

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 10. oktobar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

1. (4 poena) U Pitagorinoj tablici množenja uočen je pravougaoni ram širine jednog polja (kvadratića), pri čemu se svaka stranica rama sastoji od neparnog broja polja. Polja (kvadratići) rama naizmenično su obojeni u dve boje – crnu i belu. Dokažite da je zbir brojeva u crnim poljima jednak zbiru brojeva u belim poljima. (Pitagorina tablica množenja je pravougaona tablica izdvojena na kvadratiće, u kojoj na preseku m -te vrste i n -te kolone u kvadratiću stoji broj mn , za m i n koje prirodne brojeve n i n)
2. (4 poena) Jednakokraki trapez opisan je oko kružnice. Dokažite da simetrala tupog ugla tog trapeza deli trapez na dva dela jednakih površina.
3. (4 poena) Na šahovskoj tabli 8×8 nalazi se kocka (čija se donja strana poklapa sa jednim od polja table). Nju "kotrljamo" po tabli, prevrćući je preko ivica, tako da kocka stane na svako polje table (na nekima je možda bila i nekoliko puta). Da li se moglo desiti da neka od strana kocke nijednom nije "pala" (ležala) na tabli?
4. (4 poena) U nekoj školi više od 90% učenika zna engleski i nemački jezik, a više 90% učenika zna engleski i francuski jezik. Dokažite da među učenicima koji znaju nemački i francuski jezik ima više od 90% onih koji znaju engleski jezik.
5. (4 poena) Krajnje tačke N tetiva podelile su kružnicu na $2N$ lukova jedinične dužine. Poznato je da svaka od tetiva deli kružnicu na dva luka s parnim mernim brojem dužine. Dokažite da je N paran broj.

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 10. oktobar 2010. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

1. Bankomat zamenjuje monete (kovani novac): dublone u pistone i obrnuto. Piston vredi s dublona, a dublon $1/s$ pistona, gde nije obavezno da s bude ceo broj. U bankomat se može ubaciti ma koji broj moneta iste vrste (izgleda), posle čega on u zamenu izbacuje moneta druge vrste, zaokrugljujući njihov broj na najbliži ceo broj (ako su dva najbliža broja, bira se veći od njih).
 - a) (2 poena) Može li se dogoditi tako da, zamenivši nekoliko dublona za pistone, a zatim, zamenivši dobijene pistone za dublone, dobijemo više dublona nego što ih je bilo u početku?
 - b) (3 poena) Ako je odgovor potvrđan, može li se onda dogoditi da se dobijeni broj dublona još uveća ako s njima obavljamo istu takvu operaciju (tj. ako proceduru primenjujemo na prethodno dobijene dublone)?
2. Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ međusobno su normalne i seku se u tački O . Poznato je da je zbir poluprečnika kružnica, upisanih u trouglove AOB i COD , jednak zbiru poluprečnika kružnica, upisanih u trouglove BOC i DOA . Dokažite:
 - a) (2 poena) da je četvorougao $ABCD$ tangentni (opisani);
 - b) (3 poena) da je četvorougao $ABCD$ simetričan u odnosu na jednu od svojih dijagonala.
3. (5 poena) Policijska stanica nalazi se na pravolinijskom putu, koji je na obe strane beskonačan. Neko je ukrao stari policijski automobil, čija maksimalna brzina čini 90% maksimalne brzine novog automobila. U nekom trenutku u stanici su odlučili da u poteri za kradljivcem pošalju policajca sa novim policijskim automobilom. Ali evo nevolje: policajac nije znao ni kada je automobil bio ukraden, ni na koju stranu je putem kradljivac otišao. Može li policajac uhvatiti kradljivca? (Određenje: ima li policajac strategiju koja mu garantuje da će uhvatiti kradljivca, bez obzira kako ovaj postupa?).
4. (5 poena) Kvadratna tabla $n \times n$ podeljena je na n^2 pravougaonih polja sa $n-1$ horizontalnih i $n-1$ vertikalnih pravih. Polja table obojena su kao šahovska tabla. Zna se da su na jednoj dijagonali sva polja (njih n) crna i kvadratna. Dokažite da ukupna površina svih crnih polja table nije manja od ukupne površine svih belih polja.
5. (5 poena) Na turniru učestvuje 55 boksera po sistemu "pobeđeni ispada". Borbe (mečevi) su se odvijale jedna za drugom. Poznato je da se kod učesnika svake borbe (meča) broj prethodnih pobeda razlikovao najviše za 1. Koliko najviše borbi (mečeva) je mogao imati pobednik turnira?

