

БМО 1987

1. Нека $a \in \mathbb{R}$ и функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е таква што

$$1) f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x), \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}$$

$$2) f(0) = \frac{1}{2}.$$

Докажи, дека $f = \text{const}$.

Решение. Ако во 1) ставиме $x = y = 0$ добиваме $f(a) = \frac{1}{2}$. Тогаш за $x = 0$ и произволно y добиваме $f(y) = \frac{1}{2}f(a-y) + \frac{1}{2}f(y)$, од каде следува дека $f(y) = f(a-y)$. Сега равенството од условот може да се запише во видот $f(x+y) = 2f(x)f(y)$, за секои $x, y \in \mathbb{R}$. Ако го искористиме последното равенство последователно добиваме

$$f(x+y) = 2f(x)f(y) = 2f(a-x)f(y) = f(a-x+y).$$

За $y = -x$ имаме $\frac{1}{2} = f(0) = f(a-2x) = f(2x)$. Според тоа, за секој $z \in \mathbb{R}$ важи $f(z) = f(2\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}$.

2. Нека $x \geq 1$ и $y \geq 1$ се такви реални броеви што броевите $a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ и $b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$ се цели и нивната разлика е поголема од 1. Докажи дека $b = a + 2$ и $x = y = \frac{5}{4}$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = \frac{2}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}} \leq 2$, за $t \geq 1$, добиваме

$$\begin{aligned} b-1 &= \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} - (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \\ &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}) \\ &\leq 2\sqrt{2} < 3. \end{aligned}$$

Според тоа, $1 < b-a < 3$, од каде следува $b-a = 2$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = a \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = a+2. \end{cases}$$

Воведуваме замена $u = \sqrt{x-1} \geq 0$ и $v = \sqrt{y-1} \geq 0$ и системот го добива видот

$$\begin{cases} u+v = a \\ \sqrt{u^2+2} + \sqrt{v^2+2} = a+2 \end{cases},$$

каде $u, v \in [0, a]$. Во втората равенка заменуваме $v = u - a$ и истата ја запишуваме во обликот

$$\sqrt{a^2 + v^2 - 2av + 2} = a + 2 - \sqrt{v^2 + 2}.$$

По квадрирањето и средувањето ја добиваме равенката

$$(a+2)\sqrt{v^2+2} = 2(a+1) + av.$$

Повторно квадрираме и ја добиваме равенката

$$f(v) = 2(a+1)v^2 - 2a(a+1)v + 2 - a^2 = 0.$$

Нека претпоставиме дека $a \geq 2$. Тогаш $f(0) = f(a) = 2 - a^2 < 0$. Тоа значи дека корените на $f(v) = 0$ се надвор од интервалот $[0, a]$, што е противречност. Значи, $a = 1$ и од $4v^2 - 4v + 1 = 0$ следува $v = \frac{1}{2}$, па затоа $u = \frac{1}{2}$. Конечно, од $\frac{1}{2} = \sqrt{x-1}$ и $\frac{1}{2} = \sqrt{y-1}$, следува $x = y = \frac{5}{4}$.

3. Ако за $\triangle ABC$ важи

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{48} = \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{48},$$

каде α и β се аглите при темињата A и B , соодветно, пресметај го односот $\overline{AC} : \overline{BC}$.

Решение. Ќе докажеме дека $\alpha = \beta$, т.е. $\overline{AC} : \overline{BC} = 1$. Нека претпоставиме, дека $\alpha < \beta$. Тогаш $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Бидејќи $\sin x$ и $\cos x$ се соодветно растечка и опаѓачка функција на интервалот $[0, \frac{\pi}{2}]$, добиваме дека важи

$$0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \sin \frac{\beta}{2} \text{ и } 0 < \cos \frac{\beta}{2} < \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Според тоа,

$$0 < \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{23} < \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{23} \text{ и } 0 < \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{48} < \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{48} \dots$$

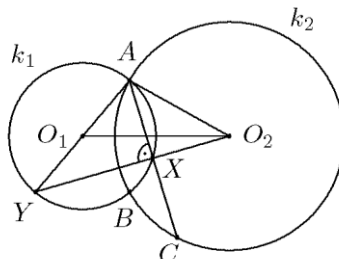
Ако ги помножиме последните неравенства, добиваме

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{48} < \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{48},$$

што противречи на условот на задачата. Случајот $\alpha > \beta$ се разгледува аналогно. Според тоа, $\alpha = \beta$, т.е. $\overline{AC} : \overline{BC} = 1$.

4. Две кружници k_1 и k_2 соодветно со центри O_1 и O_2 и радиуси 1 и $\sqrt{2}$ се сечат во точките A и B , при што $\overline{O_2O_1} = 2$. Нека AC е тетива во k_2 чија средина лежи на k_1 . Определи ја должината на AC .

Решение. Средината на AC да ја означиме со X , а пресечната точка на O_2X и k_1 со Y . Тогаш $O_2X \perp AC$ и затоа AU е дијаметар на k_1 , т.е. $O_1 \in AU$. Значи, O_2O_1 е тежишна линија во $\triangle YO_2A$, па затоа



$$16 = 4\overline{O_1O_2}^2 = 2\overline{O_2A}^2 + 2\overline{O_2Y}^2 - \overline{YA}^2 = 2\overline{O_2Y}^2,$$

т.е. $\overline{O_2Y} = 2\sqrt{2}$. Останува да ја пресметаме висината во $\triangle YO_2A$. Бидејќи

$$\cos \sphericalangle YO_2A = \frac{2^2 + \sqrt{2}^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

добиваме

$$\sin \sphericalangle YO_2A = \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle YO_2A} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Сега, од равенството

$$2P_{YAO_2} = \overline{AY} \cdot \overline{AO_2} \sin \sphericalangle YAO_2 = \overline{AX} \cdot \overline{YO_2}$$

добиваме $\overline{AX} = \frac{\sqrt{14}}{4}$, па затоа $\overline{AC} = 2\overline{AX} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.