2. Аня, Саша и Витя и Настя решали контрольную, на которой задали 9 задач. Могло ли быть так, что Аня списала семь задач у Саши, Саша списал семь задач у Вити, Витя списал семь задач у Насти, а Настя списала семь задач у Ани?

Ответ: не может.

Решение. Если Настя списала семь задач, то их кто-то должен был решить, но Аня, Саша и Витя решили не более, чем по две задачи каждый, то есть не более 6 задач.

3. Юля, Семен, Василиса, Илларион и Татьяна Петровна ели конфеты (причем, не деля их на части). Когда все конфеты кончились, их спросили: «Кто сколько съел конфет?» На что они ответили:
Юля: «Я и Василиса съели 97 конфеты»;
Семен: «Я и Илларион съели 234 конфеты»;
Василиса: «Я, Семен и Татьяна Петровна съели 153 конфет»;
Илларион: «Я, Татьяна Петровна и Юля съели 277 конфет».
После этого Татьяна Петровна сказала, что так быть не могло. Почему она пришла к такому выводу?

Решение. Запишем условие задачи в виде уравнений:

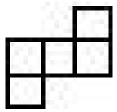
Ю+В=97; С+И=234; В+С+ТП=153; И+ТП+Ю=277. Тогда, складывая эти уравнения, получим, что 2(Ю+В+С+И+ТП) = 97+234+153+277 – нечетное число. Противоречие.

4. У Буратино есть 6 монет: две золотые, две серебряные и две медные. В каждой паре одна монета настоящая, а другая фальшивая. Известно, что все настоящие монеты весят одинаково и все фальшивые тоже весят одинаково. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти все настоящие монеты?

Решение. Обозначим монеты З1, З2, С1, С2, М1, М2. Первым взвешиванием взвесим пару З1 и С1 с парой З2 и М1. Разберем два случая:

1) весы в равновесии. Поскольку среди золотых ровно одна фальшивая, то и среди С1 и М1 ровно одна фальшивая и ровно одна настоящая. И на каждой чаше лежит одна настоящая и одна фальшивая. Тогда вторым взвешиванием взвесим С2 и М2. Равновесие уже невозможно, поэтому мы в любом случае определим, какая из монет легче. Пусть это М2, тогда М1, С2 и З2 настоящие. Если же это С2, то настоящие М2, С1 и З1.
2) Одна чаша перевесила. Пусть тяжелее З1 и С1 (второй вариант разбирается аналогично). Это означает, что З1 точно настоящая, З2 – фальшивая. Для пары С1;М1 возможны варианты НН, ФФ и НФ, варианта ФН быть не может. Теперь вторым взвешиванием взвесим обе золотые монеты с парой С2 и М2. Если весы окажутся в равновесии, то означает, что реализуется вариант НФ, если золотые перевесят, то обе монеты С2 и М2 фальшивые, если же перевесит чаша с серебряной и медной монетой, то они обе настоящие.

5. Клетки тетрадного листа раскрашены в 8 цветов. Докажите, что найдется фигура вида, как на рисунке , внутри которой есть две клетки одного цвета.



Решение. Рассмотрим на этом клетчатом листе квадратик 3х3 клетки. Для любых двух клеток этого квадрата найдется фигура заданного вида, что эти клетки принадлежат этой фигуре. Но тогда, поскольку в квадрате 3х3 содержится 9 клеток, а цветов только 8, то найдутся две клетки одного цвета. Фигура, содержащая эти две клетки и будет искомой.

Математическая Олимпиада

для 5 классов

Организаторы олимпиады – Творческая лаборатория «Дважды Два», Образовательная программа «Большая Перемена», Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) при содействии Московского Городского Дворца Детского (Юношеского) Творчества и центра дополнительного образования "Дистантное Обучение".

Задания олимпиады разделены на два блока. Часть А состоит из заданий, в которых ребятам достаточно дать верный ответ. К задачам части Б необходимо давать полное решение (не только ответы, но и объяснение).

Результаты олимпиады (баллы участников и список призеров) будут опубликованы 18 февраля 2008 года на сайте олимпиады http://mathbaby.narod.ru/5kl.html и http://mathbaby.ru/. Не забывайте, что хороший результат говорит о многом, а неудачный не говорит ни о чем! Желаем успехов в дальнейшем!