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Složena varijanta, 24. oktobar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

1. (4 poena) U ravni je data prava. Pomoću petodinarke odredite dve tačke na nekoj pravoj koja je normalna na datu pravu. Pri tome su dopuštene sledeće operacije: obeležiti tačku, staviti petodinaraku tako da ona bude na njenom obodu i nacrtati oko nje kružnicu; obeležiti dve tačke (na rastojanju manjem od prečnika petodinarke), staviti petodinaraku tako da te tačke budu na njenom obodu i okružiti petodinaraku. Nema mogućnosti da se petodinaraka tačno postavi tako prema pravoj da je ona dodiruje.
2. (5 poena) Pera ume da na ma kojoj duži određuje tačke koje tu duž polove ili je dele u odnosu $n:(n+1)$, gde je n ma koji prirodan broj. Pera tvrdi da je za to dovoljno da na ma kojoj duži odredi tačku koja tu duž deli u datom racionalnom odnosu. Da li je on u pravu?
3. (8 poena) Na kružnoj stazi 10 motociklista startovali su istovremeno iz jedne tačke i pošli su na istu stranu sa različitim stalnim brzinama. Ako se posle starta dvojica motociklista ponovo nađu u istoj tački nazvaćemo to susretom. Do podne svaka dva motociklista susrela su se bar jednom, pri čemu se nikoja tri ili više njih nisu susretala istovremeno. Dokažite da je do podne ma koji motociklista imao ne manje od 25 susreta.
4. (8 poena) Karirani pravougaonik izdelfen je na dvodelne domine (2×1). U svakoj domini povučena je jedna od dve dijagonale. Pokazalo se da je podela bila takva da nikoje dve dijagonale nemaju zajedničke krajeve. Dokažite da su tada tačno dva od četiri temena pravougaonika krajevi dijagonala.
5. (8 poena) Imamo petougao. Dužinu svake njegove stranice podelimo zbirom dužina svih ostalih stranica. Zatim saberimo dobijene razlomke. Dokažite da će dobijeni zbir uvek biti manji od 2.
6. (8 poena) U oštrogglom trouglu ABC na visini BH izabrana je proizvoljna tačka P . Tačke A' i C' su središta stranica BC i AB (tim redom). Normala iz A' na CP seče normalu iz C' na AP u tački K . Dokažite da je tačka K jednako udaljena od A i C .
7. (12 poena) Za okruglim stolom sedi N vitezova. Svako jutro čarobnjak Merlin raspoređuje ih u drugačijem redosledu. Počevši od drugog dana Merlin je dopustio vitezovima da u toku dana naprave koliko god žele menjanja mesta ali na sledeći način: dva suseda zamenjuju mesta samo ako nisu bili susedi prvog dana. Vitezovi nastoje da posedaju u istom redosledu kao i nekog od prethodnih dana: tada se sednice prekidaju. Koliko najviše dana Merlin garantovano može organizovati sednice? (Razmeštaje koji se jedan iz drugog dobijaju rotacijom smatramo da su isti). Merlin ne sedi za stolom sa vitezovima).

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Složena varijanta, 24. oktobar 2010. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

