Методи Главче,
Скопје

ПРЕСМЕТУВАЊЕ ЗБИРОВИ

Често пати во секојдневниот живот сме во ситуација да пресметаме збир од повеќе броеви кои се поврзани со некое правило. Во многу случаи овие збирови се пресметуваат според претходно докажани формули. Овде ќе разгледаме неколку слични задачи и ќе докажеме формула за пресметување на една класа збирови.

Задача 1. Пресметај го збирот

а) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$,

б) $1+2+3+4+...+2012+2013+2014$.

Решение. а) Бараниот збир можеме да го најдеме со последователно собирање на броевите, при што ќе добиеме 55. Но, ако ги групираме првиот со последниот собирок, вториот со претпоследниот итн. добиваме 5 еднакви збирови, па затоа

$$\begin{aligned}1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 &= (1+10)+(2+9)+...+(5+6)\\ &= 11+11+11+11+11\\ &= 5\cdot 11 = 55.\end{aligned}$$

б) И во овој случај бројот на собирците е парен број, па ако аналогно на решението на задачата под а) ги групираме собирците и ќе добиеме 1007 еднакви збирови. Последното може да се запише на следниов начин:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & ..., & 1006, & 1007,\\ 2014, & 2013, & 2012, & ..., & 1009, & 1008.\end{array}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}1+2+3+...+2012+2013+2014 &= (1+2014)+(2+2013)+...+(1007+1008)\\ &= \underbrace{2015+2015+...+2015+2015}_{1007 \text{ пати}}\\ &= 1007\cdot 2015 = 2029105.\end{aligned}$$

Од решението на задача 1 може да заклучиме дека, во случај кога имаме парен број собирци, со групирање на собирците на покажаниот начин можеме да го определиме нивниот збир. Но, што станува ако, на пример, треба да го најдеме збирот $S=1+2+3+4+5+...+98+99+100+101$. Како што можеме да забележиме, во овој случај при групирање на собирците на опишаниот начин за бројот 56 немаме број кој со него формира пар. Како ќе постапиме во овој случај? Едноставно, броевите ќе ги запишеме двапати и тоа во две редици, како што следува:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & ..., & 100, & 101, \\ 101, & 100, & 99, & ..., & 2, & 1. \end{array}$$

Ако запишаните броеви во претходната табела ги собереме по колони, тогаш добиваме 101 збирови еднакви на 102. Притоа збирот на сите броеви во табелата е двапати поголем од бараниот збир, па затоа имаме

$$2S = 101 \cdot 102$$
$$S = 101 \cdot 51 = 5151.$$

Ќе покажеме дека на опишаниот начин, без разлика дали бројот на собирците е парен или непарен, може да се добие формулата за пресметување на збирот на првите n природни броеви:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n\,.$$

Имаме:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & ..., & n-1, & n, \\ n, & n-1, & n-2, & ..., & 2, & 1, \end{array}$$

и како збирот на броевите во секоја колона е еднаков на $n+1$, а имаме n колони добиваме дека $2S = n(n+1)$, т.е.

$$S = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Задача 2. Пресметај го збирот

$$A = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 250\,.$$

Решение. Прв начин. Забележуваме дека во случајов сите собирци се парни броеви, па ако извадиме 2 пред заграда и ако за $n = 125$ ја искористиме формулата (1), за бараниот збир добиваме

$$A = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 250 = 2(1 + 2 + 3 + ... + 125)$$
$$= 2 \cdot \frac{125 \cdot (125+1)}{2} = 125 \cdot 126 = 15750.$$

Втор начин. Ако ја искористиме идејата со која ја добивме формулата (1), добиваме

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 6, & ..., & 248, & 250, \\ 250, & 248, & 246, & ..., & 4, & 2, \end{array}$$

што значи дека удвоениот збир се добива како збир на 125 собирци, сите еднакви на 252, односно

$$2A = 125 \cdot 252$$
$$A = 125 \cdot 126 = 15750.$$

Во задача 2, користејќи ја формулата (1) го пресметавме збирот на првите 125 парни природни броеви. Меѓутоа, оваа формула може да се искористи и за пресметување на првите n парни природни броеви. Имено, од (1) непосредноi следува:

$$2+4+6+...+(2n-2)+2n=2(1+2+3+...+(n-1)+n)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1).$$