Жюри олимпиады:
- Елена Юрьевна Иванова, руководитель математических кружков, преподаватель математики школы №25, председатель жюри олимпиады
- Олег Юрьевич Ланин, руководитель кружков 5-6 классов, преподаватель МГДД(Ю)Т
- Татьяна Петровна Зорина, руководитель математических кружков, преподаватель математики школы №936,
-студенты и аспиранты механико-математического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова

Контактный e-mail: olimp5@desc.ru, а также 1717_2004@mail.ru

Информация об олимпиаде:

- http://mathbaby.narod.ru/5kl.html (сайт олимпиады)
- http://mathbaby.ru/ (новая версия сайта)
- http://olympiads.1001site.ru/ («Большая Перемена»)
- http://www.desc.ru/ (ЦДО «Дистантное Обучение»)

Второй (устный) тур состоится 22 марта. Начало в 11.00. Место будет объявлено дополнительно. Смотрите информацию на сайте.

После окончания второго тура состоится закрытие олимпиады и награждение победителей 1 и 2 тура.

На этот тур будут приглашены ребята, хорошо выступившие в первом (письменном) туре. Список приглашенных также будет опубликован после 18 февраля на сайте олимпиады.

Задания олимпиады и краткие решения.

Часть А

1. На полке в один ряд стоят книги. Энциклопедия стоит пятой слева и семнадцатой справа. Сколько книг на полке?

   <u>Ответ</u>: 21 книга.

   <u>Решение</u>. Слева до энциклопедии стоит 4 книги, а справа – 16 книг. Всего 4+16+1=21.

2. 5 окуней легче 6-ти карасей, но тяжелее 10 лещей. Что тяжелее – 2 карася или 3 леща?

   <u>Ответ</u>: тяжелее 2 карася.

   <u>Решение</u>. Из условия следует, что 6 карасей тяжелее 10 лещей. То есть 3 карася тяжелее 5 лещей. Значит, карась тяжелее леща и 4 карася тяжелее 6 лещей.

3. Лиса, Волк и Заяц сыграли в домино. Заяц сказал: «Волк глупее лисы». Волк: «Лиса выиграла». Известно, что один из зверей – самый глупый – соврал. Выиграл же самый умный зверь. Кто это был?

   <u>Ответ</u>: Заяц.

   <u>Решение</u>. Поскольку самый глупый зверь соврал, то это либо заяц, либо волк. Если солгал заяц, то, значит, волк сказал правду. Тогда лиса выиграла и волк не глупее лисы, но тогда лиса не может быть самой умной и по условию не может выиграть. Противоречие. Если же солгал волк, то выиграла не лиса и верно, что волк глупее лисы. Но тогда волк не мог выиграть и, значит, выиграл заяц.

4. Костя мечтает: «Если бы у меня было конфет в три раза больше, чем сейчас, то у меня было бы на 12 конфет больше». Сколько конфет у Кости?

   <u>Ответ</u>: 6 конфет.

   <u>Решение</u>. Если конфет будет в три раза больше, то 12 конфет составляют две трети от того, что было бы, значит одна треть равна 6.

5. Отличница Настя составила огромное число, выписав подряд натуральные числа от 1 до 500: 123456789101112...498499500. Двоечник Миша стер у этого числа первые 200 цифр. С какой цифры начинается оставшееся число?

   <u>Ответ</u>: 3.

   <u>Решение</u>. У всех однозначных чисел всего 9 цифр. Сосчитаем, сколько цифр у двузначных чисел. Двузначных чисел 90, значит цифр 180. Так как вычеркнуто 200 цифр, то вычеркнуто 11 цифр трехзначных чисел. Это 100, 101, 102 и 10.

6. Лида вяжет шарф длиной 2м. Каждое утро она садится за вязание и вяжет 30см. Каждую ночь котенок Непоседа распускает 20см связанного шарфа. Лида начала вязать 1 февраля. Какого числа шарф будет связан?

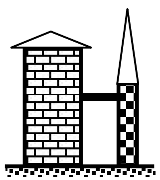
   <u>Ответ</u>: 18 февраля.

   <u>Решение</u>. За каждый сутки длина шарфа увеличивается на 10см. Значит утром 17 февраля шарф будет длиной 170см. Связав к вечеру еще 30см, Лида довяжет шарф.

