Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

БОЕЊА И ПОКРИВАЊА НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

Боењето и покривањето на множества е дел од комбинаториката, кој е често застапен на натпреварите по математика од различно ниво. Притоа, алгоритмите за боење и покривање се применуваат при проучувањето на егзистенцијата на комбинаторни конфигурации, а често пати се користат и да се даде одговор на прашање дали некоја постапка е изводлива. Во натамошните разгледувања ќе презентираме задачи кои се решаваат со боење и покривање на геометриси фигури. Повеќе од презентираните задачи биле задавани на нациналните олимпијади на земјите чии ученици постигнуваат одлични резултати на БМО и ИМО.

Задача 1. Секоја точка од рамнината е обоена во црвена или сина боја. Докажи дека постои многуаголник со еднобојни темиња од барем еден од следниве видови:

- рамностран триаголник со должина на страна 2,
- рамностран триаголник со должина на страна $\sqrt{3}$,
- ромб со должина на страна 1.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои еднобоен рамностран триаголник со должина на страна 1 или таков со должина на страна $\sqrt{3}$. Нека претпоставиме дека не постои триаголник од првиот вид. Тогаш постојат точки A и B, A е црвена, B е сина и $\overline{AB}=1$. Да ја разгледаме точката C за која важи $\overline{AC}=\overline{BC}=2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека C е сина. Ако M е средината на AC, тогаш таа има иста боја како A или како C, па без ограничување на општоста можеме да земеме дека е бојата на A. Да ги разгледаме рамностраните триаголници ADM и AEM. По претпоставка точките D и E се обоени во сина боја, па затоа триаголникот CDE е син, рамностран и има должина на страна $\sqrt{3}$.

Сега да претпоставиме дека постои еднобоен (црвен) триаголник PQR, кој е рамностран и има должина на страна 1. Надворешно за него конструираме рамнострани триаголници PQW, QRU и RPV. Тогаш или точките U,V,W се сите сини и тогаш имаме рамностран син триаголник со должина на страна 2, или една од нив е црвена, на пример U и во тој случај четириаголникот $PQUR$ е ромб со саканите својства. ■

Задача 2. Даден е правилен $n-$аголник. Повлечени се некои дијагонали на $n-$аголникот, така што никои две не се сечат во внатрешна точка и тие го делат $n-$аголникот на триаголници. Притоа од секое теме на $n-$аголникот излегуваат парен број дијагонали. Определи ги сите природни броеви $n \geq 4$ за кои ова е можно.

Решение. *Одговор*. Сите природни броеви n деливи со 3.

Тврдењето ќе го докажеме за сите конвексни $n-$аголници.

Прво ќе докажеме дека за $n=3k$ постои конфигурација. Нека $A_1, A_2, ..., A_{3k}$ се темињата на $n-$аголникот. Го поврзуваме A_1 со A_{3i} и со A_{3i+2} и ги поврзуваме A_{3i} и A_{3i+2} за секој $i=1,2,...,k-1$.

Нека претпоставиме дека многуаголникот е поделен со дијагонали на саканиот начин. Тогаш внатрешностите на добиените триаголници може да се обојат со две бои, сина и црвена, така што секои два триаголници кои имаат заедничка страна се обоени во различни бои. Ова се постигнува така што многуаголникот на почетокот се бои во една боја, а потоа се конструираат дијагоналите една по друга и по секоја конструкција на нова дијагонала, сите обоени површини од една страна на дијагоналата се пребојуваат во друга боја. Очигледно е дека секои два триаголника, кои имаат дијагонала како заедничка страна, се обоени со различни бои. Забележуваме, дека заради условот на задачата дека од секое теме излегуваат парен број дијагонали, сите триаголници кои имаат страна која се совпаѓа со страна на многуаголникот се обоени со иста боја. Без ограничување на општоста нека тоа е сината боја. Ако s е бројот на сините триаголници, а c е бројот на црвените триаголници, тогаш $n+3c=3p$, бидејќи секоја дијагонала е страна на еден син и еден црвен триаголник, а секоја страна на многуаголникот е страна само на еден син триаголник. Затоа n мора да е делив со 3. ■

Задача 3. Определи ги сите природни броеви n такви што страните и дијагоналите на правилен $n-$аголник може да се обојат така што се исполнети следниве услови:

а) Секоја страна или дијагонала е обоена во една боја.

