

Медитеранска математичка олимпијада

24.04.2019 година

Задача 1. Во $\triangle ABC$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$, отсечката AD , ($D \in BC$) е симетрала на внатрешниот агол $\angle A = 60^\circ$. Нека r_B, r_C и r се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABD , ADC и ABC , соодветно. Докажи дека

$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Задача 2. Нека $m_1 < m_2 < \dots < m_s$ е низа од $s \geq 2$ природни броеви такви што ниту еден од нив не може да се запише како збир на два или повеќе различни членови на низата. Докажи дека

$$rm_r + m_s \geq (r+1)(s-1)$$

за секој $r \in \{1, 2, \dots, s-1\}$.

Задача 3. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви x, y, z такви што збирот на цифрите на декадниот запис на бројот $4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz$ е помал или еднаков на 2.

Задача 4. Нека P е внатрешна точка на рамностран триаголник со висина 1. Ако x, y, z се растојанијата од P до страните на триаголникот, тогаш

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz.$$

Докажи!

Секоја задача се вреднува по 7 поени.

Време за работа 4:30

Користењето на калкулатор не е дозволено.