Некои методи за решавање на функционални равенки

Даниел Велинов - Катедра за математика, Градежен факултет, Скопје

Овде ќе бидат изложени едни од попознатите методи и техники за решавање на функционални равенки. Овие методи ќе бидат илустрирани низ задачи, кои се давани како проблеми на меѓународни натпревари и изборни натпревари за IMO.

Ќе започнеме со класа на функционални равнеки, од кои најголем дел се дефинирани на $\mathbb{N}$, како на пример $f(f(x))=g(x)$. Нив можеме да ги решаваме со помош на конструкција на орбити на x: $O(x)=(x, g(x), g(g(x)), \ldots)$ и истражувајќи ја врската помеѓу f и орбитите на x. Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Докажи дека постојат бесконечно многу непарни функции $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ за кои $g(g(k))=-k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Можеме да ставиме $g(0)=0$. Тогаш, $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ може да се подели набесконечно многу парови $(a_1,-a_1),(a_2,-a_2),\ldots$, каде $a_1,a_2,\ldots$ е некоја ренумерација на природните броеви. Тогаш, можеме да ставиме $g(a_{2k})=a_{2k+1}$, $g(a_{2k+1})=-a_{2k}$, $g(-a_{2k})=-a_{2k+1}$, $g(-a_{2k+1})=a_{2k}$. Лесно се проверува дека условот на задачата е задоволен.

Пример 2. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за кои важи $f(f(n))=an$, за некое фиксно $a\in\mathbb{N}$.

Решение. Ако $a=1$, тогаш $f(f(x))=x$, па f е инволуција, па функциите се добиени со формирање на парови од природни броеви, така што сите пририони броеви се појавуваат само еднаш во паровите и потоа во тие парови првиот елемент го пресликуваме во вториот елемент. Сега, нека $a>1$. Ако $f(x)=y$, тогаш $f(y)=ax$, $f(ax)=f(f(y))=ay$ и со помош на индукција по k го покажуваме следното тврдење:

$$f(a^k x)=a^k y,\ f(a^k y)=a^{k+1}x. \qquad (*)$$

Нека S е множеството од сите броеви кои не се деливи со a. Секој природен број може да се запише како единствено како $a^k b$, каде $b\in S$. Сега, нека $s\in S$ и $f(s)=a^k t$, каде $t\in S$. Ако ставиме $u=f(t)$, тогаш користејќи ја (*) имаме $f(a^k t)=a^k u$. Но, $f(a^k t)=f(f(s))=as$, па следува $a^k u=as$, па бидејќи s е деливо со u добиваме дека или $k=1$, $u=s$ или $k=0$, $u=as$. Во првиот случај $f(t)=s$, $f(s)=at$, а во вториот случај $f(s)=t$, $f(t)=as$. Во секој случај, f пресликува едно од s,t во останатото. Според тоа S можеме да го поделиме на парови (x,y) за кои важи $f(x)=y$, $f(y)=x$, па од (*) $f(a^k x)=a^k y$, $f(a^k y)=a^{k+1}x$. Јасно е дека сите вакви функции ги задоволуваат условите на задачата.

Пример 3. (Romanian TST, 1991) Нека $n \geq 2$ е природен број и $a,b \in \mathbb{Z}$ и $a \notin \{0,1\}$. Докажи дека постојат бесконечно многу функции $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такви што $f_n(x) = ax+b$, за сите $x \in \mathbb{Z}$, каде f_n е n-тата итерација на f. Докажи дека за $a=1$, постои b така што $f_n(x) = ax+b$ нема нули.

Решение. Вториот дел од проблемот е веќе познат проблем, кога $n=2$ и n е непарен. Ако $b=n-1$ и нека ставиме $a_i = f_i(0)$, $(a_{i+n} = a_i + b)$, тогаш за некое $0 \leq i < j \leq n$ имаме дека $a_i \equiv a_j \pmod{n}$, па $a_i = a_j + hb$, од каде $a_{i+hn} = a_j$, па $a_{r+hn+i-j} = a_r$, за доволно големо r. За $hn+i-j \neq 0$ следува $a_{r+n(hn+i-j)} = a_r$, што е во контрадикција со заклучокот дека $a_{r+n(hn+i-j)} = a_r + b(hn+i-j)$. Лесно може и да се покаже дека f постои ако и само ако $n \mid b$.