б) За секои три различни бои постои триаголник со темиња меѓу темињата на правилниот $n-$аголник чии страни се обоени со тие три бои.

Решение. *Одговор*. Сите непарни $n \geq 3$.

Бидејќи имаме $\binom{n}{3}$ начини да избереме три различни бои и исто толку начини да избереме триаголник, при саканото боење треба да имаме биекција меѓу множеството триаголници и множеството тројки различни бои. Во случајот, не е можно едно теме на дадениот правилен $n-$аголник да биде заедничка точка на две еднобојни отсечки.

Бидејќи секоја комбинација од три бои се користи точно за еден триаголник, треба да имаме $\binom{n-1}{2}$ триаголници со една страна од фиксирана боја. Но секоја обоена отсечка учествува во $n-2$ триаголника. Според тоа, бројот на отсечките обоени во оваaa фиксирана боја (оттука и во секоја боја) е

$$\binom{n-1}{2}:(n-2)=\frac{n-1}{2}.$$

Тоа значи дека n е непарен број.

Нека $n \geq 3$ е непарен број. Да ги обоиме страните и дијагоналите на следниов начин: со секоја боја боиме една страна и сите дијагонали кои се паралелни со таа страна. Да забележиме дека тоа се $\frac{n-3}{2}$ дијагонали и сите се со различна должина. Да допуштиме дека при ваквото боење има два различни триаголници со една иста комбинација од три бои.Тогаш страните на тие триаголници се две по две паралелни, т.е. триаголниците се слични. Но, овие триаголници се впишани во иста кружница, па бидејќи се слични, тое се складни, што значи дека се совпаѓаат. ■

Задача 4. Определи ги сите природни броеви n за кои квадрат со должина на страна n може да се расече на квадрати со должини на страни 2 или 3.

Решение. Ако $2|n$ или $3|n$, тогаш очигледно поделбата е можна.

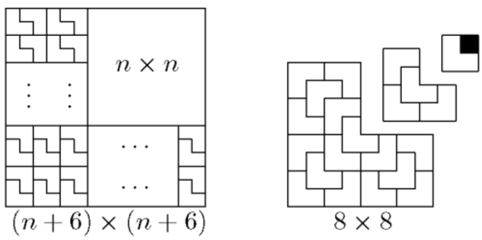
Ќе докажеме дека во останатите случаи поделбата не е можна. Нека n е непарен број. Да го поделиме квадратот на единечни квадрати и секој парен ред да го обоиме со сина боја, а секој непарен ред со црвена боја. Разликата на црвената и сината плоштина во квадратот $n\times n$ е n. Од друга страна, разликата на црвената и сината плоштина во секој 2×2 или 3×3 квадрат е $-3, 0, 3$. Затоа n мора да биде делив со 3. ■

Задача 5. Секое поле на квадратна 50×50 табела е обоено со една од 10 бои. Докажи дека на табелата постојат полиња M, A, B, C, D обоени со иста боја така што A е во ист правец лево од M (не задолжително соседно), B е во ист правец десно од M, C е во ист правец горе од M и D е во ист правеце долу од M.

Решение. Според принципот на Дирихле најмалку $\frac{50^2}{10}$ полиња се обоени со иста боја, да кажеме црна. Меѓу црните полиња има најмногу 50 крајно леви (т.е. нема црни полиња директно лево од нив), најмногу 50 крајно десни, најмногу 50 крајно долни и најмногу 50 крајно горни. Остануваат 50 црни полиња кои не се крајно леви, десни, долни и горни, па било кое од нив може да се земе за полето M. ■

Задача 6. Од квадратна 2012×2012 табла е исечено едно единечно кавдратче. Докажи дека остатокот од таблата може да се покрие со L− тримина.