1. U nekoj zemlji ima 100 gradova (gradove uzmite kao tačke u ravni). U priručniku za svaki par gradova nalazi se zapisano koliko je rastojanje među njima (ukupno 4950 zapisa).
 - a) (2 poena) Jedan zapis je izbrisan. Može li se uvek on rekonstruisati na osnovu ostalih?
 - b) (3 poena) Neka je obrisano k zapisa, a poznato je da u toj državi nikoja tri grada ne leže na istoj pravoj. Za koju najveću vrednost k se uvek mogu jednoznačno odrediti izbrisani zapisi?
2. (6 poena) Na kružnoj stazi $2N$ motociklista startovali su istovremeno iz jedne tačke i pošli su na istu stranu sa različitim stalnim brzinama. Ako se posle starta dvojica motociklista ponovo nađu u istoj tački nazvaćemo to susretom. Do podne svaka dva motociklista susrela su se bar jednom, pri čemu se nikoja tri ili više njih nisu susretala istovremeno. Dokažite da je do podne ma koji motociklista imao ne manje od N^2 susreta.
3. (6 poena) Imamo mnogougao. Dužinu svake njegove stranice podelimo zbirom dužina svih ostalih stranica. Zatim saberimo dobijene razlomke. Dokažite da će dobijeni zbir uvek biti manji od 2.
4. Dva čarobnjaka bore se jedan protiv drugog. Na početku oba lebde nad morem na visini 100 m. Čarobnjaci se naizmenično pridržavaju zaklatve tipa "smanjiti visinu lebdenja nad morem za a m kod sebe i za b m kod protivnika", gde su a i b realni brojevi i $0 < a < b$. Broj zakletvi je isti za oba čarobnjaka i one se mogu koristiti ma kojim redom i više puta. Čarobnjak pobeđuje u duelu, ako je posle ma kojeg "poteza" njegova visina nad morem pozitivna, a kod suparnika – nije. Postoji li takav komplet (niz) zakletvi da drugi čarobnjak može sigurno da pobedi, ma kako postupao prvi, ako je pri tome broj zakletvi u tom kompletu (nizu):
 - a) (2 poena) konačan;
 - b) (5 poena) beskonačan?
5. (8 poena) Četvorougao $ABCD$ je upisan u kružnicu s centrom O , pri čemu tačka O ne leži ni na jednoj dijagonali tog četvorougla. Zna se da centar opisane kružnice oko trougla AOC leži na pravoj BD . Dokažite da centar opisane kružnice oko trougla BOD leži na pravoj AC .
6. (12 poena) U svakom polju tablice 1000×1000 stoji nula ili jedinica. Dokažite da se može bilo precrtati 990 vrsta tako da u svakoj koloni bude bar jedna neprecrtana jedinica, bilo precrtati 990 kolona tako da u svakoj vrsti bude bar jedna neprecrtana nula.
7. (14 poena) Kvadrat $ABCD$ razrezan je na jednake pravougaonike s celobrojnim dužinama stranica. Figura F je unija svih pravougaonika koji imaju zajedničke tačke sa dijagonalom AC . Dokažite da AC deli površ figure F na dva dela jednakih površina.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 27. februar 2011. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

1. (3 poena) Po kružnici su napisani svi celi brojevi od 1 do 2010 i to tako da pri kretanju u smeru kazaljke na satu brojevi naizmenično čas rastu, čas opadaju. Dokažite da postoje neka dva broja koji stoje jedan do drugog čija je razlika parna.
2. (4 poena) Pravougaonik je razdeljen na 121 polje sa deset vertikalnih i deset horizontalnih pravih. Kod 111 polja obimi su celi brojevi. Dokažite da su i obimi ostalih deset polja celi brojevi.
3. (5 poena) Dužina odrasle gliste je 1 metar. Odrasla glista se može razdeliti na dva dela u bilo kojem odnosu dužina. Pri tome nastaju dve nove gliste, koje odmah počinju da rastu brzinom 1 metar na čas. Kada dužina gliste dostigne 1 metar, ona postaje odrasla i prestaje dalje da raste. Mogu li se od jedne odrasle gliste dobiti 10 odraslih glista za manje od 1 sat?
4. (5 poena) Dat je konveksan četvorougao. Ako povučemo ma koju njegovu dijagonalu ona će ga podeliti na dva jednakokraka trougla, a ako odjednom povučemo obe njegove dijagonale, podeliće ga na četiri jednakokraka trougla. Da li je taj četvorougao obavezno kvadrat?
5. Zmaj je zarobio viteza i zatvorio ga u tamnicu. Dao mu je 100 raznih novčića od kojih je tačno polovina magičnih. Koji novčići su magični, zna samo zmaj. Svakog dana vitez razdvaja sve novčiće na dve gomile (koje ne moraju biti jednake). Ako u gomilama bude isti broj običnih ili isti broj magičnih novčića, zmaj će osloboditi viteza. Može li se vitez sigurno osloboditi za ne manje od:
 - a) (2 poena) 50 dana?
 - b) (3 poena) 25 dana?

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 27. februar 2011. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.

Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

1. (3 poena) Strane konveksnog poliedra su slični trouglovi. Dokažite da taj poliedar ima dva para jednakih strana (jedan par jednakih strana i još jedan par jednakih strana).
2. (4 poena) Dužina odrasle gliste je 1 metar. Odrasla glista se može razdeliti na dva dela u bilo kojem odnosu dužina. Pri tome nastaju dve nove gliste, koje odmah počnu da rastu brzinom 1 metar na čas. Kada dužina gliste dostigne 1 metar, ona postaje odrasla i prestaje da raste. Mogu li se od jedne odrasle gliste dobiti 10 odraslih glista za manje od 1 sat?
3. (4 poena) Po kružnici je raspoređeno 100 belih kamenčića. Dat je ceo broj k takav da je **Error! Bookmark not defined.** U jednom potezu dopušteno je izabrati bilo kojih k kamenčića poređanih jedan za drugim, od kojih su prvi i poslednji beli i samo njih obojiti crnom bojom. Za koje k možemo za nekoliko takvih poteza obojiti svih 100 kamenčića u crnu boju?
4. (5 poena) četiri normale, spuštene iz temena konveksnog petougla na suprotne stranice, seku se u jednoj tački. Dokažite da i peta normala mora proći kroz tu tačku
5. (5 poena) U jednoj zemlji ima 100 gradova i nekoliko puteva. Svaki put povezuje neka dva grada. Putevi se ne seku. Iz svakog grada može se stići u ma koji drugi grad krećući se tim putevima. Dokažite da je moguće neke puteve proglasiti glavnim, tako da iz svakog grada polazi neparan broj glavnih puteva.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 13. mart 2011. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