Сега ќе го докажеме првиот дел. Нека ставиме $g(x) = ax+b$. Прво го разгледуваме случајот кога $a \neq -1$ (овој е посебен случај бидејќи $g(g(x)) = x$, во овој случај, додека во генералниот случај $|g_n(x)|$ тежи кон бесконечност за скоро сите x). Лесно се гледа дека

$$g_n(x) = a^n\left(x - \frac{b}{a-1}\right) + \frac{b}{a-1}.$$

Всушност ова гарантира дека нашето тврдење дека $|g_n(x)|$ тежи кон бесконечност скоро за сите x, односно за сите x освен можеби за $x = \frac{b}{a-1}$ (ако е цел број).

Нека сега со $C(x) = \{x, g(x), g_2(x), ..., g_n(x), ...\}$ ја означиме веригата генерирана од x и максимална верига ја нарекуваме онаа верига ако не е вистинска подверига од друга верига (содруги зборови, ако $x \neq g(y)$, за некое $y \in \mathbb{Z}$). Тврдиме дека максималните вериги формираат партиција на $\mathbb{N} \setminus \{-\frac{b}{a-1}\}$. Навистина, нека избереме број $n \neq -\frac{b}{a-1}$.

Тогаш $n = g_k(m)$ е еквивалентно со $n = a^k(m + \frac{b}{a-1}) - \frac{b}{a-1}$ или

$$(a-1)n + b = a^k((a-1)m + b).$$

Па нека го земемek да биде најголемиот степен на a, така што $a^k((a-1)m+b)$ го дели $(a-1)n+b$ и нека $s = \frac{(a-1)m+b}{a^k}$. Тогаш s не е делив со a и $s-b$ е деливо со $a-1$.

Следува, ако ставиме $m = \frac{s-b}{a-1} + b$, тогаш m е цел број и равенката $g(t) = m$, нема решенија во $\mathbb{N}$. (во спротивно $at = m-b = \frac{s-b}{a-1}$, па $s-b$ е деливо со a). Па, $C(m)$ е посакуваната максимална верига. Сега ќе покажеме дека две максимални вериги немаат заеднички елементи. Ако $C(x)$ и $C(y)$ се сечат за $x \neq y$, тогаш $g_m(x) = g_n(y)$ за некои

$m \neq n$. Без губење на општоста нека претпоставиме дека $m \geq n$. Бидејќи g е инверзибилна на $\mathbb{R}$, можеме да заклучиме дека $g_{m-n}(x) = y$, па $C(y) \subset C(x)$, што е во контрадикција со фактот дека $C(y)$ е максимална верига.

Сега ги разгледуваме сите максимални вериги (тие се бесконечно многу бидејќи секој елемент x таков што равенката $g(y) = x$ нема решенија во $\mathbb{N}$ генерира таква верига). Нив можеме да ги групираме во n-торки. Ќе го дефинираме f на секоја од тие n-торки. Нека $(C(x_1), C(x_2), ..., C(x_n))$ е една таква n-торка. Тогаш дефинираме, $f(g_k(x_i)) = g_k(x_{i+1})$, за $i = 1, 2, ..., n-1$ и $f(g_k(x_n)) = g_{k+1}(x_1)$. Дефинираме уште и $f(-\frac{b}{a-1}) = -\frac{b}{a-1}$. Вака дефинираното f ги задоволува условите на задачата.

Сега нека го разгледаме случајот кога $a = 1$. Во овој случај, $\mathbb{N} \setminus \{\frac{b}{2}\}$ е поделено на бесконечно многу дисјунктни парови (x, y) за кои $x + y = b$. Повторно, овие парови можеме да ги групираме во n-торки и да го деифнираме f на секоја n-торка $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ како $f(x_i) = x_{i+1}$, $f(y_i) = y_{i+1}$, за $i = 1, 2, ..., n-1$ и $f(x_n) = y_1$, $f(y_n) = x_1$. Дефинираме, $f\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2}$. Јасно, повторно f ги задоволува условите на задачата.

Конечно, во двата случаи можеме да ги групираме веригите или паровите во n-торки на бесконечно многу начини, па имаме бесконечно многу такви функции. Може лесно да се покаже дека сите функции со вакво својство ја имаат дефиницијата која ја добивме погоре.