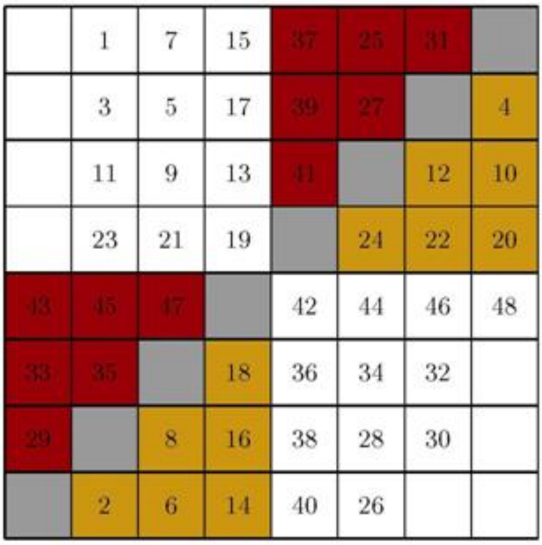
Решение. Ако тврдењето на задачата важи за табла со должина на страна $n\geq 6$, тогаш важи и за табла со должина на страна $n+6$. Последното следува од фактот дека ако од квадрат со должина на страна $n+6$ се исече квадрат со должина на страна n, тогаш остатокот од таблата може да се покрие со правоаголници 2×3, секој од кои е составен од две L− тримина (види го левиот цртеж).



Сега, бидејќи $2012 = 334\cdot 6+8$, останува да докажеме дека табла $8\cdot 8$ без едно аголно поле може дасе покрие на саканиот начин. Исеченото поле припаѓа на еден од аголните 4×4 квадрати. Остатокот на таблата се покрива како на цртежот, па тврдењето се сведува на случајот $n = 4$. Слично, случајот $n = 4$ го сведуваме на тривијалниот случај $n = 2$. ■

Задача 7. Осумте полиња на големата црна дијагонала на шаховската табла ги нарекуваме ограда. Топ се движи по таблата така што не стапнува на едно исто поле повеќе од еднаш и не стапнува на оградата. Кој е најголемиот број скокови кои топот може да ги направи преку оградата?

Решение. *Одговор*: 47 скока.

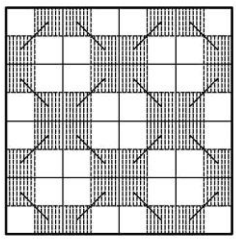


Таблата да ја поделиме на четири 4×4 квадрати и полињата на таблата да ги обоиме како што е прикажано на цртежот десно. Забележуваме дека кога топот скока преку оградата, тогаш почетното или крајното поле на скокот не е бело. Бидејќи 24 полиња не се бели и не се на оградата и на секое поле соодветствуваат најмногу два скока (полето е почетно или полето е крајно), заклучуваме дека бројот на скоковите е помал или еднаков на 48.

Ако има 48 скокови, тогаш секој скок од/во обоено поле треба да е скок во/од бело поле (Зошто?). Според тоа, сите скокови од црвените полиња се во бели полиња под дијагоналата, а оттаму повторно мора да скокнеме на црвено поле. Последното значи дека топот никогаш нема да стапне на жолто поле, што е противречност.

На цртежот горе е даден пример за 47 скокови (броевите во полињата го покажуваат редоследот по кој топот стапнува на полињата). ■

Задача 8. Дадена е квадратна табла 8×8 чии полиња се бели. Во еден чекор можеме да одбереме 2×2 квадрат со сите бели полиња и во него да обоиме црно две дијагонално соседни полиња. Колку чекори најмногу може да се направат?

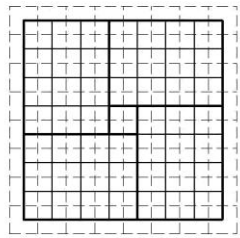


Решение. Ако направиме 16 чекори кои се прикажани на цртежот десно, тогаш ни остануваат 5 празни 2×2 квадрати. Според тоа, може да се направат 21 чекор. Ќе докажеме дека не може да се направата повеќе од 21 чекор.

