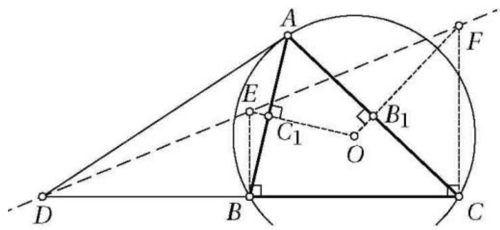
БМО 2003

1. Дали постои множество B кое се состои од 4004 природни броеви такво што за секое негово подмножество A кое има 2003 елементи збирот на елементите на множеството A не е делив со 2003?

   Решение. Постои. Доволно е да земеме множество B кое се состои од 2002 броја од видот $2003k$ и 2002 броја од видот $2003k+1$. Навистина, ако 2003-елементно множество $A \subset B$ содржи m елементи од облик $2003k+1$ и $2003-m$ елементи од облик $2003k$ (каде $1 \le m \le 2002$), тогаш збирот на неговите елементи е конгруентен со m по модул 2003.

2. Нека ABC е триаголник таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Нека D е пресечната точка на тангентата на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката A и правата BC. Нека E и F се точки соодветно на симетралите на отсечките AB и AC такви што BE и CF се нормални на BC. Докажи дека точките D, E и F се колинеарни.

   Решение. Доволно е да се докаже дека $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$. Нека B_1 и C_1 се соодветно средините на страните AC и AB. Од сличноста на триаголниците DBA и DAC следува



$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

   па затоа $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. Од друга страна, имаме $\overline{BE} = \frac{\overline{BC_1}}{\cos\measuredangle ABE} = \frac{\overline{AB}}{2\sin\measuredangle ABC}$ и, слично, $\overline{CF} = \frac{\overline{AC}}{2\sin\measuredangle ACB}$. Според тоа, $\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}\sin\measuredangle ACB}{\overline{AC}\sin\measuredangle ABC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

3. Определи ги сите функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ такви што

   1) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$, за секои $x, y \in \mathbb{Q}$,

   2) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$, за секој $x \in \mathbb{Q}$,

   3) $f(1) + 1 > 0$.

   Решение. Условот 1) е еквивалентен со условот
$$f(x+y) + x + y = (f(x)+x)(f(y)+y).$$
   Воведуваме смена $g(x) = f(x) + x$ и условите 1) – 3) ги добиваат облиците
$$g(x+y) = g(x)g(y), \quad g(x+1) = \tfrac{1}{2}g(x), \quad g(1) > 0. \qquad (*)$$

Понатаму, од $g(1)=g(1)g(0)$ следува $g(0)=1$, а од $g(0)=g(x)g(-x)$ следува дека $g(x)\neq 0$. Од првиот услов во (*) следува $g(x)=g(\frac{x}{2})^2>0$ за секој $x\in\mathbb{Q}$. Ако ставиме $h(x)=\log_2 g(x)$, тогаш од условите (*) добиваме

$$h(x+y)=h(x)+h(y) \qquad (**)$$

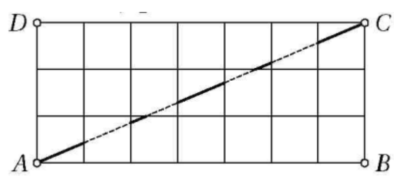
$$h(x+1)=h(x)-1 \qquad (***)$$

Според (**) функцијата h ја задоволува Кошиевата равенка, па затоа $h(x)=h(1)x$, за $x\in\mathbb{Q}$, а од (***) добиваме $h(1)=h(0)-1=-1$. Според тоа, $h(x)=-x$, па затоа $g(x)=2^{-x}$ и $f(x)=2^{-x}-x$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите 1) – 3).

4. Нека m и n се заемно прости непарни природни броеви. Правоаголникот $ABCD$ е таков што $\overline{AB}=m, \overline{AD}=n$ и е поделен на mn единечни квадрати. Со $A_1,A_2,...,A_k$ да ги означиме последователните пресечни точки на дијагоналата AC со страните на делбените единечни квадрати ($A_1=A, A_k=C$). Докажи, дека

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\overline{A_jA_{j+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$

Решение. Да поставиме координатни оски x и y соодветно на правите AB и AD. Со B_x да ја означиме точката $(\frac{x}{n},\frac{x}{m})$. Сите точки A_i припаѓаат на множеството



$$\{B_x \mid x=1,2,...,mn\}.$$

Притоа бројот на пресеците на полуотворените отсечки $(A,B_x]$ со страните на единичните квадратие еднаков на $i(x)=[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]$, па затоа отсечката B_xB_{x+1} лежи на отсечката $A_{i(x)+1}A_{i(x)+2}$. Според тоа,

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\overline{A_jA_{j+1}}=\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{i(x)}\overline{B_xB_{x+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}.$$

Нека r_x и s_x се соодветно остатоците од делењето на x со m и n. Тогаш $[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]$ има иста парност како и r_x+s_x, па како паровите (r_x,s_x), $x=0,1,...,mn-1$ всушност се паровите $(a,b), 0\le a<m, 0\le b<n$, добиваме

$$\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}=\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{r_x+s_x}=\sum_{a=0}^{m-1}(-1)^a\sum_{b=0}^{n-1}(-1)^b=1.$$