Постојат и функционални равенки дефинирани на множеството на природни броеви кои изгледаат доста незгодно и нивното решавање не е баш едноставно. Некогаш ние можеме да покажеме дека решенијата на функционалната равенка се единствени. Во овој случај ние ја нагаѓаме функцијата, што може многу да помогне. Многу често, решенијата се линеарни функции, па природно секогаш пробуваме $f(x) = cx$, за некоја константа c. Но, некогаш c може да биде рационален дури и ирационален, па решението можеме да го формулираме како $f(x) = [cx]$. За да ја надминеме оваа потешкотија, запишуваме $f(x) \sim cx$, што значи $|f(x) - cx|$ е ограничено. Па сега ќе можеме да го претпоставиме c од претходниот услов, а потоа таквото c ќе се обидеме да го определиме точно од некој од почетните услови. Во продолжение ќе дадеме неколку примери.

Пример 4. Најди ги сите растечки функции $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ така што единствените природни броеви кои не се во сликата на f се од облик $f(n) + f(n+1), n \in \mathbb{N}$.

Решение. Прво нека претпоставиме дека $f(x) \sim cx$. Да ја пресметаме вредноста на c. Ако $f(n) = m$, тогаш имаме точно $m - n$ природни броеви помали од m кои не се вредности на f. Тие вредности се точно $f(1) + f(2), ..., f(m-n) + f(m-n+1)$. Следува,

$f(m-n)+f(m-n+1)<m<f(m-n+1)+f(m-n+2)$. Сега, бидејќи $f(x)\sim cx$, заклучуваме дека $m\sim cn$, па добиваме $2c(m-n)\sim m$ или $2c(c-1)n\sim cn$, од каде добиваме $2c-2=1$, односно $c=\frac{3}{2}$. Нека сега претпоставиме дека $f(x)=[\frac{3}{2}x+a]$, за некое a. Јасно, $f(1)=1$, $f(2)=2$, па 1 и 2 мора да припаѓаат на сликата на f. Тогаш 3 не припаѓа на сликата на f, бидејќи $f(3)\geq 4$, па $f(2)+f(3)\geq 6$. Следува дека 4 припаѓа на сликата на f и $f(3)=4$. Продолжувајќи добиваме дека $f(4)=5$, $f(5)=7$, ... Па, $[\frac{3}{2}+a]=1$, $[3+a]=2$, од каде $a\in[-\frac{1}{2},0)$. Јасно е дека за било кои a,b во овој интервал важи $[\frac{3}{2}x+a]=[\frac{3}{2}x+b]$. Па, можеме да претпоставиме дека $a=-\frac{1}{2}$, па заклучуваме дека $f(n)=[\frac{3n-1}{2}]$. Најпрво, ќе покажеме дека $[\frac{3n-1}{2}]$ ги задоволува условите на задачата. Навистина, $[\frac{3n-1}{2}]+[\frac{3(n+1)}{2}]=[\frac{3n-1}{2}]+1+[\frac{3n}{2}]=3n+1$, користејќи го равенството на Хермит. Останува да покажеме дека единствените броеви кои не се од облик $\frac{3n-1}{2}$ се оние кои даваат остаток 1, при делење со 3. Навистина, ако $n=2k$, тогаш $[\frac{3n-1}{2}]=3k-1$ и ако $n=2k+1$, тогаш $[\frac{3n-1}{2}]=3k$, па добиваме дека единствените броеви кои не се од облик $\frac{3n-1}{2}$ се оние кои даваат остаток 1, при делење со 3.

Од тврдењето дека $f(n)=[\frac{3n-1}{2}]$ и принципот на математичка индукција можеме да заклучиме дека f е единствена. Навистина, ако претходно ги имаме најдено $f(1), f(2),..., f(n-1)$ ги имаме најдено и $f(1)+f(2), f(2)+f(3),..., f(n-2)+f(n-1)$. Тогаш $f(n)$ мора да биде број кој е поголем од $f(n-1)$ и не е помеѓу $f(1)+f(2), f(2)+f(3),..., f(n-2)+f(n-1)$. Ова важи, бидејќи ако m е таков број и $f(n)\neq m$ тогаш $f(n)>m$, па m не припаѓа ниту на сликата на f ниту на множеството $\{f(n)+f(n+1):n\in\mathbb{N}\}$, што е контрадикција. Значи $f(n)$ може да се пресмета од претходните вредности на $f(k)$, $1\leq k<n$, па според тоа f е единствена таква функција.

Пример 5. (IMO 1979) Најди ги сите растечки функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ така што единствените природни броеви кои не се во сликата на f се од облик $f(f(n))+1,\ n\in\mathbb{N}$.