Центрите на сите полиња на таблата формираат квадратна табла T со димензии 7×7. Секој чекор на квадратот 2×2 може да се разгледува како чекор на едно поле на таблата T, и тоа во еден од двата можни правци: нагоре-лево или нагоре десно. Имаме:

1) Не може да се реализираат чекори во две соседни полиња на таблата T. Навистина, првиот од тие два чекора ќе обои едно од единечните квадратчиња кои соoодветствуваат на соседното поле на таблата.

2) Не е можно да се реализираат чекори во четири полиња соседни на исто поле A на таблата T, Навистина, ако без ограничување на општоста првиот чекор е на долното сосоедно поле на A во правец нагоре-десно, тогаш не може да се направи чекор на долното десно соседно поле на A.



Да ја поделиме таблата на четири правоаголници со димензии 3×4 и еден единичен квадрат (цртеж десно). Од (1) и (2) следува дека во ниту еден правоаголник 3×4 не може да се направат повеќе од пет чекори. Тоа значи дека може да се направата најмногу $4\cdot 5+1=21$ чекор. ■

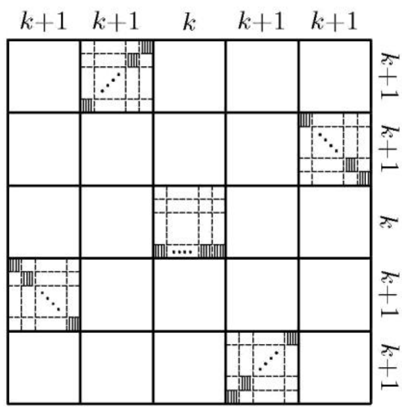
Задача 9. Нека n е природен број. Определи го (во зависност од n) најмалиот природен број m за кој може да се обојат точно n полиња на бесконечна квадратна табла така што е исполнет условот:

Секој правоаголник со страни долж линиите на таблата на кој му се обоени две спротивни аголни полиња содржи најмногу m обоени полиња.

Решение. Одговор: $m=1$ за $n=1$ и $m=[\frac{n}{5}]+2$ за $n\geq 2$.

Го разгледуваме најмалиот правоаголник P со страни долж линиите кој ги содржи сите обоени полиња. Тој долж секоја своја страна има барем по едно обоено поле. Да ги избереме редоследно обоените полиња A, B, C и D долж долната, десната, горната и левата страна на правоаголникот P. За $n\geq 2$ можеме да земеме $A\neq C$ и $B\neq D$ (но може да биде, на пример, $A=B$). Со P_{XY} го означуваме правоаголникот чии две спротивни аголни полиња се X и Y. Тогаш унијата на правоаголниците P_{AB}. P_{BC}, P_{CD}, P_{DA} и P_{AC} ги содржи сите n обоени полиња. Притоа полињата A и C се наоѓаат во по три од овие правоаголници, а полињата B и D во по два. Според тоа, $5m-6\geq n$, т.е. $m\geq[\frac{n}{5}]+2$.

За да покажеме дека оваа оценка се достигнува, доволно е да конструираме пример за $n=5k+4$ и $m=k+2$, каде $k\geq 0$. Една можност е прикажана на цртежот десно. Навистина, секој правоаголник кој содржи некои обоени полиња на централниот $k\times k$ квадрат (кои ги има точно k) може да содржи уште најмногу две обоени полиња, додека секој друг правоаголник содржи најмногу $k+1$ обоено поле од еден квадрат со страна $k+1$ и уште едно поле од друг таков квадрат. ■



Задача 10. Сите квадратчиња на табла 1000×1000 се обоени црно или бело. Познато е дека постојат квадрат 10×10 во кој сите квадратчиња се црни и квадрат

10×10 во кој сите квадратчиња се бели. За секој квадрат K со димензии 10×10 дефинираме негова моќ $m(K)$ како апсолутна вредност на разликата на бројот на црните и бројот на белите полиња во квадратот K. Нека T е 10×10 квадрат кој има најмала моќ меѓу сите квадрати на дадената табла со димензија 10×10. Определи ја најголемата можна вредност за $m(T)$.