1. (4 poena) Da li postoji šestougao koji se jednom pravom može razdeliti na četiri podudarna trougla?
2. (4 poena) Kroz koordinatni početak prolaze prave (uključujući i koordinatne ose) koje dele koordinatnu ravan na uglove od po 1° . Nađite zbir apscisa tačaka preseka tih pravih sa pravom **Error! Bookmark not defined.**
3. (5 poena) Baron Minhauzen ima 50 tegova. Mase svih tegova su izražene različitim prirodnim brojevima koji ne prelaze 100, a zbir masa svih tegova je paran broj. Baron tvrdi da ne postoji deo tih tegova koji se može staviti na jedan tas terazija, a ostali tegovi na drugi tas terazija, tako da terazije budu u ravnoteži. Da li je Baron u pravu?
4. (6 poena) Dokažite da se za m koji prirodni broj N mogu naći dva para prirodnih brojeva takvih da su zbirovi brojeva svakog para jednaki, a da je količnik proizvoda brojeva jednog para i proizvoda brojeva drugog para jednak N (tj. da je jedan proizvod N puta veći od drugog).
5. (7 poena) Dat je oštrogli trougao ABC , a AA_1 i BB_1 su njegove visine. Iz tačke A_1 spuštene su normale na prave AC i AB , a iz tačke B_1 spuštene su normale na prave BC i BA . Dokažite da podnožja tih normala obrazuju jednakokraki trapez.
6. (10 poena) Dva mrava su se kretala (milela) svaki po svojoj zatvorenoj putanji na tabli 7×7 . Svaki mrav se kretao samo po ivicama polja i prošao kroz svako od 64 temena na toj tabli tačno jedanput. Koji je najmanji mogući broj ivica po kojima su prošla oba mrava?
7. (10 poena) Data je kvadratna tablica. U svakom polju te tablice upisan je po jedan broj. Zna se da je u svakom redu (vrsti) zbir dva najveća broja jednak a , a u svakoj koloni te tablice zbir dva najveća broja jednak b . Dokažite da je $a=b$.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 13. mart 2011. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.

Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

1. (4 poena) Baron Minhauzen ima 50 tegova. Masa svakog od tegova je izražena različitim prirodnim brojem koji ne prelazi 100, a zbir masa svih tegova je paran broj. Baron tvrdi da nije moguće deo tih tegova staviti na jedan tas terazija, a ostale tegove na drugi tas terazija, tako da terazije budu u ravnoteži. Da li je Baron u pravu?
2. (6 poena) U prostoru sa Dekartovim sistemom koordinata dat je pravougli paralelepiped čija temena imaju celobrojne koordinate. Njegova zapremina je 2011. Dokažite da su ivice tog paralelepipeda paralelne koordinatnim osama.
3. Od drvene grede oblika trostrane prizme sa dve strane odsekli su (ravnom testerom) po komad. Rezovi nisu doticali ni osnove prizme, ni jedan drugog.
 - a) (3 poena) Mogu li preseći biti slični, ali ne i podudarni trouglovi?
 - b) (4 poena) Može li jedan presek biti jednakostraničan trougao sa stranicom 1, a drugi jednakostranični trougao sa stranicom 2?
4. Dato je N plavih i N crvenih štapića, pri čemu je zbir dužina plavih štapića jednak zbiru dužina crvenih štapića. Zna se da se od plavih štapića može složiti N -trougao, a takođe i od crvenih. Može li se uvek izabrati jedan plavi i jedan crveni štapić i prefarbati ih (plavi u crvenu boju, a crveni u plavu), tako da se ponovo od plavih može složiti N -trougao, a od crvenih takođe? Rešite zadatak:
 - a) (4 poena) za $N=3$.
 - b) (4 poena) za proizvoljan prirodan broj N veći od 3.
5. (8 poena) Kraci AB i CD trapeza $ABCD$ su istovremeno i tetive (tim redom) kružnica ω_1 i ω_2 koje se dodiruju spolja. Veličine odgovarajućih lukova kružnica koji odgovaraju tetivama AB i CD su α i β . Kružnice ω_3 i ω_4 takođe imaju za tetive AB i CD (tim redom). Njihovi lukovi AB i CD takođe se nalaze sa iste strane tetiva kao i odgovarajuće tetive prve dve kružnice, a veličine su im β i α . Dokažite da se kružnice ω_3 i ω_4 takođe dodiruju.
6. (8 poena) Data je kvadratna tablica u čijem je svakom polju zapisan po jedan broj. Zna se da je u svakoj vrsti te tablice zbir dva najveća broja jednak a , a u svakoj koloni zbir dva najveća broja jednak b . Dokažite da je $a=b$.
7. (11 poena) Dve firme naizmenično angažuju programere, među kojima ima 11 genijalnih. Prvog programera svaka firma bira proizvoljno, a svaki sledeći treba da poznaje nekog od ranije angažovanih u toj firmi. Ako firma ne može da angažuje programera po tim pravilima, ona prekida prijem, a druga može da nastavi. Programer se može angažovati za rad najviše u jednoj firmi. Spisak programera i njihovih poznanstava se zna unapred, uključujući i informaciju o tome ko je genije. Mogu li se poznanstva urediti tako da firma, koja kao druga nastupa u toj igri, može angažovati 10 genija, bez obzira kako postupa prva firma?

