

Самоил Малчески, Скопје
 Алекса Малчески, Скопје

ТЕОРЕМА НА ПТОЛОМЕЈ

Античкиот научник Клавдиј Птоломеј, кој живеел во II век од н.е. дал забележителен придонес во развојот на астрономијата и геометријата. Имено, тој е автор на теоријата за геоцентричниот систем, која опстојува се до XVII век. Имено, Никола Коперник докажал дека Земјата се врти околу Сонцето, а не обратно како што тврдел Проломеј. Во астрономијата, теоријата на Птоломеј била оповргната, меѓутоа неговите математички достигања се актуелни и денес. Во натаможните разгледувања ќе се осврнеме на познатата теорема на Птоломеј за тетивен четириаголник и нејзината примена.

Теорема. (Птоломеј). Производот на должините на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков на збирот од производите на должините на спротивните страни.

Доказ. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник со должини на страни a, b, c и d и должини на дијагонали e и f (цртеж десно). Нека $\angle BDC = \angle ADF$. Бидејќи $\angle DBC = \angle DAF$ (агли над тетивата CD во кружницата) следува дека триаголниците AFD и BCD се слични, па затоа

$$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AF} : \overline{BC},$$

т.е.

$$bd = f \cdot \overline{AF}. \quad (1)$$

Понатаму, $\angle ADB = \angle FDC$ и како $\angle ABD = \angle FCD$ (агли над тетивата AD во кружницата) следува дека триаголниците FCD и ABD се слични, т.е

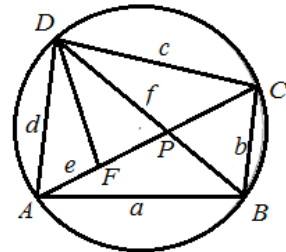
$$ac = f \cdot \overline{FC}. \quad (2)$$

Конечно, ако ги собереме равенствата (1) и (2) добиваме

$$ac + bd = f \cdot \overline{AF} + f \cdot \overline{FC} = f(\overline{AF} + \overline{FC}) = ef. \blacksquare$$

Задача 1. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC . Произволна точка M припаѓа на лакот BC на кој не му припаѓа точката M . Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$.

Решение. Од теоремата на Птоломеј, применета на тетивниот четириаголник $ABMC$ добиваме



$$\overline{BM} \cdot \overline{CA} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} = \overline{BC} \cdot \overline{AM}. \quad (3)$$

Но, триаголник ABC е рамностран, што значи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, па од (3) добиваме

$$\overline{BM} \cdot \overline{AB} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AM}$$

и ако последното равенство го поделиме со \overline{AB} го добиваме бараното равенство. ■

Задача 2. Рамнокрак траpez $ABCD$ со должини на основи a и b е опишан околу кружница $K(O, r)$. Докажи, дека $2r = \sqrt{ab}$.

Решение. Од својствата на тангентните отсечки (види цртеж) следува

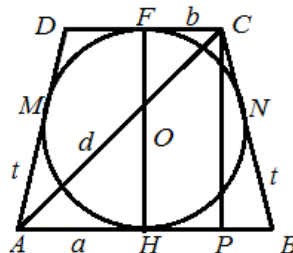
$$\overline{AM} = \overline{AH}, \overline{BN} = \overline{BH}, \overline{CN} = \overline{CF}, \overline{DF} = \overline{DM}$$

па затоа

$$\begin{aligned} 2t &= (\overline{BN} + \overline{CN}) + (\overline{AM} + \overline{DM}) \\ &= (\overline{BH} + \overline{AH}) + (\overline{CF} + \overline{DF}) = a + b, \end{aligned}$$

т.е. $t = \frac{a+b}{2}$. Понатаму, околу рамнокрак траpez може да се опише кружница, па од теоремата на Птоломеј следува дека $d^2 = t^2 + ab$. Од друга страна $\overline{AP} = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, па од досега изнесеното и од Питагоровата теорема применета на $\triangle APC$ добиваме

$$(2r)^2 = d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = t^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab, \text{ т.е. } 2r = \sqrt{ab}. \blacksquare$$



Задача 3. Збирот на должните на катетите на правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C е еднаков на m . Над хипотенузата на $\triangle ABC$ е конструиран квадрат така што $\triangle ABC$ и квадратот се наоѓаат од различна страна на правата AB . Определи го растојанието од точката C до центарот на квадратот.

Решение. Нека O е центарот на квадратот.

Бидејќи $\angle AOB = 90^\circ = \angle ACB$ добиваме дека четириаголникот $AOBC$ е тетивен. Од теоремата на Птоломеј следува дека

$$\overline{AB} \cdot \overline{CO} = \overline{AC} \cdot \overline{OB} + \overline{AO} \cdot \overline{CB}. \quad (4)$$

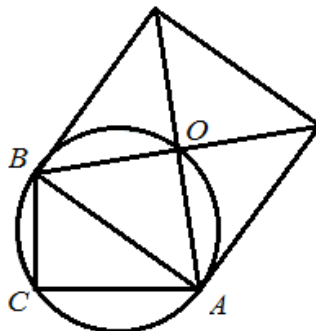
Понатаму, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 \text{ и како } \overline{AO} = \overline{BO}, \text{ добиваме}$$

дека $\overline{AO} = \overline{BO} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$. Сега од (4) следува

$$\overline{AB} \cdot \overline{CO} = \overline{AO}(\overline{AC} + \overline{CB}) = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}(\overline{AC} + \overline{CB}) = m \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \overline{CO} = \frac{m}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

Задача 4. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ се допира до страните AC и



$BC, \overline{AC} \neq \overline{BC}$, во точките P и Q , соодветно, а припишаните кружници кон AC и BC се допираат до AB во точките M и N , соодветно. Ако точките M, N, P и Q лежат на една кружница, определи го $\sphericalangle ACB$.