Решение. За секој квадрат X со димензии 10×10 нека $b(X)$ е бројот на белите квадратчиња во него, а $c(X)$ е бројот на црните квадратчиња и нека $r(X)=b(X)-c(X)$. Нека Y е 10×10 квадратот кој целиот е бел, а Z е 10×10 квадратот кој целиот е црн. Тогаш $r(Y)=100$ и $r(Z)=-100$. Нека W е променлив 10×10 квадрат кој на почетокот ќе го поставиме во Y. Го поместуваме квадратот W се додека не се преклопи со Z, при што под еден чекор поместување го подразбираме поместувањето на квадратот W за едно место паралелно со страните на квадратот. Забележуваме дека $r(W)$ во еден чекор може да се промени најмногу за 20. Бидејќи на почетокот $r(W)=100$, а на крајот $r(W)=-100$, тогаш во некој чекор важи $-10\le r(W)\le 10$. Тоа значи дека $m(T)\le 10$.

Од друга страна, ќе докажеме дека $m(T)\ge 10$, од каде ќе следува дека бараната најголема можна вредност на $m(T)$ е 10.

Да ги обоиме сите квадратчиња на 1000×1000 под главната дијагонала црно, а преостанатите бело. На оваа табла да земеме произволен 10×10 квадрат. Ако неговата главна дијагонала е црна, тогаш под неа сите квадратчиња се црни, па затоа бројот на црните квадратчиња е најмалку за 10 поголем од бројот на белите. Слично, ако главната дијагонала е бела, тогаш бројот на белите квадратчиња е најмалку за 10 поголем од бројот на црните. Според тоа, не постои ниту еден 10×10 чија моќ е помала од 10, со што доказот е завршен. ■

Задача 11. На квадрат 100×100 се поставени неколку рамнокраки правоаголни триаголници со катети 1 кои не се сечат, при што секој триаголник покрива точно половина поле. Се покажало дека секоја страна на поле (вклучувајќи ги и граничните) е покриена од точно една катета на триаголник. Определи го најголемиот можен број полиња кои не содржат ниту еден триаголник.

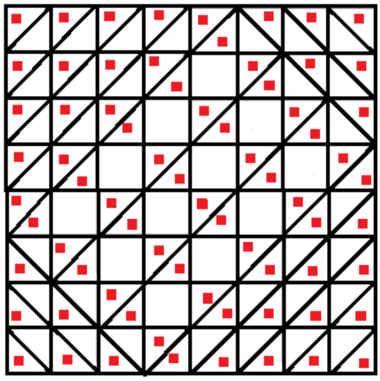
Решение. *Одговор*: $49\cdot50=2450$.

Да ставиме $n=50$. Ќе велиме дека еден триаголник е добар ако се наоѓа над правата определена со неговата хоризонтална катета, а е лош во спротивен случај. Хоризонталните линии на мрежата да ги нумерираме со броевите од 0 до $2n$.

Со u_k (соодветно d_k) да го означиме бројот на отсечките од $k-$тата линија кои учествуваат во добри (соодветно лоши) триаголници. Тогаш точни се равенствата $u_k+d_k=2n$ и $u_0=2n$. Освен тоа, вертикалните отсечки од мрежата, кои се наоѓаат меѓу $k-$тата и $(k+1)-$вата линија, учествуваат во точно u_k+d_{k+1} триаголник, па затоа $u_k+d_{k+1}=2n+1$. Оттука лесно се добива дека $d_k=k$ и

$u_k = 2n - k$ за секој k.

Сега да ги разгледаме полињата кои се наоѓаат меѓу k – тата и $(k+1)$ – вата линија на мрежата. Најмалку $u_k = 2n - k$ од овие полиња содржат добар триаголник и најмалку $d_{k+1} = k+1$ од овие полиња соржат лош триаголник. Според тоа, слободните полиња од овој ред се најмногу $2n - \max\{u_k, d_{k+1}\}$, што значи најмногу k кога $k < n$ и најмногу $(2n-1) - k$ кога $k > n$. Затоа вкуниот број слободни полиња не е поголем од $2(0+1+...+(n-1)) = n(n-1)$.