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 10 октября 2010 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты).

баллы задачи

- 4 1. В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета — черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках.
(Пифагорова таблица умножения — это клетчатая таблица, в которой на пересечении m -й строки и n -го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).)

С. Прика

- 4 2. Равнобокая трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит ее площадь пополам.

Р. К. Гордин

- 4 3. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

А. В. Шаповалов

- 4 4. В некоторой школе более 90% учеников знают английский и немецкий языки, и более 90% учеников знают английский и французский языки. Докажите, что среди учеников, знающих немецкий и французский языки, более 90% знают английский язык.

Фольклор, предложил А. Шень

- 4 5. Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно.

В. В. Произволов

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 10 октября 2010 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Банкомат обменивает монеты: дублионы на пистолы и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон — $1/s$ пистолей, где s — не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).
- 2 а) Может ли так быть, что обменяв сколько-то дублонов на пистолы, а затем обменяв полученные пистолы на дублионы, мы получим больше дублонов, чем было вначале?
- 3 б) Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

Л. Стунжас

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O . Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD , равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BOC и DOA . Докажите, что
- 2 а) четырехугольник $ABCD$ — описанный;
- 3 б) четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей.

П. А. Кожевников

3. Полицейский участок расположен на прямой дороге, бесконечной в обе стороны. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали вдогонку полицейского на новой полицейской машине. Однако вот беда: полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в каком направлении вдоль дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?
- 5

Г. А. Гальперин

4. Квадратная доска $n \times n$ разделена на n^2 прямоугольных клеток $n - 1$ горизонтальными и $n - 1$ вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все n клеток черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток доски не меньше общей площади белых.
- 5

П. А. Кожевников

5. 55 боксеров участвовали в турнире по системе «проигравший выбывает». Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боев мог провести победитель турнира?
- 5

А. В. Шаповалов

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 24 октября 2010 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы задачи

- | | |
|------------------------|--|
| 4 | 1. На плоскости дана прямая. С помощью пятак постройте две точки какой-нибудь прямой, перпендикулярной данной. Разрешаются такие операции: отметить точку, приложить пятак к ней и обвести его; отметить две точки (на расстоянии меньше диаметра пятака), приложить пятак к ним и обвести его. Нет возможности прикладывать пятак к прямой так, чтобы она его касалась. |
| <i>Г. Фельдман</i> | |
| 5 | 2. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n + 1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он? |
| <i>Б. Р. Френкин</i> | |
| 8 | 3. На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее 25 встреч. |
| <i>Б. Р. Френкин</i> | |
| 8 | 4. Клетчатый прямоугольник разбит на двуклеточные домино. В каждом домино провели одну из двух диагоналей. Оказалось, что никакие диагонали не имеют общих концов. Докажите, что ровно два из четырех углов прямоугольника являются концами диагоналей. |
| <i>А. В. Шаповалов</i> | |
| 8 | 5. Имеется пятиугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2. |
| <i>Г. А. Гальперин</i> | |
| 8 | 6. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр из A' на CP пересекается с перпендикуляром из C' на AP в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C . |
| <i>Ф. А. Ивлев</i> | |
| 12 | 7. За круглым столом заседают N рыцарей. Каждое утро чародей Мерлин сажает их в другом порядке. Начиная со второго дня Мерлин разрешил рыцарям делать в течение дня сколько угодно пересадок такого вида: два сидящих рядом рыцаря меняются местами, если только они не были соседями в первый день. Рыцари стараются сесть в том же порядке, что и в какой-нибудь из предыдущих дней: тогда заседания прекратятся. Какое наибольшее число дней Мерлин гарантированно может проводить заседания? (Рассадки, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. Мерлин за столом не сидит.) |

