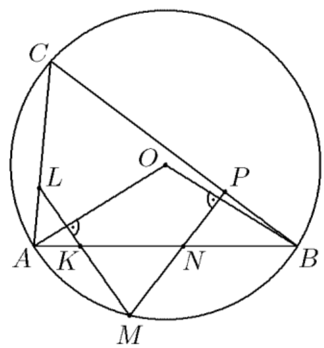
БМО 1991

1. Нека M е точка на лакот AB од опишаната кружница околу остроаголен $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Нормалата повлечена од M на радиусот OA (O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$) ги сече страните AB и AC соодветно во точките K и L, а нормалата повлечена од M на радиусот OB ги сече страните AB и BC соодветно во точките N и P. Изрази го $\measuredangle MLP$ со помош на аглите на триаголникот, ако е дадено, дека $\overline{KL} = \overline{MN}$.

   Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$.



   Од $\measuredangle AOB = 2\gamma$ и $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = 90^\circ - \gamma$ следува $\measuredangle AKL = \measuredangle BNP = \gamma$. Оттука
$$\measuredangle MKN = \measuredangle MNP = \gamma,$$
   т.е. $\triangle MNK$ е рамнокрак и од условот добиваме, дека $\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL}$. Од $\triangle ALK \sim \triangle PNB$ (аглите им се α, β и γ) следува $\frac{\overline{AK}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{NB}}$, а од $\triangle AKM \sim \triangle MNB$ (аглите им се $\measuredangle AKM = \measuredangle MNK = 180^\circ - \gamma$ и $\measuredangle AMK = \measuredangle MBN = \frac{1}{2}\measuredangle AOM$) добиваме $\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NB}}$. Сега од $\frac{\overline{AK}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{NB}}$, $\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NB}}$ и $\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL}$ следува, дека $\overline{PN} = \overline{MN}$, што значи дека KN е средна линија во $\triangle MPL$. Но, триаголникот $\triangle MNK$ е рамнокрак, па затоа и $\triangle MLP$ е рамнокрак, од каде следува $\measuredangle MLP = \measuredangle MPL = \gamma$.

2. Докажи, дека постојат бесконечно многу триаголници T кои не се складни и за кои:

   а) должините на страните a, b, c на T се заемно прости природни броеви, т.е. најголемиот заеднички делител на a, b, c е 1,

   б) плоштината на T е природен број,

   в) должините на висините на T не се природни броеви.

   Решение. Триаголниците со страни $a = 4n^2 + 1, b = 4n^4 + 1, c = 4n^2(n^2 + 1)$, каде $n \geq 2$ е природен број, ги имаат саканите својства. Доказот непосредно следува од равенствата $s - a = 4n^4, s - b = 4n^2, s - c = 1$ и Хероновата формула $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

   Триаголниците со страни $a = (n+1)^2(n^2+1), b = n^2(n^2+n+2), c = 2n^4 + 2n^2 + 1$, каде $n \geq 5$ е непарен природен број ги имаат саканите својства. Докажи!

3. Правилен шестаголник со плоштина H е впишан во конвексен многуаголник со плоштина P. Докажи дека $P \leq \frac{3H}{2}$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека правилниот шестаголник е $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и дожината на неговата страна е a. Да конструираме шест рамнострани триаголници $A_iA_{i+1}B_i$, $i=1,2,3,4,5,6$, каде $A_7 \equiv A_1$, надворешни за шестаголникот. Тогаш за секој $i=1,2,3,4,5,6$ постои права l_i која минува низ A_i, но не содржи внатрешни точки ниту на шестаголникот, нуту на опишаниот многуаголник. Со M_i, $i=1,2,3,4,5,6$ да ја означиме пресечната точка на l_i и l_{i+1}, соодветно. Тогаш опишаниот многуаголник се содржи во многуаголникот $M_1M_2M_3M_4$ M_5M_6.

Точката M_i е внатрешна за $\triangle A_iA_{i+1}B_i$, па затоа $\alpha_i = \measuredangle M_iA_iA_{i+1} \leq 60^\circ$. Имаме

$$P_{A_iA_{i+1}M_i} = \frac{a^2 \sin\alpha_i \sin(60^\circ - \alpha_{i+1})}{2\sin(\alpha_i + 60^\circ - \alpha_{i+1})} = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha_{i+1}))} \leq \frac{a^2}{8}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})),$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha_i = 60^\circ - \alpha_{i+1}$. (Тука го искористивме неравенството $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) \geq 4,\ x>0, y>0$.) Според тоа,

$$P \leq P_{M_1M_2...M_6} = H + \sum_{i=1}^{6} P_{A_iA_{i+1}M_i} \leq H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1}))$$
$$= H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_i)).$$

Но,

$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)} \geq \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha), \text{ за } 0 \leq \alpha \leq 60^\circ,$$

па затоа

$$P \leq H + \frac{a^2}{8} \cdot 6\operatorname{tg}60^\circ = H + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3H}{2},$$

со што е неравенството е докажано.

4. Докажи дека не постои бикеција $f:\{1,2,...,n,...\} \to \{0,1,2,...,n,...\}$ таква што

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n), \text{ за секои } m,n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Нека претпоставиме дека постои функција $f(x)$ со саканите својства и да ја разгледаме функцијата $g(x) = 3f(x)+1$. Лесно се проверува дека g е биекција и дека $g(mn) = g(m)g(n)$, за секои $m,n \in \mathbb{N}$. Освен тоа важи $g(1)=1$.

Нека p,q и r се природни броеви за кои $g(p)=4, g(q)=10$ и $g(r)=25$. Бидејќи ниту еден од броевите 4, 10 и 25 не може да се запише како производ на два броја од множеството $\{4,7,10,...\}$, заклучуваме дека p,q и r се различни прости броеви. Но,

$$4\cdot 25=10^2 \quad\Leftrightarrow\quad g(p)g(r)=g^2(q) \quad\Leftrightarrow\quad q(pr)=g(q^2) \quad\Leftrightarrow\quad pr=q^2,$$

што не е можно за различни прости броеви.

Конечно, од добиената противречност следува дека не постои функција со саканите својства.