Но, дали формулата (1) може да се искористи за пресметување на збирот на првите n непарни природни броеви? Одговорот на ова прашање е позитивен. Навистина, ако на овој збир додадеме n и одземеме n добиваме

$$\begin{aligned}1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)&=1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)+n-n\\&=(1+1)+(3+1)+(5+1)+...+(2n-1+1)-n\\&=2+4+6+...+2n-n=2(1+2+...+n)-n\\&=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n(n+1)-n=n^2+n-n=n^2.\end{aligned}$$

Ќе покажеме како формулата (1) може да се искористи за да се пресмета збирот на броевите

$$a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d,$$

каде $a,d\in\mathbf{R}$ и $n\in\mathbf{N}$. Во случајов имаме n собирци и притоа секој собирок го содржи бројот a, па затоа

$$\begin{aligned}a+(a+d)+...+(a+(n-1)d)&=(\underbrace{a+a+...+a}_{n\text{ пати}})+(d+2d+...+(n-1)d)\\&=na+d(1+2+...+(n-1))=na+d\,\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}\\&=na+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d).\end{aligned}$$

Меѓутоа, овој збир може да се пресмета и со претходно опишаната постапка на запишување на собирците во две редици. Навистина, од

$$\begin{array}{cccccc}a, & a+d, & a+2d, & ..., & a+(n-2)d, & a+(n-1)d,\\ a+(n-1)d, & a+(n-2)d, & a+(n-2)d, & ..., & a+d, & a,\end{array}$$

следува дека збирот на броевите во секоја од $n-$те колони е еднаков на $2a+(n-1)d$, па затоа

$$2[a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+(n-1)d)]=n(2a+(n-1)d),$$

односно

$$a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d). \qquad (2)$$

Забелешка. Формулата (2) е поопшта од формулата (1), бидејќи за ако во (2) ставиме $a=1$ и $d=1$ добиваме

$$1+2+\ldots+(n-1)=\tfrac{n}{2}(2\cdot 1+(n-1)\cdot 1)=\tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Понатаму, ако во (2) ставиме $a=2, d=2$ го добиваме збирот на првите n парни броеви, а ако ставиме $a=1, d=2$ го добиваме збирот на првите n непарни броеви. Провери!

Задача 3. Пресметај го збирот

$$A=1+4+7+10+\ldots+250.$$

Решение. Забележуваме дека во дадениот збир првиот собирок е 1, а секој следен е за 3 поголем од претходниот и притоа важи $250=1+3\cdot 83$. Според тоа, ако земеме $a=1$, $d=3$ и $n-1=83$, т.е. $n=84$, тогаш користејќи ја формулата (2) добиваме

$$\begin{aligned}A&=1+4+7+10+\ldots+250=1+(1+3)+(1+2\cdot 3)+(1+(84-1)\cdot 3)\\&=\tfrac{84}{2}(2\cdot 1+(84-1)\cdot 3)=42\cdot(2+249)=42\cdot 251=10542.\end{aligned}$$

Задача 4. Пресметај го збирот

$$A=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2}+\ldots+\tfrac{99}{2}.$$

Решение. Прв начин. Ако извадиме $\frac{1}{2}$ пред заграда, тогаш во заградата го добиваме збирот на првите 50 непарни броеви, па затоа

$$A=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2}+\ldots+\tfrac{99}{2}=\tfrac{1}{2}(1+3+5+\ldots+99)=\tfrac{1}{2}\cdot 50^2=1250.$$

Втор начин. Имаме $n=50$ собирци, при што разликата на секои два последователни собирци е еднаква на 1, а првиот собирок е $\frac{1}{2}$, па ако во (2) ставиме $a=\frac{1}{2}, d=1$ добиваме

$$A=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2}+\ldots+\tfrac{99}{2}=\tfrac{50}{2}(2\cdot\tfrac{1}{2}+(50-1)\cdot 1)=\tfrac{50}{2}(1+49)=1250.$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го збирот:
   а) $1+2+3+\ldots+(2n-1)+2n$, б) $1+5+9+13+17+\ldots+241$,
   в) $3+8+15+\ldots+103$, г) $2+5+8+11+\ldots+92$
2. Пресметај го збирот:
   а) $2+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+\ldots+\frac{77}{2}$, б) $\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+\ldots+\frac{23}{3}+\frac{25}{3}$.