl/k, V. B. Polonski, M. C. ?kir:*** *Neo~ekvana stxpka ili 113 krasivi zada~i,* Akademi~no izdatelstvo "Marin Drinov"
2. **M.Prvanović**: *Projektivna geometrija*, Naučna knjiga–Beograd, 1968
3. **А. Самарџиски:** *Предавања по проективна геометрија*