Сава Гроздев
Софија

ЦРВЕНКАПА И ДИОФАНТОВАТА РАВЕНКА ОД ПРВ РЕД

Едно утро Црвенкапа дотрча во кујната на нејзината баба и рече:

- Бабо, сакам варено јајце!

- Добро, дете мое, но за да е како што ти го сакаш, јајцето треба да се вари точно 15 минути. За жал, часовникот застанал и не можам да измерам 15 минути. Треба да го почекаме дедо ти, кој отиде да купи батерија за часовникот.

- Но, бабо, зашто не го употребиш песочниот часовник?

- Не можам да го употребам, бидејќи тој мери 7 минути. Исто така, не можам да го употребам ниту песочниот часовник на дедо ти, биј тој пак мери 11 минути.

- Бабо, види како ќе измериме 15 минути. Истовремено ќе ги пуштиме и двата часовника. Кога првиот ќе измери 7 минути, ќе го ставиме јајцето да се вари. Бидејќи $11-7=4$, точно после 4 минути ќе истече песокот од вториот часовник. Значи, можеме да измериме 4 минути. Но, тогаш ќе го завртиме вториот часовник и тој ќе измери уште 11 минути. Ете, бидејќи $11+4=15$ измеривме 15 минути.

Восхитена од математичките способности на внучката, бабата зеде да го искористи предлогот. Јајцето беше сварено точно за 15 минути и Црвенкапа со задоволство го изеде. Само што заврши со појадокот, во кујната влезе дедото на Црвенкапа.

- Црвенкапа, ајде да видам каква математичарка си! – рече дедото и покажа две кофи, кои ги носеше со себе. – Едната кофа собира 8 литри, а другата собира 14 литри. Треба да измерам точно 4 литри, но не знам како да постапам.

- Дедо, таа задача е многу лесна! – рече Црвенкапа и додаде. – Ајде, наполни ја кофата од 14 литри со вода од чешмата.

Дедото ја наполни кофата и ја погледна Црвенкапа.

- А сега, дедо, со водата од 14-литарската кофа наполни ја втората кофа. Бидејќи втората кофа собира 8 литри, во првата ќе останат $14-8=6$ литри. Сега истури ја водата од втората кофа и во неа претури ги оние 6 литри кои ти останаа во првата кофа. Повторно наполни ја кофата од 14 литри. Сега имаме 14 литри во првата кофа и 6 литри во втората кофа. Понатаму дополни ја втората кофа со водата од првата. Ќе претуриш $8-6=2$ литра, бидејќи втората кофа собира 8 литри, а во неа имашр 6 литри. Што добивме? Имаме $14-2=12$ литри во првата кофа и 8 литри ви втората. Сега, истури ја водата од втората кофа и втората кофа наполни ја со вода од првата кофа. Тогаш во првата кофа ќе останат твоите $12-8=4$ литри.

- Браво Црвенкапа, а од каде ги знаеш овие досетки?

- Дедо, забележи, дека $14\cdot 2-8\cdot 3=28-24=4$. Тоа значи, дека двапати догоре ја полниме кофата од 14 литри и три пати сме ја наполниле кофата од 8 литри. Точно тоа и го направивме, се разбира со определен редослед. Пред малко ја решив задачата да се измерат 15 минути со помош на двата песочни часовника, единиот од кои мери 7 минути, а другиот – 11 минути. Во неа искористив дека $2\cdot 11-7=15$. Тоа значи, дека часовникот за 11 минути е употребен двапати, а другиот часовник – еднаш. На прв поглед двете задачи се различни, но всушност принципот им е един и ист. Општата задача е да се најадат цели броеви x и y такви, што при дадени цели броеви a,b и c да е исполнето равенството $ax+by=c$. Оваа равенка се нарекува Диофантова равенка, и за неа на училиште учевме минатата седмица. Наставничката ни кажа дека овие равенки се нарекуваат според античкиот математичар Диофант, кој живеел во 3. век. Уште се наркуваат и неопределени равенки, бидејќи имаат повеќе од една непозната. Се интересираме само за решенијата, кои се цели броеви. Во случајот со кофите Диофантовата равенка е $14x+8y=4$, а во случајот со часовниците равенката е $11x+7y=15$. И во двата случаја Диофантовите равенки имаат решение. Но, има равенеки, кои немаат решения. Таква е, на пример, Диофантовата равенка $14+8y=3$. Затоа, дедо, ако побараше да ти измерам 3 литри со твоите кофи, ќе ти одговорев, дека тоа не е можно. Ако сакаш да научиш повеќе, прочиј го подолу тоа, што ни го кажа наставничката.