М. В. Прасолов

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 24 октября 2010 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | | | |
|----|----|---|-------------------------|
| 2 | 1. | В некоей стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей). | |
| 3 | а) | Одна запись стерлась. Всегда ли можно однозначно восстановить ее по остальным? | |
| 3 | б) | Пусть стерлись k записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем k всегда можно однозначно восстановить стершиеся записи? | <i>И. И. Богданов</i> |
| 6 | 2. | На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее N^2 встреч. | <i>Б. Р. Френкин</i> |
| 6 | 3. | Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2. | <i>Г. А. Гальперин</i> |
| 2 | 4. | Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе | |
| 5 | а) | конечно; | |
| | б) | бесконечно? | <i>И. В. Митрофанов</i> |
| 8 | 5. | Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O , причем точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD . Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC . | <i>Ф. А. Ивлев</i> |
| 12 | 6. | В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что в любом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в любой строке будет хотя бы один невычеркнутый ноль. | <i>А. Ромашенко</i> |
| 14 | 7. | Квадрат $ABCD$ разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми длинами сторон. Фигура F является объединением всех прямоугольников, имеющих общие точки с диагональю AC . Докажите, что AC делит площадь фигуры F пополам. | <i>В. В. Произволов</i> |

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 27 февраля 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 3 1. По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, четна.

Б. Р. Френкин

- 4 2. Прямоугольник разбили на 121 прямоугольную клетку десятью вертикальными и десятью горизонтальными прямыми. У 111 клеток периметры целые. Докажите, что и у остальных десяти клеток периметры целые.

А. В. Шаповалов

- 5 3. Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час?

М. А. Хачатурян

- 5 4. Дан выпуклый четырехугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырехугольник — квадрат?

В. Шевяков

- 2 5. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем

2 а) на 50-й день?

3 б) на 25-й день?

жюри по мотивам задачи А. В. Шаповалова

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 27 февраля 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 3 1. Грани выпуклого многогранника — подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и еще одну пару равных граней).

В. В. Произволов

- 4 2. Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час?

М. А. Хачатурян

- 4 3. По кругу лежат 100 белых камней. Дано целое число k в пределах от 1 до 50. За ход разрешается выбрать любые k подряд идущих камней, первый и последний из которых белые, и покрасить первый и последний камни в черный цвет. При каких k можно за несколько таких ходов покрасить все 100 камней в черный цвет?

А. Бердников

- 5 4. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

фольклор, предложил А. А. Заславский

- 5 5. В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечетное число главных дорог.

А. Шень

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы задачи

- | | | | |
|----|----|--|-------------------------|
| 4 | 1. | Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника? | <i>Н. П. Стрелкова</i> |
| 4 | 2. | Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1° . Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$. | <i>А. В. Шаповалов</i> |
| 5 | 3. | У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой? | <i>А. К. Толтыго</i> |
| 6 | 4. | Докажите, что для любого натурального числа N найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в N раз. | <i>Б. Р. Френкин</i> |
| 7 | 5. | Дан остроугольный треугольник ABC ; AA_1 , BB_1 — его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на стороны AC и AB , а из точки B_1 опустили перпендикуляры на стороны BC и BA . Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию. | <i>Г. Фельдман</i> |
| 10 | 6. | Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7 . Каждый полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи? | <i>А. А. Заславский</i> |
| 10 | 7. | Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a , а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b . Докажите, что $a = b$. | <i>Р. В. Варат</i> |

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы веса оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой?

А. К. Толтыго

- 6 2. В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.

М. И. Малкин

- 3 3. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

3 а) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

4 б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой — равносторонним треугольником со стороной 2?

А. В. Шаповалов — п. а), П. В. Сергеев — п. б)

- 4 4. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N -угольник, и из красных — тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю — в красный цвет, а красную — в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить N -угольник, и из красных — тоже? Решите задачу

4 а) для $N = 3$;

4 б) для произвольного натурального N , большего 3.

А. В. Грибалко

- 8 5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2 , касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β . Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD , расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α . Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Ф. А. Ивлев

- 8 6. Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a , а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b . Докажите, что $a = b$.