Решение. Симетралата на AB и симетралата на $\sphericalangle ACB$ се сечат во средината D на лакот AB од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C . Бидејќи

$$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{CQ} = p - c$$

условот на задачата е еквивалентен на $\overline{DM} = \overline{DP}$. Ако ги одземеме равенствата

$$\overline{DP}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CP}^2 - 2\overline{DC} \cdot \overline{CP} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{DA} \cdot \overline{AM} \cos \frac{\gamma}{2}$$

добиваме

$$\overline{DC} - \overline{DA} = 2(p - c) \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Од теоремата на Птоломеј имаме $\overline{DC} = \frac{(a+b)\overline{DA}}{c}$. Бидејќи $c = 2\overline{DA} \cos \frac{\gamma}{2}$,

заклучуваме $\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\gamma = 90^\circ$. ■

Во следната теорема, со помош на комплексни броеви ќе го докажеме познатото неравенство на Птоломеј.

Теорема 2 (неравенство на Птоломеј). За произволни точки A, B, C, D во рамнината точно е неравенството

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \quad (5)$$

Доказ. Нека a, b, c, d се комплексните броеви придружени во комплексната рамнина на точките A, B, C, D соодветно. Тогаш

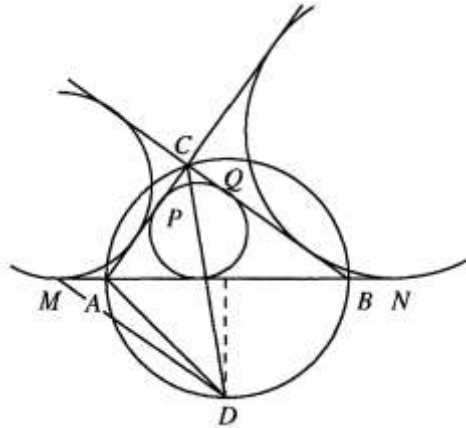
$$(a-b)(c-d) + (b-c)(a-d) = (a-c)(b-d).$$

Од неравенството на триаголник за комплексни броеви го добиваме неравенството

$$|(a-b)(c-d)| + |(b-c)(a-d)| \geq |(a-c)(b-d)|,$$

т.е. неравенството

$$|a-b| \cdot |c-d| + |b-c| \cdot |a-d| \geq |a-c| \cdot |b-d|,$$



кое всушност е неравенството (5) запишано со помош на комплексните броеви придружени на точките A, B, C, D . ■

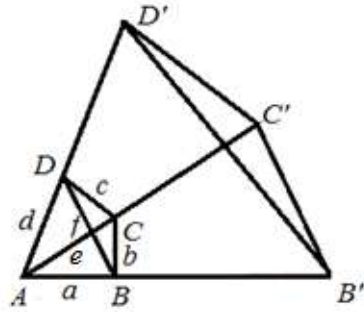
Во случај кога точките A, B, C и D се темиња на конвексен четириаголник ќе презентираме друга доказ на неравенството на Птоломеј.

Теорема 2' (неравенство на Птоломеј). Ако точките A, B, C и D се темиња на конвексен четириаголник, тогаш точно е неравенството (5). Знак за равенство важи ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

Доказ. Нека е даден четириаголникот $ABCD$ (цртеж десно). На полуправите AB, AC и AD соодветно избираме точки B', C и D' такви што

$$\overline{AB} \cdot \overline{AB'} = 1, \overline{AC} \cdot \overline{AC'} = 1 \text{ и } \overline{AD} \cdot \overline{AD'} = 1.$$

Според тоа, $\overline{AB} \cdot \overline{AB'} = \overline{AC} \cdot \overline{AC'}$, односно $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB'} : \overline{AC'}$. Но, триаголниците ABC и $AB'C'$ имаат заеднички агол во темето A , па од последното равенство следува дека тие се слични. На потполно ист начин заклучуваме дека и триаголниците ADC и $AC'D'$ се слични. Затоа $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AC'B'$ и $\overline{AC} : \overline{AB'} = \overline{BC} : \overline{C'B'}$. При ознаките на цртежот од последната пропорција и од $\overline{AB'} = \frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{a}$ следува $\overline{C'B'} = \frac{b}{ae}$. На потполно аналоген начин докажуваме дека $\overline{C'D'} = \frac{c}{de}$ и $\overline{D'B'} = \frac{f}{ad}$. Конечно, од претходните три равенства и нареванството на триаголник применето за точките B', C' и D' добиваме $\overline{B'D'} \leq \overline{B'C'} + \overline{C'D'}$, т.е. $\frac{f}{ad} \leq \frac{b}{ae} + \frac{c}{de}$, од каде следува $ef \leq ac + bd$, т.е. точно е неравенството (5).



Јасно, ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен, тогаш од теоремата на Птоломеј следува дека во (5) важи знак за равенство. Обратно, нека во (5) важи знак за равенство. Тоа значи дека за точките B', C' и D' важи $\overline{B'D'} = \overline{B'C'} + \overline{C'D'}$, т.е. тие се колинеарни. Според тоа,

$$180^\circ = \sphericalangle B'C'A + \sphericalangle D'C'A = \sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC,$$

од што следува дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. ■

На крајот ви предлагаме самостојно да ја решите обратната задача на задача 1.

Даден е рамностран триаголник ABC и точка M таква што четириаголникот $ABMC$ е конвексен. Ако $\overline{MA} = \overline{MB} + \overline{MC}$, докажи дека точката M припаѓа на опишаната круница околу триаголникот ABC .