Дефиниција 1. Најголемиот број меѓу сите заеднички делители на броевите a и b се нарекува најголем заеднички делител на a и b. Го означуваме с $\mathrm{NZD}(a,b)$ или само (a,b).

Например (10,25) = 5; (6,21) = 3; (4,16) = 4; (5,22) = 1.

Дефиниция 2. Ако најголемиот заеднички делител на броевите a и b е еднаков на 1, т.е. ако $(a,b) = 1$, тогаш броевите a и b ги нарекуваме *заемно прости*.

Дефиниция 3. Равенката од видот $ax+by=c$, каде a, b и c се цели броеви и $ab\neq 0$, се нарекува *линеарно Диофантова равенка од прв ред со две непознати*.

Теорема 1. Линеарната Диофантова равенка $ax+by=c$ има решение ако и само ако најголемиот заеднички делител $d=(a,b)$ на броевите a и b е делител на бројот c.

Доказ. Зборовите „ако и само ако“ означуваат, дека условот $d=(a,b)$ да е делител на c е потребен и доволен, т.е. ако равенката има решение, тогаш со сигурност $d=(a,b)$ е делител на c и обратно, ако $d=(a,b)$ е делител на c, тогаш равенката има решение. Доказот, дека условот е доволен е доста сложе и затоа ќе го пропуштиме. Но, доказот, дека условот е потребен е лесно. Навистина нека (x_0,y_0) е решение на равенката. Тоа значи, дека $ax_0+by_0=c$. Бидејќи $d=(a,b)$ е делител на a и b, добиваме дека d е делител на левата страна на равенката и затоа е делител и на десната страна на равенката, т.е. d е делител на c. ■

Теорема 2. Ако $d=(a,b)$ е делител на c и (x_0,y_0) е решение на равенката $ax+by=c$, тогаш сите решенија на оваа равенка се дадени со формулите $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{a}{d}t$, $t\in\mathbb{Z}$.

Доказ. Од $ax_0+by_0=c$ следува

$$ax+by=a(x_0+\tfrac{b}{d}t)+b(y_0-\tfrac{a}{d}t)=ax_0+by_0+\tfrac{ab}{d}t-\tfrac{ab}{d}t=c,$$

што значи, дека $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{a}{d}t$, за секој $t\in\mathbb{Z}$.

Ќе докажеме, дека секое решение може да се претстави во оваа форма. Нека (x,y) е решение. Имаме $ax+by=ax_0+by_0$, т.е. $a(x-x_0)=b(y_0-y)$ и оттука $\frac{a}{d}(x-x_0)=\frac{b}{d}(y_0-y)$. Бидејќи $d=(a,b)$, важи $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$ и од последното равенство следува, дека $\frac{b}{d}$ е делител на $x-x_0$ и $\frac{a}{d}$ е делител на y_0-y. Значи, $x-x_0=\frac{b}{d}u$ и $y_0-y=\frac{a}{d}v$ за некои цели броеви u и v. Ако замениме во равенството $a(x-x_0)=b(y_0-y)$, добиваме $u=v$ со што доказот е завршен.

За решавање на линеарните Диофантови равенки од први ред со две непознати постојат два основни метода – на Евклид и на Ојлер. Ние ќе го користиме методот на Ојлер.

Задача 1. Со методот на Ојлер ќе ја решиме Диофантовата равенка $738x+621y=45$.