Останува да дадеме пример при кој се достигнува добиената оценка. На цртежот десно е даден пример за $n = 4$. Пример за $n = 50$ се конструиран наполно аналогно. Се одделува „правоаголник“ од полиња со страни од по n и $n+1$ поле паралелни со дијагоналите на мрежата, неговите полиња се бојат шаховски (дијагоналите со по $n+1$ полиња се црни), и во секое црно поле се поставуваат по два триаголника (притоа $n(n-1)$ бело поле се слободни); во секое поле од преостанатите четири „агли“ на квадратот триаголниците се поставуваат така што нивните прави агли се во иста насока како и големиот агол во кој лежи полето. ■

Задача 12. Во квадрат 17×17 во црна боја се обоени n полиња. Секој ред, секоја колона и секоја голема дијагонала на квадратот ќе ја наречеме линија. Во еден чекор е дозволено ако најмалку 6 полиња на таа линија се обоени во црно, сите полиња на таа линија да се обојат во црно. Определи ја најмалата можна вредност на n, за која постои почетна конфигурација на n црни полиња, од која може по конечен број чекори да се добие црна табла.

Решение. *Одговор*: 27.

Како што е вообичаено, полето во i – тиот ред и j – тата колона ќе го означуваме со (i, j). Не е тешко да се види дека ако на почетокот се црни следниве 27 полиња:

$$(7,1),\ (8,1),\ (9,1),\ (10,1),\ (7,2),\ (8,2),\ (9,2),\ (10,2),$$
$$(7,16),(8,16),(9,16),(10,16),(7,17),\ (8,17),(9,17),(10,17),$$
$$(7,7),\ (8,8),\ (9,9),\ (10,10),\ (11,11),(12,12),$$
$$(11,7),(7,11),(10,8),(8,10),\ (6,12),$$

тогаш по неколку чекори може да се добие црна табла (прво дијагоналите, па колоните 1, 2, 16, 17 итн.).

Затоа доволно е да докажеме дека секоја конфигурација од која може да се добие црна табла има најмалку 27 црни полиња. Бидејќи во секој чекор се појавуваат најмногу $17-6=11$ нови црни полиња, за да се постигне целта се потребни најмалку $[\frac{17^2-16}{11}]+1=24$ чекори.

Нека B е множеството од почетните црни полиња, A_i е линијата (ред, колона или голема дијагонала), која се користи во $i-$тиот чекор. Тогаш

$$B_i = A_i \cap B \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j)$$

е множеството полиња од B кое во $i-$тиот чекор за првпат се користи и нека $|B_i|=b_i$. Да забележиме дека $|A_i \cap A_s|\leq 1$ за $i\neq s$, и $A_i \cap A_s=\varnothing$ ако A_i и A_s се или истовремено редови или колони. Од условот на задачата следува дека $b_i+\sum\limits_{j<i}|A_i\cap A_j|\geq 6$, т.е.

$$b_i \geq \begin{cases} 6-|\{j: j<i,\, A_j \text{ е ред}\}|= f_{i,c}, & \text{ако } A_i \text{ е колона или дијагонала,}\\ 6-|\{j: j<i,\, A_j \text{ е колона}\}|= f_{i,r}, & \text{ако } A_i \text{ е ред или дијагонала,}\\ 6-i+1= f_{i,d}, & \text{ако } A_i \text{ е дијагонала.}\end{cases}$$

Нека k е најмалиот природен број за кој имаме 6 реда или дијагонала, или 6 колони или дијагонала меѓу $A_1, A_2,..., A_k$. Така , бидејќи се направени најмалку 24 чекори, овој избор е можен. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека имаме c колони, r редови и d дијагонали, така што $r+d=6$, $d\leq 2$ и $r+d+c=k$. Тогаш последователно добиваме:

$$\begin{aligned}|B| &\geq \sum_{i=1}^{k} b_i\\ &\geq \sum_{i:A_i \text{ е ред},\, i\leq k} f_{i,c} + \sum_{i:A_i \text{ е колона},\, i\leq k} f_{i,r} + \sum_{i:A_i \text{ е дијагонала},\, i\leq k} f_{i,d}\\ &= 6k-\Big(\sum_{i:A_i \text{ е ред},\, i\leq k} |\{j: j<i,\, A_j \text{ е ред}\}|\\ &\quad + \sum_{i:A_i \text{ е колона},\, i\leq k} |\{j: j<i,\, A_j \text{ е колона}\}|\\ &\quad + \sum_{i:A_i \text{ е дијагонала},\, i\leq k} (i-1)\Big).\end{aligned}$$

