Седма Иранска геометриска олимпијада
Средно ниво
30.10.2020 година

Време за работа: 270 минути.
Секоја задача се вреднува 8 бода.

1. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Нека M е средината на страната AB. Точката N припаѓа на страната CD и е таква што $\measuredangle ADN = \frac{1}{2}\measuredangle MNC$ и $\measuredangle BCN = \frac{1}{2}\measuredangle MND$. Докажи дека N е средина на страната CD.

2. Нека ABC е рамнокрак триаголник $(\overline{AB} = \overline{AC})$ и O е центарот на неговата опишана кружница. Точката N е средина на страната BC, а точката M е симетричната точка на N во однос на страната AC. Нека T е точка таква што четириаголникот $ANBT$ е правоаголник. Докажи дека $\measuredangle OMT = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$.

3. Во остроаголен $\triangle ABC$ $(\overline{AC} > \overline{AB})$, со ортоцентар H, точката M е средина на страната BC. Правата AM по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката X. Правата CH ја сече симетралата на страната BC во точката E и по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката F. Нека ω е кружницата која минува низ точките X, E и F. Точката J припаѓа на лакот FX на ω кој не ја содржи точката E и е таква што $BCHJ$ е трапез ($CB \parallel HJ$). Докажи дека JB и EM се сечат на ω.

4. Даден е $\triangle ABC$. Кружница со центар J, која минува низ B и C, по втор пат ги сече страните AC и AB во точките E и F, соодветно. Нека X е точка таква што $\triangle FXB$ е сличен со $\triangle EJC$ (во истиот редослед) и точките X и C се на иста страна од правата AB. Слично, нека Y е точка таква што $\triangle EYC$ е сличен со $\triangle FJB$ (во истиот редослед) и точките Y и B се на иста страна од правата AC. Докажи дека правата XY минува низ ортоцентарот на $\triangle ABC$.

5. Определи ги сите броеви $n \geq 4$ такви што постои конвексен полиедар со точно n ѕидови, таков што сите ѕидови се правоаголни триаголници.

   Забелешка. Во конвексен полиедар аголот мешу секои два соседни ѕидови е помал од 180°.