Нека (x,y) е решение на равенката. Бидејќи $621<738$, ако се земе предвид дека $738=1\cdot 621+117\quad 45=0\cdot 621+45$ добиваме

$$y = \frac{-738x+45}{621} = -x + \frac{-117x+45}{621}.$$

Од горното равенство заклучуваме, дека $\frac{-117x+45}{621} = t$ е цел број. Се ослободуваме од именителот и добиваме $621t + 117x = 45$, и тоа е нова Диофантова уравнение од истиот вид, но со помали коефициенти пред непознатите. Продолжуваме на ист начин и го изразуваме x со t, бидејќи $117 < 621$. Бидејќи $621 = 5 \cdot 117 + 36$ и $45 = 0 \cdot 117 + 45$, добиваме

$$x = \frac{-621t+45}{117} = -5t + \frac{-36t+45}{117}.$$

Така, бројот $\frac{-36t+45}{117} = u$ е цел и $117u + 36t = 45$ е нова Диофантова равенка со помали коефициенти. Понатаму го изразуваме t со u и ако земеме предвид дека $117 = 3 \cdot 36 + 9$, $45 = 1 \cdot 36 + 9$ добиваме

$$t = \frac{-117u+45}{36} = -3u + 1 + \frac{-9u+9}{36} = -3u + 1 + \frac{-u+1}{4}.$$

Бројот $\frac{-u+1}{4} = v$ е цел и $4v + u = 1$. Процесот запира, бидејќи коефициентот пред непозната u е еден и u се изразува со v. Добиваме дека $u = -4v + 1$ и враќајќи се наназад наоѓаме:

$$\begin{aligned} t &= -3u + 1 + v = -3(-4v + 1) + 1 + v = 13v - 2 \\ x &= -5t + u = -5(-3u + 1 + v) + u = 16u - 5 - 5v \\ &= 16(-4v + 1) - 5 - 5v = -69v + 11 \\ y &= -x + t = 69v - 11 + 13v - 2 = 82v - 13. \end{aligned}$$

Последните две равенства го даваат таканареченото *параметарско претставување* на сите решенија на почетната равенка, т.е.

$$x = -69v + 11,\ y = 82v - 13,\ v = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$$

Задача 2. Располагаме со два песочни часовника – единиот мери 11 минути, а вториот – 7 минути. Дали е можно со помош на овие два часовника да се измерат 15 минути?

Решение. Одговорот на задачата е позитивен. Нека со x и y означиме колку пати го користиме првиот и вториот часовник, соодветно. Тогаш важи $11x + 7y = 15$, и тоа е линеарна Диофантова равенка од прв ред с две непознати. Таа има решение, бидејќи $(11, 7) = 1$. Ќе ја решиме со методот на Ојлер:

$$y = \frac{-11x+15}{7} = -x + 2 + \frac{-4x+1}{7} = -x + 2 + t$$

$$\frac{-4x+1}{7} = t \quad \Leftrightarrow \quad 7t + 4x = 1$$

$$x = \frac{-7t+1}{4} = -t + \frac{-3t+1}{4} = -t + u$$

$$\frac{-3t+1}{4} = u \iff 4u + 3t = 1$$

$$t = \frac{-4u+1}{3} = -u + \frac{-u+1}{3} = -u + v$$

$$\frac{-u+1}{3} = v \iff u = -3v + 1.$$

Се враќаме наназад:

$$t = -u + v = 3v - 1 + v = 4v - 1$$
$$x = -t + u = -4v + 1 - 3v + 1 = -7v + 2$$
$$y = -x + 2 + t = 7v - 2 + 2 + 4v - 1 = 11v - 1.$$

Сите решенија на равнката се $x = -7v + 2$, $y = 11v - 1$, каде v е произволен цел број. Ако $v = 0$, тогаш $x = 2$ и $y = -1$. Тоа значи следното (Обрни внимание на негативните броеви!):

Ги стартуваме двата часовника едновременно. Вториот часовник мери 7 минути. Од тој момент натаму можеме да измериме точно $11 - 7 = 4$ минути, оставајќи го првиот часовник, т.е. точно после 4 минути песокот во првиот часовник ќе истече. После тие 4 минути го вртиме првиот часовник и чекаме песокот да истече. На тој начин мериме уште 11 минути или вкупно $11 + 4 = 15$ минути. Првиот часовник е употребен 2 пати ($x = 2$), а вториот е употребен еднаш, но со одземање на измереното време од него ($y = -1$). ■

Задача 3. Располагате со две кофи за вода – едната е од 14 литри, а втората е од 8 литри. Дали е можно со помош на двете кофи да се измерат точно 4 литри?

