

## ДВЕ УСЛОВНИ АЛГЕБАРСКИ НЕРАВЕНСТВА<sup>\*</sup>

Д-р. Шефкет Арсланагиќ, Сараево, БиХ,  
М-р. Фарук Зејнулахиќ, Сараево, БиХ

Во оваа работа ќе докажеме две интересни условни алгебарски неравенства кои гласат:

Нека  $x, y, z$  се ненегативни реални броеви, т.е.  $x, y, z \geq 0$  за кои важи  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Ќе докажеме дека важат неравенствата:

$$a) \quad 1 \leq \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad (1)$$

$$b) \quad 1 \leq \frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq \sqrt{2}. \quad (2)$$

Докази:

a) 1<sup>o</sup> Прво ќе ја докажеме левата страна на неравенството (1). Нека

$$f(x, y, z) = \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy}.$$

Од условот  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  важи  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , па

$$0 < 1 - yz \leq 1, 0 < 1 - zx \leq 1, 0 < 1 - xy \leq 1,$$

односно

$$\frac{x}{1-yz} \geq x, \frac{y}{1-zx} \geq y, \frac{z}{1-xy} \geq z,$$

т.е.

$$f(x, y, z) \geq x + y + z \geq x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Јасно е дека равенството важи ако и само ако

$$(x, y, z) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

2<sup>o</sup> За да ја докажеме десната страна на неравенството (1), најпрво да воочиме дека заради неравенството помеѓу аритметичка и геометричка средина за два позитивни броја, важи неравенството

$$yz \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2), \text{ т.е.}$$

$$1 - yz \geq 1 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(1 + x^2),$$

од каде што

\* Авторите на трудот се автори на дадените неравенства.

$$\frac{x}{1-yz} \leq \frac{2x}{1+x^2}.$$

Значи,

$$f(x,y,z) \leq \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2}. \quad (3)$$

Ќе го користеме следното помошно неравенство:

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}(1+x^2). \quad (4)$$

За неравенството (4), имаме:

$$\begin{aligned} (1+x^2)^2 - \frac{16\sqrt{3}}{9}x &= \frac{1}{9}(9x^4 + 18x^2 - 16\sqrt{3}x + 9) \\ &\approx \frac{1}{9}(3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(3x^2 + 2\sqrt{3}x + 9) \\ &= \frac{1}{9}(\sqrt{3}x - 1)^2(3x^2 + 2\sqrt{3}x + 9) \geq 0, \end{aligned}$$

од каде што лесно заклучуваме дека важи (4).

Во (4) важи равенството ако и само ако  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Собирајќи го (4) со двете аналогни неравенства со променливи  $y$  и  $z$ , добиваме:

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}(3+x^2+y^2+z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

Сега од (3) и (5) заклучуваме дека важи неравенството  $f(x,y,z) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , т.е. десната страна на неравенството (1) е точна. Равенството важи ако и само ако  $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Од 1<sup>o</sup> и 2<sup>o</sup> следи дека неравенството (1) е точно.

**6) 3<sup>o</sup>** Прво ќе докажеме дека левата страна на неравенството (2) е точна. Од неравенството

$yz \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \Leftrightarrow (y-z)^2 \geq 0$ , го добиваме следното неравенство:

$$x + xyz \leq x + \frac{1}{2}x(y^2 + z^2) = x + \frac{1}{2}x(1-x^2) = \frac{1}{2}(3x - x^3) \leq 1,$$

затоа што важи неравенството  $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$ .

Користејќи ги двете аналогни неравенства, добиваме:

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \approx \frac{x^2}{x+xyz} + \frac{y^2}{y+xyz} + \frac{z^2}{z+xyz} \geq x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

што значи дека левата страна на неравенството (2) е точна.  
Равенството важи ако и само ако  $(x,y,z) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ .

4<sup>0</sup> За да ја докажеме десната страна на неравенството (2), не намалувајќи ја општоста претпоставуваме дека  $x \leq z$  и  $y \leq z$ . Тогаш

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq \frac{x+y+z}{1+xy},$$

сега доволно е да докажеме дека важи неравенството:

$$x+y+z \leq \sqrt{2}(1+xy),$$

за  $0 \leq x \leq z, 0 \leq y \leq z$  и  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Сега горното неравенство добива облик:

$$x+y+\sqrt{1-x^2-y^2} \leq \sqrt{2}(1+xy),$$

а ова неравенство е еквивалентно со неравенството:

$1-x^2-y^2 \leq (\sqrt{2}(1+xy)-x-y)^2$ . Воведувајќи смени  $u=x+y$  и  $v=xy$ , го добиваме следното неравенство:

$$1-u^2+2v \leq (\sqrt{2}(1+v)-u)^2,$$

па од ова неравенство на едноставен начин го добиваме еквивалентното неравенство:

$$(\sqrt{2}u-v-1)^2+v^2 \geq 0,$$

што е очигледно точно, како сума на два потполни квадрати.

Со ова е докажано дека десната страна на неравенството (2) е точна.

Забележуваме дека во последното неравенство, равенството важи само ако истовремено  $v=0$  и  $\sqrt{2}u-v-1=0$ , т.е.  $xy=0$  и  $x+y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Заклучуваме дека равенството важи само ако

$$(x,y,z)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ или } (x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Заради ограничувањата земени на почетокот на доказот ( $x \leq y$  и  $y \leq z$ ), ги добивме горните две можности. Секако имаме уште една симетрична можност  $(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ . Значи, равенството важи ако и само ако:

$$(x,y,z) \in \left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}.$$

**Напомена:** Ќе дадеме уште еден доказ на десните страни на неравенството (1) и неравенството (2).

5<sup>0</sup> Нека  $S = \frac{y}{l-yz} + \frac{y}{l-zx} + \frac{z}{l-xy}$ . Ќе покажеме дека  $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . Ако еден од  $x, y$  или  $z$  е еднаков на нула, илпр.  $x=0$ , тогаш е  $S = y+z < 2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . Да претпоставиме дека е  $xyz \neq 0$ , така што  $x, y, z \in (0, l)$  (од условот  $x^2 + y^2 + z^2 = l$ ).