7. Чему равна сумма 123456789 + 234567891 + 345678912 + … +912345678 ?

   <u>Ответ</u>: 4 999 999 995.

   <u>Решение</u>. Поскольку в каждом разряде побывают все цифры, то требуется сумму всех цифр умножить на 111 111 111.



8. В одной сказочной стране Лилипуты и Гуливеры построили рядом многоэтажные дома, которые соединены горизонтальным переходом с 5-го этажа дома Гуливеров на 25-ый этаж дома Лилипутов.

(а) Пол какого этажа Лилипутов напротив пола 10 этажа Гуливеров?

(б) Во сколько раз этаж Гуливеров выше этажа Лилипутов?

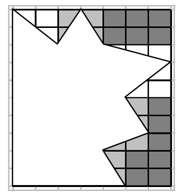
   <u>Ответ</u>: (а) 55; (б) в 6 раз.

   <u>Решение</u>. Высота четырех этажей дома Гуливеров равна высоте 24 этажей дома Лилипутов. Значит на один этаж Гуливеров приходится 6 этажей Лилипутов.

9. Встретились три мальчика: Вася, Лёша и Миша. Вася сказал: «Мы все лжецы». Лёша сказал: «Мы все всегда говорим правду». А Миша промолчал. Сколько лжецов среди ребят?

   <u>Ответ</u>: два.

   <u>Решение</u>. Утверждение Васи не может быть верно, так как если все лжецы, то Вася должен лгать, а он сказал правду. Значит, говорящий правду точно есть. И лжец тоже есть (Вася) Тогда утверждение Лёши тоже неверно. Следовательно, два лжеца точно есть (Вася и Лёша). Тогда Миша – не лжец.



10. В городе Урюпинске на главной площади города устроили каток странной формы (см.план справа). Какова площадь катка, если площадь одной клеточки на плане $1м^2$?

   <u>Ответ</u>: $46,5м^2$.

   <u>Решение</u>. Размер всей площади $70м^2$ (=7x10) Чтобы найти площадь катка, нужно из 70 вычесть площадь внешней области. Заметим, что серые треугольники равны и, соответственно, равны их площади. Каждый из них есть половина прямоугольника 1x2, то есть площадь каждого их них равна $1м^2$. Из трех оставшихся белых треугольников два равны и составляют вместе квадрат 2x2, а третий есть половина от прямоугольника 1x3 и, следовательно, его площадь равна $1,5 м^2$. Суммируя найденные площади и площадь темных клеток, получаем 5 + 4 + 1,5 +13 = 23,5.

11. Первого сентября в школе начались занятия кружков пения, рисования, по математике и по физике. Кружок пения проходит через два дня на третий, рисования – каждый 4-й день, кружок по математике – каждый 5-й день и по физике– каждый 6-й день. Кружки ведутся и в выходные, и в каникулы.

(а) Сколько было осенью дней, когда собирались все четыре кружка?

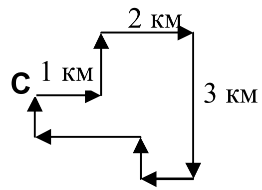
(б) Сколько занятий кружка по математике было осенью?

   <u>Ответ</u>: (а) два; (б) 16.

   <u>Решение</u>. Осенью (с 1 сентября по 30 ноября) 91 день. Кружок математики проходит один раз в 6 дней. 91 = 6x15 + 1. Поскольку 1 сентября занятия тоже были, то в оставшиеся 90 дней было ровно 15 занятий. Чтобы все четыре кружка после 1 сентября снова были в один день, нужно, чтобы прошло НОК(3;4;5;6)=60 дней. Второй раз (когда пройдет еще 60 дней) это случится уже после ноября.

Часть Б

1. В зимней математической школе начальник смены повел школьников кататься на лыжах. Начало и конец маршрута – в точке С (см.рис.). Могли ли школьники пройти 10 километров по этому маршруту?



   <u>Ответ</u>: не могли.

   <u>Решение</u>. Заметим, что сумма длин горизонтальных стрелок на плане равно удвоенному расстоянию, пройденному вправо, то есть 6км. Аналогично для вертикальных стрелок. Таким образом, школьники прошли 12км, а не 10.