Р. В. Варат

- 11 7. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен, включая информацию о том, кто гении. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

А. В. Шаповалов

Решения задач.

1. Ответ: первый игрок.

Пусть первый игрок всегда переключает одну и ту же монету. Тогда он всегда сможет сделать ход и, значит, выиграет. Действительно, назовём расположение (орлов и решек) чётным или нечётным в зависимости от того, в скольких позициях оно отличается от начального. Первый игрок всегда переходит от чётного расположения к нечётному, второй — наоборот. Если первый игрок переходит к расположению, которое уже появлялось, то получить его раньше мог только он сам, причём перевернув ту же монету. Значит, уже появлялось и расположение, из которого он делает ход, — противоречие.

2. Все 49 чисел различны, иначе суммы двух из них с третьим одинаковы вопреки условию. Пусть $a_1, \dots, a_{49}$ — числа на доске, занумерованные в порядке возрастания. Если $a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j$ при каких-то $i < j$, то $a_{i+1} + a_j = a_{j+1} + a_i$, что возможно лишь в случае $j = i + 1$ (тогда сумма слева не является попарной суммой). Таким образом, среди разностей соседних по величине чисел на доске одинаковыми могут быть лишь две соседних. Значит, сумма всех этих разностей (т.е. разность между наибольшим и наименьшим числом) не меньше $2 \cdot (1 + 2 + \dots + 24) = 600$. Так как наименьшее из чисел на доске не меньше 1, то наибольшее не меньше 601.

3. Ответ: верно.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с центром O описанной окружности треугольника ABC . В этой системе точки A, B, C также движутся прямолинейно и равномерно; значит, если одна из них покоится, то и все три покоятся (иначе расстояния до них от O не будут всё время равны), и задача решена. Итак, можно считать, что все три точки движутся по прямым a, b, c .

Квадрат расстояния от точки, движущейся со скоростью v по прямой, находящейся на расстоянии d от O , в момент времени t равен $v^2(t + m)^2 + d^2$ (где m — некая константа). Так как расстояния от точек A, B, C до O одинаковы в каждый момент времени, соответствующие квадратные трёхчлены для них равны в бесконечном числе точек — а значит, равны по коэффициенту. Приравнявая последовательно коэффициенты при t^2, t и 1, получаем, что величины v, m и d для всех трёх точек равны. Тогда, если «продолжить» движение точек на отрицательное время, то опять же расстояния от O до всех трёх точек будут равны.

Поскольку значения d и m для всех точек равны, все точки одновременно оказываются в основаниях перпендикуляров из O на прямые a, b, c одновременно. Если затем все лучи, проведённые из O в наши три точки, вращаются в одном направлении, то все треугольники поворотного-гомотетичны, а значит, подобны. Иначе, скажем, лучи в точки A и B вращаются в одну сторону, а луч в точку C — в другую.

Пусть одна из прямых a, b (скажем, a) пересекает прямую c ; из симметрии, точки A и C одновременно приходят в точку пересечения a и c . Но это значит, что в исходной системе отсчёта они тоже должны были встретиться; поскольку лучи, по которым они двигались, пересекаются (а дополнительные к ним — нет), то это произошло в положительный момент времени. Но это противоречит условию. Наконец, если прямые a, b, c параллельны, то две из них совпадают. Тогда точки, двигавшиеся по ним, встречались в основании перпендикуляра из точки O , что невозможно по тем же причинам.

4. Заметим сначала, что идеальных компаний не больше, чем количество различных подмножеств девушек — каждое такое подмножество если и даёт идеальную компанию (вместе с какими-то парнями), то только одну (надо просто добавить всех парней, которым нравятся все эти девушки). Значит, компаний не больше $2^9 = 512$.

Приведем пример, когда компаний ровно 512. Пусть шести юношам из пятнадцати не нравится ни одна девушка. Оставшихся девять юношей занумеруем числами от 1 до 9, и девушек тоже. Пусть юноше с номером i нравятся все девушки, кроме i -й. Тогда любой непустой набор девушек даёт идеальную из девяти человек (надо добавить юношей с номерами, отличными от номеров девушек), в частности все девушки образуют идеальную компанию; пустой набор девушек тоже даёт идеальную компанию — это все 15 юношей.

5. Если $a = 1$, то, очевидно, $b = 1$; при этом пара $(1, 1)$ подходит. Осталось разобрать случай $a, b > 1$. Заметим сразу, что a и b взаимно просты; пусть $a > b$.