Забележуваме дека  $\frac{x}{l-yz} = x + \frac{xyz}{l-yz}$ ; од каде следи:

$$S = x + y + z + xyz \left( \frac{l}{l-yz} + \frac{l}{l-zx} + \frac{l}{l-xy} \right). \quad (6)$$

Користејќ го неравенството  $yz \leq \frac{l}{2}(y^2 + z^2) (\Leftrightarrow (y-z)^2 \geq 0)$  и неравенството помеѓу аритметичка и геометричка средине повеќекратно, добиваме:

$$\begin{aligned} l-yz &\geq l - \frac{l}{2}(y^2 + z^2) = \frac{l}{2}(l+x^2) = \\ &= \frac{l}{2}(x^2 + x^2 + y^2 + z^2) \geq 2\sqrt[3]{x^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} = 2x\sqrt{yz}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} xyz \left( \frac{l}{l-yz} + \frac{l}{l-zx} + \frac{l}{l-xy} \right) &\leq xyz \left( \frac{l}{x\sqrt{yz}} + \frac{l}{y\sqrt{zx}} + \frac{l}{z\sqrt{xy}} \right) \\ &= \frac{l}{2} \left( \sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy} \right) \leq \frac{l}{2} \left( \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} + \frac{x+y}{2} \right) \\ &= \frac{l}{2}(x+y+z), \text{ т.е.} \\ xyz \left( \frac{l}{l-yz} + \frac{l}{l-zx} + \frac{l}{l-xy} \right) &\leq \frac{l}{2}(x+y+z). \quad (7) \end{aligned}$$

Сага заради (6) и (7), користејќи го и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, добиваме:

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{3}{2}(x+y+z) \leq \frac{3}{2}\sqrt{l^2 + l^2 + l^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ т.е.} \\ \frac{x}{l-yz} + \frac{y}{l-zx} + \frac{z}{l-xy} &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

6<sup>0</sup> Заради потполна симетрија на даденото неравенство (2), не намалувајќи ја општоста можеме да земеме дека  $0 \leq x \leq y \leq z$ . Тогаш добиваме (како во претходниот доказ):

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq \frac{x+y+z}{1+xy}.$$

Сега е доволно да докажеме дека важи неравенството:

$$\frac{x+y+z}{1+xy} \leq \sqrt{2},$$

или

$$x+y+z - \sqrt{2}xy \leq \sqrt{2}. \quad (8)$$

За да го докажеме (8) ќе го користиме методот за одредување на екстремни вредности на функцијата  $g(x,y,z) = x+y+z - \sqrt{2}xy$  со помош на Лагранжовиот мултипликатор  $\lambda$  во областа:

$$B = \{(x,y,z) | x,y,z \geq 0 \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Имаме

$$G(x,y,z) = x+y+z - \sqrt{2}xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

т.е. од условот  $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z} = 0$ , добиваме:

$$1 - \sqrt{2}y - 2\lambda x = 0, \quad (9)$$

$$1 - \sqrt{2}x - 2\lambda y = 0, \quad (10)$$

$$1 - 2\lambda z = 0, \quad (11)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (12)$$

Од (9) и (10) добиваме  $(\sqrt{2} - 2\lambda)(x - y) = 0$ , а оттука:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } x = y.$$

Ако е  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , тогаш е  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$  заради (11). Сега од (12) добиваме:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Од друга страна, од (9) добиваме дека е  $1 - \sqrt{2}(x + y) = 0$ , а оттука:

$$x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (14)$$

Сага од (13) и (14) следи дека  $x = 0$  и  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Јасно е дека важи равенството (8) ако е  $x = 0$  и  $y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Ако  $x = y$ , тогаш од (8) добиваме:

$$2x + z - \sqrt{2}x^2 \leq \sqrt{2}. \quad (15)$$

Бидејќи  $(2x+z)^2 \leq 2(4x^2+z^2) \Leftrightarrow (2x-z)^2 \geq 0$ , имаме:

$$2x + z - \sqrt{2}x^2 \leq \sqrt{2}\sqrt{4x^2+z^2} - \sqrt{2}x^2,$$

а оттука заклучуваме дека неравенството (15) е тачно ако;

$$\sqrt{4x^2+z^2} \leq x^2+1,$$

односно заради  $x = y$ :

$$2x^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq (x^2 + 1)^2,$$

или

$$2x^2 + 1 \leq x^4 + 2x^2 + 1,$$

што е очигледно точно.

Значи, неравенството (15) е точно па спрема тоа и неравенството (8). На крај, да земеме точки на работ на  $B$ . Не намалувајќи ја општоста, земаме дека е  $x = 0$ . Тогаш

$$x + y + z - \sqrt{2}xy = y + z \leq \sqrt{2}(y^2 + z^2) = \sqrt{2},$$

што значи дека (8) важи.

Знчи, даденото неравенство е точно и равенството важи во случај кога

$$(x, y, z) \in \left\{ \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
- [2] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Vol. 27: No 1, February 2001.
- [3] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Vol. 28: No 3, April 2002.
- [4] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Vol. 31: No 4, May 2005.