Решение. Повторно f е единствена. Ако $f(x)\sim cx$, тогаш заклучуваме дека $m\sim c^2(m-n)$, каде $m=f(n)$, па $c=c^2(c-1)$ или $c^2-c-1=0$, па $c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sim 1{,}618$ е позитивниот корен на квадратната равенка. Сега ќе ставиме $f(x)=[cx+d]$ за некоја константа d. Сега ги пресметуваме $f(1)=1, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=6, f(5)=8$ и можеме да се обидеме да ставиме $d=0$, па $f(n)=[cn]$. Ќе докажеме дека вака дефинираната функција го задоволува условот на задачата. Ако $f(n)=m$ тогаш $m<cn<m+1$, па $\frac{m}{c}<n<\frac{m+1}{c}$. Бидејќи $\frac{1}{c}=c-1$, имаме $(c-1)m<n<(c-1)(m+1)$, па m е во сликата на f ако и само ако интервалот $(cm,cm+c-1)$ содржи цел број за кој важи $\{cm\}>2-c$. Ако $f(f(n))+1=m$, тогаш $[c[cn]]=m-1$, па $[cn]\in((m-1)(c-1),m(c-1))$, па $n\in((m-1)(c-1)^2,m(c-1)^2+(c-1))=((2-c)m+c-2,(2-c)m+c-1)$, па $n=[(2-c)m+c-1]=2m-[c(m-1)]-2$. Тогаш $m=f(f(n))+1$ ако и само ако бројот $n=2m-[c(m-1)]-2$ го задоволува условот $f(f(n))+1=m$. Нека ставиме $u=\{c(m-1)\}$. Тогаш $n=(2-c)m+c-2+u$, па $f(n)=[c(2-c)m+cu-2c+c^2]=[(c-1)m+cu-c+1]=$
$=[(c-1)(m-1)+cu]=[c(m-1)-m+1+cu]=c(m-1)-m+1+cu-\{u(c+1)\}$.

Ставаме $s=\{u(c+1)\}$. Тогаш $f(f(n))=[c(c-1)(m-1)+c^2u-cs]=[m-1+(c+1)u-cs]$. Па, $f(f(n))+1=m$ ако и само ако $0<(c+1)u-cs<1$. Ако $t=u(c+1)\in(0,1+c)$ што е еквивалентно на $t-c\{t\}\in(0,1)$. Ако $t<1$, $t-c\{t\}$ е негативно, што значи дека неговата вредност не припаѓа во интервалот $(0,1)$. Ако $1<t<2$, имаме

$$t-c\{t\}=t-c(t-1)=c-(c-1)t\in(0,1).$$

Ако

$$t>2t-c\{t\}=t-c(t-2)=2c-(c-1)t>2c-(c-1)(c+1)=2c-c^2+1=c>1.$$

Па, нашиот услов е еквивалентен со $t\in(1,2)$ или $u\in\left(\frac{1}{c+1},\frac{2}{c+1}\right)=(2-c,4-2c)$, па $\{cm-c\}\in(2-c,4-2c)$ или $\{cm\}\in\{0,2-c\}$. Па, овој услов е еквивалентен на $\{cm\}<2-c$. Конечно, условот $m=f(n)$ е еквивалентен на $\{cm\}>2-c$ и условот $m=f(f(n))+1$ е еквивалентен на $\{cm\}<2-c$. Па овие услови се спротивни еден на друг, со што задачата е решена.

Задачи за вежбање

1. Нека $n \in \mathbb{N}$. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи $f_n(x) = -x$, каде f_n е n-тата итерација на f.
2. Докажи дека постојат функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за кои важи $f(f(n)) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција за која важи $f(f(n)) = 4n-3$ и $f(2^n) = 2^{n+1}-1$. Пресметај го $f(1000)$. Можеме ли експлицитно да ја пресметаме вредноста на $f(2007)$? Кои вредности може да ги прими $f(1997)$?
4. Најди ги сите растечки функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ така што единствени природни броеви кои не се во сликата на f се во облик $2n + f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
5. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ така што $f(f(n)) + f(n+1) = n+2$, за $n \in \mathbb{N}$.
6. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за кои важи $f(1) = 1$ и $f(n+1) = f(n)+2$ ако $f(f(n)-n+1) = n$ и $f(n+1) = f(n)+1$ во секој друг случај.

Користена литература

1. T. Andreescu, I. Boreico, Functional equations, Electronic Edition, 2007
2. E. Chen, Introduction to Functional equations, Electronic Edition, 2016
3. E. Chen, Monsters, Electronic Edition, 2016
4. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011.