Во последното равенство првиот збир ги брои паровите (j,i) за кои $1\leq j<i\leq k$ и парот (A_j, A_i) е (ред, колона) или (дијагонала, колона). Аналогно вториот збир ги брои паровите (j,i) за кои $1\leq j<i\leq k$ и парот (A_j, A_i) е (колона, ред) или (дијагонала, ред), а третиот збир ги брои паровите (j,i) за кои $1\leq j<i\leq k$ и A_i е дијагонала. Затоа збирот на трите збира е еднаков на $rc+(r+c)d+\binom{d}{2}$. Според тоа, имаме

$$|B|\geq 6k-r(k-r-d)-d(k-d)-\binom{d}{2}=r^2+rd+d^2-\binom{d}{2}$$

И притоа важи $r+d=6$ и $d=0,1$ или 2. Лесно се проверува дека минимумот на десната страна на последното неравенство се достигнува за $r=4$ и $d=2$. Конечно, $|B|\geq 27$, што и требаше да се докаже.

Задача 13. Коцка сирење со димензии $3\times3\times3$ е поделена на 27 единечни коцки. Глушец го грицка сирењето, така што ги јаде единечните коцки една по друга, но така што откако ќе изеде една единечна коцка преминува да јаде нејзина соседна коцка. Две единечни коцки се соседни ако имаат заеднички ѕид. Дали глушецот може да го изеде целото сирење така што ќе почне од единечна коцка која содржи едно теме на големата $3\times3\times3$ коцка, а ќе заврши со единечната коцка која се наоѓа во нејзиниот центар?

Решение. Сите единечни коцки на кои е поделено сирењето се распоредени во три слоја, да ги наречеме горен, среден и долен слој. Единечните коцки ќе ги означиме со броевите 0 и 1 на следниов начин: централната коцка ја означуваме со 1, а преостанатите коцки ги означуваме така што секои две соседни коцки се означени со различни броеви. Тогаш во средниот слој имаме пет коцки означени со бројот 1 и четири коцки означени со бројот 0. Во горниот и долниот слој имаме по четири коцки означени со бројот 1 и по пет коцки означени со бројот 0. Значи, вкупниот број единечни коцки означени со бројот 1 е 13, а вкупниот број единечни коцки означени со бројот 0 е 14. Притоа, единечните коцки кои ги содржат темињата на големата $3\times3\times3$ коцка се означени со бројот 0. Ако глушецот во низа јаде единечни коцки, тргнувајќи од теме, така што секогаш преминува на соседна единечна коцка, тогаш тој треба да формира низа од 27 броеви која почнува со 0 и во која броевите 0 и 1 наизменично се менуваат, т.е. треба да ја формира низата 010101...010. Значи, без разлика по кој редослед глушецот ќе ги јаде единечните коцки сирење, низата која ќе се формира треба да почнува и да завршува со 0. Ако претпоставиме дека глушецот може да го изеде сирењето поќнувајќи од аголна коцка и завршувајќи во централната коцка, тогаш тој треба да формира низа која која почнува со 0 и завршува со 1, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не е можно глушецот да го изеде сирењето на саканиот начин. ■

Литература

1. Mladenović, P., Petrović, V.: Stereometrija – izabrani problemи, Matematiskop, Beograd, 2002
2. Бойваленков, П., Димитров, С., Маринов, М., Тодоров, Т.: Национални олимпиади по математика 2015-2016, УНИМАТ СМБ, София, 2018
3. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
4. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средљошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
5. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012