Решение. Одговорот на поставеното прашање е позитивен. Нека првата и втората кофа се искористени x и y пати, соодветно. Тогаш треба да е исполнето $14x + 8y = 4$ и ова е линеарна Диофантова равенка од прв ред со две непознати. Таа има решение, бидејќи $(14,8) = 2$ и 2 е делител на 4. Ако ги поделиме двете страни на равенката со 2, добиваме $7x + 4y = 2$. Ќе го користиме методот на Ојлер:

$$y = \frac{-7x+2}{4} = -x + \frac{-3x+2}{4} = -x + t$$

$$\frac{-3x+2}{4} = t \iff 4t + 3x = 2$$

$$x = \frac{-4t+2}{3} = -t + \frac{-t+2}{3} = -t + u$$

$$\frac{-t+2}{3} = u \iff t = -3u + 2.$$

Се враќаме наназад:

$$x = -t + u = 3u - 2 + u = 4u - 2$$

$$y = -x + t = -4u + 2 - 3u + 2 = -7u + 4.$$

Така, сите решенија са $x = 4u - 2$, $y = -7u + 4$, каде u е произволено цел број. Ако $u = 0$, тогаш $x = -2$ и $y = 4$. Тоа значи:

Ја полниме кофата од 14 литри. Од неа ја полниме втората кофа. Тогаш во првата кофа останувaат $14 - 8 = 6$ литра. Ја празниме втората кофа и во неа ги тураме 6-те литри од првата кофа. Одново ја полниме кофата од 14 литри. Од неа ја дополнуваме втората кофа. Дополнуваме точно 2 литра. Тогаш во првата кофа останувaат $14 - 2 = 12$ литра. Сега ја празниме втората кофа и ја полниме со вода од првата кофа. Во првата кофа останувaа $12 - 8 = 4$ литри и задачата е решена.

Последователните чекори можеме да ги прикажеме на следниот начин:

$$(0,0) \to (14,0) \to (6,8) \to (6,0) \to (0,6) \to$$
$$(14,6) \to (12,8) \to (12,0) \to (4,8) \to (4,0). \blacksquare$$

Задача 4. Реши ја Диофантовата равенка $14x + 8y = 3$.

Решение. Равенката нема решение, бидејќи $(14,8) = 2$ и 2 не е делител на десната страна на равенката, т.е. на 3. ■

Задачи за самостојна работа

Задача 5. Определи ги целобројните решенија на равенката:

а) $13x - 2y = 7$; б) $24x + 3y = 15$; в) $7x - 28y = 15$.

Задача 6. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

а) $5x + 6y = 7$; б) $-4x + 12y = 64$; в) $8x - 24y = 7$.

Задача 7. Определи ги целите броеви x и y, за кои $5x + 11y = 3$ и збирот $x + y$ е можно најмалиот природен број.

Одговор. $(x, y) = (5, -2)$

Задача 8. Определи ги целите броеви x и y, за кои $3x + 14y = 5$ и разликата $y - x$ е можно најмалиот прост природен број.

Одговор. $(x, y) = (-73, 16)$

Задача 9. Определи ги целите броеви x и y, за кои $2x + 3y = 7$ и бројот $-xy$ е можно најмалиот точен квадрат.

Одговор. $(x, y) = (-7, 7)$

Задача 10. Определи ги целите броеви x и y, кои се делат на 9 и за кои $-5x + 3y = 9$.

Одговор. $(x, y) = (27u + 9, 45u + 18)$, каде u е произволен цел број.