Число $A = a^{1000} + b^{1000} + 1 = a^{1000} + (b^{1000} + 1)$ делится на a^{619} ; аналогично, A делится на b^{619} , а из взаимной простоты — и на их произведение. Итак, $a^{1000} + b^{1000} + 1 \geq a^{619}b^{619}$, а значит, $a^{1001} \geq 2a^{1000} \geq a^{619}b^{619}$, или $a^{382} \geq b^{619}$. С другой стороны, $b^{1001} > b^{1000} + 1 \geq a^{619}$. Итак, $b^{1001 \cdot 382} > a^{619 \cdot 382} \geq b^{619 \cdot 619}$. Но $1001 \cdot 382 < 619^2$ — противоречие.

Примечание. Можно было рассуждать немного по-другому. Получив неравенство $a^{619}b^{619} \leq a^{1000} + b^{1000} + 1$, замечаем, что $a^{619}b^{619} < 2a^{1000}$ (так как при натуральных $a > b$, очевидно, b^{1000} меньше a^{1000} хотя бы на 2). Пусть $a = b^\alpha$. Тогда $b^{619(\alpha+1)} < 2b^{1000\alpha}$. Логарифмируя, получаем $619(\alpha + 1) < \log_b 2 + 1000\alpha$. Так как $b \geq 2$, то $\log_b 2 \leq 1$, и из предыдущего неравенства $618 < 381\alpha$, т. е. $\alpha > \frac{618}{381}$. Но тогда $a^{619} > b^{\frac{619 \cdot 618}{381}} > b^{1004} > b^{1000} + 1$. Противоречие. Значит, либо a , либо b равно 1. Легко видеть, что подходит только пара $(1, 1)$.

6. Обозначим данные многоугольники M_1, M_2, M_3 , их центры — O_1, O_2, O_3 ; также обозначим через T_{ij} пересечение многоугольников M_i и M_j (ясно, что многоугольники T_{ij} попарно не пересекаются). Тогда середина O_{12} отрезка O_1O_2 является центром симметрии, переводящей M_1 в M_2 ; значит, эта точка — центр симметрии многоугольника T_{12} .

Утверждение задачи равносильно тому, что сумма площадей многоугольников T_{ij} не превосходит 1. Если один из них (скажем, T_{23}) пуст, то утверждение очевидно, ибо T_{13} и T_{12} расположены внутри M_1 и не пересекаются.

В противном случае рассмотрим многоугольник T'_{23} , полученный из T_{23} симметрией относительно O_{12} . Поскольку эта симметрия переводит M_2 в M_1 , а T_{12} — в себя, многоугольник T'_{23} лежит в M_1 и не пересекается с T_{12} .

Заметим, что многоугольник M_3 не пересекается с многоугольником M'_3 , симметричным ему относительно O_{12} ; иначе этому пересечению принадлежали бы две симметричные точки A и A' , а значит, и середина отрезка между ними, то есть

O_{12} . Но O_{12} лежит в T_{12} и, значит, не лежит в M_3 . Итак, M_3 и M'_3 не пересекаются, а значит, не пересекаются и лежащие в них многоугольники T_{13} и T'_{23} .

Итак, все три непересекающихся многоугольника T_{12} , T_{13} , T'_{23} лежат в M_1 , поэтому сумма их площадей не превосходит 1, что и требовалось доказать.

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 17 марта 2011 г.

1. В ряд выложено n монет. Два игрока по очереди выбирают монету и переворачивают её. Расположение орлов и решек не должно повторяться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Б. Р. Френкин

2. На доске написаны 49 натуральных чисел. Все их попарные суммы различны. Докажите, что наибольшее из чисел больше 600.

Б. Р. Френкин

3. Даны три попарно пересекающихся луча. В некий момент времени по каждому лучу из его начала начинает двигаться точка с постоянной скоростью. Известно, что эти три точки в любой момент времени образуют треугольник, причем центр описанной окружности этого треугольника тоже движется равномерно и прямолинейно. Верно ли, что все эти треугольники подобны друг другу?

Ф. К. Нилов

4. Подмножество студенческой группы назовём *идеальной компанией*, если

- 1) в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам;
 - 2) в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив условие 1.
- В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста группы составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

А. А. Клячко, Б. Ф. Мельников

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что $a^{1000} + 1$ делится на b^{619} и $b^{1000} + 1$ делится на a^{619} .

М. В. Мурашкин

6. На плоскости расположен центрально-симметричный выпуклый многоугольник площади 1 и две его копии (каждая получена из многоугольника некоторым параллельным переносом). Известно, что никакая точка плоскости не покрыта тремя многоугольниками сразу. Докажите, что общая площадь, покрытая многоугольниками, не меньше 2.

И. И. Богданов